

Johdatus matematiikkaan

Harjoitus 2, 11.9.2012

Yhtälön

$$(*) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

ratkaisua (x, y, z) sanotaan *Pythagoraan kolmikoksi*, jos x , y ja z ovat positiivisia luonnollisia lukuja.

1. Olkoot a ja b luonnollisia lukuja. Osoita, että luvut

$$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2 \quad \text{ja} \quad z = a^2 + b^2$$

ovat yhtälön $(*)$ ratkaisuja. Millä ehdolla $(2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2)$ on Pythagoraan kolmikko?

Olkoot d , x , y ja z positiivisia luonnollisia lukuja. Luku d on lukujen x , y ja z yhteinen tekijä, jos x , y ja z ovat kaikki jaollisia luvulla d . Pythagoraan kolmikko (x, y, z) on *primitiivinen*, jos lukujen x , y ja z suurin yhteinen tekijä on 1.

2. Etsi neljä primitiivistä Pythagoraan kolmikkoa.

3. Etsi primitiivinen Pythagoraan kolmikko, jossa z on suurempi kuin 1000000.

Reaalilukujen järjestyksellä on seuraavat ominaisuudet:

- (a) Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.
- (b) Jos $a < b$ ja $0 < c$, niin $ac < bc$.
- (c) Kaikille positiivisille reaaliluvuille a ja b pätee $a < b$, $a = b$ tai $b < a$.

4. Olkoot $a, b > 0$ reaalilukuja, joille pätee $a > b$. Osoita (induktiolla), että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee $a^n > b^n$.

5. Olkoot $a, b > 0$ reaalilukuja, joille pätee $a^n > b^n$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla n . Osoita, että $a > b$.

6. Mikä seuraavista luvuista on pienin: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ vai $\sqrt[6]{5}$.

7. Osoita induktiolla, että

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$

8. Olkoon $a \neq 1$. Osoita induktiolla, että

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$