

Lineaarialgebra

Harjoitus 1, 1.2.2005

1. Olkoon V vektoriavaruus. Olkoot U ja W V :n vektoriavaruuksia. Osoita, että $U \cap W$ on V :n vektoriavaruus.

2. Olkoon V vektoriavaruus. Olkoon $u \in V$. Osoita, että u :lla on täsmälleen yksi vastavektori.

3. Olkoon V vektoriavaruus. Olkoon $v \in V$. Osoita, että $v + u = u$ kaikilla u , jos on olemassa $w \in V$ siten, että $v + w = w$.

Tehtävissä 4–5 saa käyttää ainoastaan Määritelmää 1.1, Lausetta 1.3 ja niitä Lauseen 1.4 kohtia, jotka ovat luettelossa ennen todistettavaa väitettä.

4. Olkoon V vektoriavaruus. Olkoot $u, v \in V$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Osoita, että

- (a) $-(-u) = u$,
- (b) $-(\alpha v) = \alpha(-v) = (-\alpha)v$

5. Olkoon V vektoriavaruus. Olkoot $u, v \in V$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Osoita, että

- (a) $\alpha u = 0 \iff \alpha = 0 \text{ tai } u = 0$,
- (b) $\alpha u = \alpha v \text{ ja } \alpha \neq 0 \implies u = v$

6. Olkoon

$$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ on } k \text{ kertaa derivoituva } \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Onko $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vektoriavaruus?

(b) Onko joukko

$$V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

vektoriavaruus?

(c) Onko joukko

$$W = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

vektoriavaruus?

7. Olkoon $n \geq 2$. Mitkä seuraavista ovat lineaarikuvauksia?

(a) *Jälki* $\text{tr} : M(n) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}.$$

(b) *Transpoosi* $T : M(n) \rightarrow M(n)$, $T(A) = A^t$.

(c) *Determinantti* $\det : M(n) \rightarrow \mathbb{R}$.

8. Olkoon $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Osoita, että joukot

$$\text{Ker } L = \{u \in V : Lu = 0\}$$

ja

$$\text{Im } L = L(V)$$

ovat vektoriavaruuksia.