

Johdatus matematiikkaan
Harjoitus 3, 14.9.2012

1. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja, joille pätee $a < b$. Osoita, että $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
2. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Osoita, että jollekin luonnolliselle luvulle N pätee $Na > b$.
3. Osoita induktiolla potenssin n suhteen, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

kaikille positiivisille reaaliluvuille x .

4. Olkoon $a > 1$ reaaliluku. Osoita, että jono $(a^k)_{k=1}^{\infty}$ kasvaa rajatta.
5. Olkoon $0 < a < 1$ reaaliluku. Osoita, että jonon $(a^k)_{k=1}^{\infty}$ raja-arvo on 0.

Positiivisen kokonaisluvun k *kertoma* on

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$$

ja luvun 0 kertoma on $0! = 1$.

6. Osoita induktiolla, että $n! \geq 2^n$, kun $n \geq 4$.
7. Osoita, että kaikille luonnollisille luvuille n ja $0 < k < n$ pätee

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

-
8. Osoita induktiolla, että

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$