

Johdatus matematiikkaan
Harjoitus 4, 21.9.2012

1. Anna esimerkki joukoista A, B ja C siten, että

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad B \cap C \neq \emptyset, \quad C \cap A \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad A \cap B \cap C = \emptyset.$$

Piirrä ensin kuvia, keksi sitten konkreettisia joukkoja.

2. Olkoot $f: A \rightarrow B$ ja $g: B \rightarrow C$ injektioita. Osoita, että yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on injektio.

Joukon $C \subset B$ alkukuva kuvauksessa $f: A \rightarrow B$ on

$$f^{-1}(C) = \{a \in A : f(a) \in C\}.$$

3. Olkoot $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_1(x_1, x_2) = x_1$$

ja $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_2(x_1, x_2) = |x_2|.$$

Ovatko funktiot f_1 ja f_2 injektioita tai surjektioita? Piirrä kuva joukosta

$$f_1^{-1}([0, 1]) \cap f_2^{-1}([0, 1]).$$

Hotelli Hilbert on tavallista suurempi hotelli. Tässä hotellissa huoneet on numeroitu järjestyksessä positiivisilla kokonaisluvuilla, jokaista lukua vastaa yksi huone.

4. Hotelli Hilbert on täynnä. Illalla tulee kuitenkin vielä yksi asiakas, joka haluaisi huoneen. Miten asiakkaalle saadaan tilaa ilman, että kukaan joutuu lähtemään hotellista?

5. Hotelli Hilbert on täynnä. Illalla tulee turistibussi, jossa on yhtä monta turistia kuin Hotelli Hilbertissä on huoneita. Miten kaikille turisteille saadaan oma huone ilman, että kukaan joutuu lähtemään hotellista?

-
6. Osoita induktiolla, että kaikille positiivisille kokonaisluvuille n pätee

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

7. Osoita, että kaikille positiivisille kokonaisluvuille n pätee

$$(*) \quad \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} + \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Osoita sitten, että kaikille positiivisille kokonaisluvuille n pätee

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

8. Osoita, että lukujono

$$\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right)_{N=1}^{\infty}$$

kasvaa rajatta.

⁷Vihje: Montako lukua summassa (*) on?