

**Lineaarialgebra**  
**Harjoitus 2, 8.2.2005**

1. Olkoot  $V$  ja  $W$  vektoriavaruuksia. Olkoon

$$\mathcal{L}(V, W) = \{L : V \rightarrow W \text{ lineaarikuvaus}\}$$

Olkoon  $v \in V$ . Olkoon kuvaus  $f_v : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow W$

$$f_v(L) = L(v) \quad \forall L \in \mathcal{L}(V, W).$$

(a) Osoita, että  $\mathcal{L}(V, W)$  on vektoriavaruus.

(b) Osoita, että  $f_v$  on lineaarikuvaus.

2. Olkoon  $L : V \rightarrow W$  lineaarikuvaus. Osoita, että  $L$  on injektio, jos ja vain jos  $\text{Ker } L = \{0\}$ .

3. Olkoot  $V$ ,  $W$  ja  $U$  vektoriavaruuksia. Osoita:

(a) Jos  $L_1 : V \rightarrow W$  ja  $L_2 : W \rightarrow U$  ovat lineaarikuvauksia, niin niiden yhdistetty kuvaus  $L_2 \circ L_1 : V \rightarrow U$  on lineaarikuvaus.

(b) Jos  $L : V \rightarrow W$  on lineaarinen bijektio, niin  $L^{-1} : W \rightarrow V$  on lineaarinen bijektio.

4. Olkoon  $V$  vektoriavaruus. Olkoot  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  lineaarisesti riippumattomia. Olkoot  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$  siten, että

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i.$$

Osoita, että  $\alpha_i = \beta_i$  kaikilla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

5. Ovatko seuraavat vektorit lineaarisesti riippumattomia? Anna jokin niiden virittämän aliavaruuden kanta.

(a)  $(1, -2, 1, 2), (3, 0, 2, -2), (0, 4, -1, -1), (5, 0, 3, -1) \in \mathbb{R}^4$ .

(b)  $(1, -3, 2), (2, -4, -1), (1, -5, 7) \in \mathbb{R}^3$ .

6. Olkoon

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

joukossa  $\mathbb{R}$  määriteltyjen funktioiden vektoriavaruus. Olkoot  $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$h_1(x) = \sin(x),$$

$$h_2(x) = \cos(x)$$

ja

$$h_3(x) = \pi$$

kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Osoita, että joukko  $\{h_1, h_2, h_3\}$  on lineaarisesti riippumaton.

7. Olkoon  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, -2x_1 + 2x_2 - 2x_3).$$

Keksi kannat avaruuksille  $\text{Ker } L$  ja  $\text{Im } L$ .

8. Osoita, että  $\dim M(n, m) = nm$ .

**Vihje:** Keksi sopiva kanta!