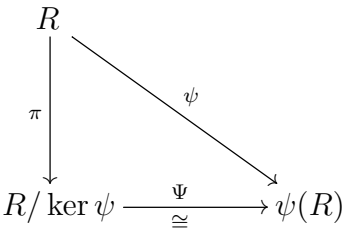
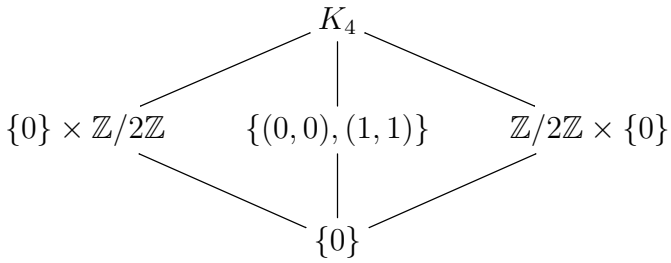
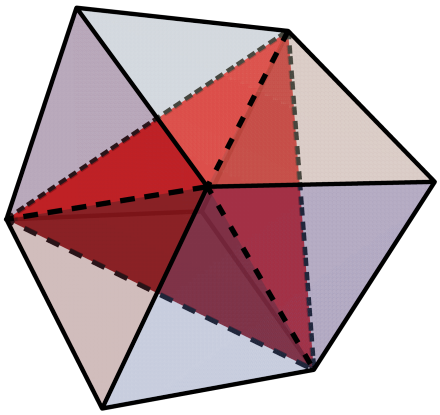
Algebra

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α







Jouni Parkkonen

Luentoja Jyväskylän yliopistossa
2026

Sisällys

I Laskutoimituksista **1**

1 Laskutoimitukset **3**
1.1 Laskutoimitus . . . 3
1.2 Indusoitu laskutoimitus . . . 5
1.3 Homomorfismi . . . 6
1.4 Assosiatiivisuus ja kommutatiivisuus . . . 7
1.5 Neutraalialkio . . . 9
1.6 Käänteisalkio . . . 10
1.7 Kahdella laskutoimituksella varustetut joukot . . . 11
1.8 Kompleksiluvut . . . 12
1.9 Potenssit ja monikerrat . . . 15
Harjoitustehtäviä . . . 16

2 Tekijälaskutoimitus ja modulaariaritmetiikka **19**
2.1 Ekvivalenssirelaatio . . . 19
2.2 Kongruenssi . . . 21
2.3 Tekijälaskutoimitus . . . 22
2.4 Kongruenssiluokkien laskutoimitukset . . . 23
Harjoitustehtäviä . . . 24

II Renkaat ja kunnat **27**

3 Renkaat **29**
3.1 Ryhmä . . . 29
3.2 Rengas . . . 31
3.3 Alirengas . . . 33
3.4 Rengashomomorfismit . . . 34
3.5 Renkaan karakteristika . . . 36
Harjoitustehtäviä . . . 37

4 Kunnat **41**
4.1 Yksiköt . . . 41

4.2 Jakorenkaat ja kunnat . . . 42
4.3 Toisen asteen lukukunnat . . . 43
4.4 Hamiltonin kvaterniot . . . 44
4.5 Lineaarialgebraa . . . 45
Harjoitustehtäviä . . . 47

5 Jaollisuus **49**
5.1 Jaollisuudesta . . . 49
5.2 Jaottomat alkiot ja alkualkiot . . . 50
5.3 Renkaan $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ yksiköt . . . 52
Harjoitustehtäviä . . . 54

6 Polynomirenkaat **55**
6.1 Polynomit ja polynomifunktiot . . . 55
6.2 Polynomirengas . . . 56
6.3 Polynomin vaihtoehtoinen määritelmä . . . 57
6.4 Aste . . . 58
6.5 Polynomien jakoyhtälö . . . 60
6.6 Polynomien juuret ja jaollisuus . . . 62
6.7 Juurien lukumäärä . . . 64
6.8 Algebrallisesti suljetut kunnat . . . 65
Harjoitustehtäviä . . . 65

7 Ideaalit ja kuntalaajennukset **69**
7.1 Ideaalit . . . 69
7.2 Pääideaalit . . . 71
7.3 Tekijärenkaat . . . 73
7.4 Polynomirenkaiden tekijärenkaita . . . 75
7.5 Maksimaaliset ideaalit . . . 76
7.6 Kuntalaajennukset polynomirenkaiden avulla . . . 77
Harjoitustehtäviä . . . 79

III Ryhmät **83**

8 Ryhmät **85**
8.1 Ryhmä . . . 85
8.2 Ryhmien suora tulo . . . 88
8.3 Ryhmähomomorfismit . . . 89
8.4 Jäännösluokkien multiplikatiiviset ryhmät . . . 91
8.5 Lineaarialgebrasta . . . 92
Harjoitustehtäviä . . . 93

9 Aliryhmät **97**
9.1 Aliryhmät . . . 97
9.2 Aliryhmäkaavio . . . 99
9.3 Lineaariset ryhmät . . . 100
9.4 Homomorfismit ja aliryhmät . . . 102

9.5 Osajoukon virittämä aliryhmä . . . 103
9.6 Syklinen ryhmä . . . 104
9.7 Ryhmien sisäinen suora tulo . . . 107
9.8 Lukuteorian ryhmiä . . . 109
Harjoitustehtäviä . . . 110

10 Symmetriset ryhmät **113**
10.1 Symmetrinen ryhmä S_n . . . 113
10.2 Symmetrisen ryhmän rakenteesta . . . 115
10.3 Cayleyn lause . . . 117
10.4 Permutaation merkki . . . 117
10.5 Alternoiva ryhmä A_n . . . 120
Harjoitustehtäviä . . . 121

11 Lagrangen lause **123**
11.1 Sivuluokat . . . 123
11.2 Sivuluokkien määräämä ositus . . . 124
11.3 Aliryhmän indeksi ja Lagrangen lause . . . 125
11.4 Lagrangen lauseen sovelluksia lukuteoriaan . . . 127
Harjoitustehtäviä . . . 128

12 Normaalit aliryhmät ja tekijäryhmät **131**
12.1 Normaalit aliryhmät . . . 131
12.2 Tekijäryhmät . . . 133
12.3 Ryhmien ensimmäinen isomorfismilause . . . 134
12.4 Ryhmien toinen ja kolmas isomorfismilause . . . 136
Harjoitustehtäviä . . . 138

13 Ryhmät ja geometria **141**
13.1 Ortogonaaliryhmä . . . 141
13.2 Säännöllisten monikulmioiden symmetrioista . . . 142
13.3 Monitahokkaiden symmetrioista . . . 148
Harjoitustehtäviä . . . 151

IV Galois'n teoriaa **153**

14 Kuntalaajennuksista **155**
14.1 Kuntalaajennukset . . . 155
14.2 Jaottomat polynomit ja kuntalaajennukset . . . 156
14.3 Osajoukon virittämä laajennus . . . 159
14.4 Algebralliset laajennukset . . . 159
14.5 Murtokunta . . . 162
Harjoitustehtäviä . . . 164

Kirjallisuutta **165**

Lukijalle

Tämä teksti on talven ja kevään 2026 kurssien Algebra 1: Renkaat ja Kunnat ja Algebra 1: Ryhmät oppimateriaali. Kurssit muodostavat johdatuksen abstraktiin algebraan. Kursseilla tarkastelemme laskutoimituksia, joita on määritelty joidenkin joukkojen alkioille, ja laskutoimituksella varustettujen joukkojen välisiä homomorfismeja, jotka ovat laskutoimitusten kanssa yhteensopivia kuvauksia. Teoriaa havainnollistetaan esimerkeillä matematiikan eri aloilta (joukko-oppi, lineaarialgebra, analyysi, geometria, lukuteoria). Konkreettisia esimerkkejä ovat muun muassa

Päivitä Galois'n teorian osalta!

- reaalilukujen kunta $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, jonka laskutoimitukset ovat tavalliset yhteenlasku ja kertolasku,
- $\mathbb{R}$-vektoriavaruudet, joissa on määritelty vektorien yhteenlasku ja lisäksi vektorin kertominen reaaliluvulla. Vektorin kertominen reaaliluvulla ei ole laskutoimitus vaan *toiminta*. Sivuamme tätä aihepiiriä molemmilla kursseilla, mutta emme perehdy tähän aihepiiriin laajemmin.
- Ortogonaalisten $n \times n$-matriisien ryhmä, jossa laskutoimitus on matriisien kertolasku.

Yksi algebran keskeinen ajatus on se, että erilaisissa matemaattisissa yhteyksissä tunnistetaan samankaltaisia rakenteita. Jos tunnistetaan jokin tunnettu algebrallinen rakenne (ryhmä, rengas,...), voidaan tarkasteltavaa tilannetta usein ymmärtää paremmin näille algebrallisille rakenteille todistettujen yleisten tulosten avulla.

Teksti koostuu kolmesta osasta ja yhdestä lyhyestä liitteestä. Osa I käsittelee laskutoimituksia. Tätä osaa käsitellään molemmilla kursseilla. Osa II muodostaa kurssin Renkaat ja kunnat rungon ja Osa III muodostaa kurssin Ryhmät rungon. Liitteeseen **??** on koottu kursseilla tarvittavia lukuteorian alkeita. Liitteen sisältö on tuttua kurssin Lukuteoria 1 suorittaneille. Lukuteorian kurssia ei oleteta esitietona, mutta kurssilla Lukuteoria 1 käsitellyistä jaollisuuden ja modulaariaritmetiikan perusteista on hyötyä kummallakin algebran kurssilla.

Kurssin Renkaat ja kunnat aluksi luvuissa 1 ja 2 tutustutaan laskutoimituksen käsitteeseen ja erilaisiin laskutoimituksiin sekä homomorfismeihin laskutoimituksella varustettujen joukkojen välillä. Luvuissa 3 ja 4 tutustumme renkaisiin ja niiden erityistapauksena kuntiin. Nämä ovat kahdella laskutoimituksella varustettuja joukkoja, jotka yleistävät kokonaislukujen renkaan ja rationaali- ja reaalilukujen kunnat, joissa laskutoimitukset ovat tavanomaiset yhteen- ja kertolasku. Luvussa 5 tarkastelemme jaollisuutta renkaissa.

Luvussa 6 tutustumme polynomirenkaisiin, jotka ovat tärkeässä osassa. viimeisessä luvussa, jossa tutustumme ideaaleihin, tekijärenkaisiin ja polynomirenkaiden avulla tehtäviin kuntalaajennuksiin. Sovelluksena tarkastelemme äärellisten kuntien konstruktiota.

Kurssin RYHMÄT aluksi tutustutaan lukujen 1 ja 2 avulla laskutoimituksen käsitteeseen ja erilaisiin laskutoimituksiin. Luvussa 8 tutustumme ryhmiin ja niiden välisiin homomorfismeihin. Ryhmät ovat yhdellä laskutoimituksella varustettuja joukkoja, joilla on samoja ominaisuuksia kuin esimerkiksi joukon $\{1, 2, 3\}$ permutaatioiden ryhmällä. Luvussa 9.1 tarkastelemme aliryhmiä, jotka ovat ryhmän osajoukkoja, joihin ryhmän laskutoimitus määrää ryhmän rakenteen. Permutaatioryhmiä tarkastellaan lähemmin luvussa 10, erityisesti perehdymme äärellisten joukkojen permutaatioryhmiin, joita kutsutaan symmetrisiksi ryhmiksi. Luvussa 11 tutustutaan aliryhmien sivuluokkiin ja todistetaan Lagrangen lause, joka kertoo äärellisen ryhmän aliryhmien mahdolliset koot. Luvussa 12 tutustumme normaaleihin aliryhmiin, määrittelemme laskutoimituksen normaalin aliryhmän sivuluokkien joukossa ja päädymme tarkastelemaan tärkeää tekijäryhmän käsitettä. Kurssin lopuksi tarkastellaan lyhyesti ryhmäteorian ja geometrian yhteyksiä.

Kurssit on suunniteltu niin, että kumpi tahansa on mahdollista suorittaa ensimmäisenä. Kurssien sisällöt liittyvät kuitenkin toisiinsa monin tavoin. Muutama tulos ja harjoitustehtävä on merkitty tähdellä, esimerkiksi sen vuoksi, että niissä tarvitaan toisen kurssin ainesta.

Merkintöjä

Kurssilla käytetään seuraavia merkintöjä:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ on luonnolliset luvut.

$\#A \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ on joukon A alkioiden lukumäärä.

$A - B = \{a \in A : a \notin B\}$ on joukkojen A ja B erotus.

$\mathscr{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ on joukon X potenssijoukko.

$f|_A \colon A \to Y$ on kuvauksen $f \colon X \to Y$ rajoittuma osajoukkoon $A \subset X$, $f|_A(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$.

$Y^X = \{f \colon X \to Y\}$ on kaikkien kuvausten $f \colon X \to Y$ joukko.

$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \{u : \exists \alpha \in A, \text{ jolle } u \in U_\alpha\}$ on joukkojen U_α yhdiste.

$\bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha = \{u : u \in U_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in A\}$ on joukkojen U_α leikkaus.

$\bigsqcup_{i\in I} A_i$ on joukkojen A_i erillinen yhdiste.

$A \subsetneq B$ joukko A on joukon B aito osajoukko: $A \subset B$ ja $A \neq B$.

$\mathrm{M}_n(R)$ on R-kertoimisten matriisien rengas.

Jos C on matriisi, niin C_{lm} on matriisin C kerroin, joka on rivillä l ja sarakkeessa m.

$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ on $n \times n$-diagonaalimatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat $a_1, a_2, \dots, a_n$.

$I_n = \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1)$.

$\mathbb{R}_+ =]0, \infty[$.

$\log \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ on luonnollinen logaritmi.

${}^{\top}A$ on matriisin A transpoosi.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ on binomikerroin.

$(x \mid y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ on vektorien $x, y \in \mathbb{R}^n$ standardisisätulo.

Jokaisen luvun lopussa on kokoelma harjoitustehtäviä. Osaan tehtävistä on alaviitteessä numeroitu vihje.

Uusien käsitteiden *määritelmät* on laatikoitu näin. Niitä ei ole numeroitu.

Tällaisessa laatikossa on jokin huomautus tai sopimus, joka on tärkeä huomata.

Osa I

Laskutoimituksista

Luku 1

Laskutoimitukset

Tässä luvussa määrittelemme useita keskeisiä käsitteitä, joita tarvitaan kursseilla RENKAAT JA KUNNAT ja RYHMÄT. Tutustumme laskutoimituksiin ja homomorfismeihin, jotka ovat laskutoimitusten kanssa hyvin käyttäytyviä kuvauksia laskutoimituksella varustettujen joukkojen välillä.

1.1 Laskutoimitus

Olkoon A epätyhjä joukko. Kuvaus $*\colon A \times A \to A$ on *joukon A laskutoimitus* tai *laskutoimitus joukossa A*.

Pari $(A, *)$ on *laskutoimituksella varustettu joukko* eli *magma*.

Joukon A laskutoimituksen $*$ tulosta merkitään yleensä $a * a' = *(a, a')$, kun $a, a' \in A$.

Laskutoimitus on siis sääntö, joka liittää joukon A alkioiden a ja a' muodostamaan järjestettyyn pariin (a, a') alkion $a * a' \in A$.

Esimerkki 1.1. (a) Luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$, kokonaislukujen $\mathbb{Z}$, rationaalilukujen $\mathbb{Q}$ ja reaalilukujen $\mathbb{R}$ yhteen- ja kertolasku ovat laskutoimituksia:

$$(m, n) \overset{+}{\mapsto} m + n \quad (m, n) \overset{\cdot}{\mapsto} m \cdot n = mn\,.$$

Näiden laskutoimitusten ominaisuudet oletetaan tällä kurssilla tunnetuiksi.

(b) Lineaarialgebran kursseilta tuttu vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien yhteenlasku on laskutoimitus:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)\,.$$

(c) Olkoon $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ reaalisten $n \times n$–matriisien joukko. Lineaarialgebran kursseilla määritellään kaksi laskutoimitusta joukossa $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Matriisien yhteenlasku määritellään asettamalla

$$(A + B)_{ij} = (A_{ij} + B_{ij})$$

kaikilla $1 \leq i, j \leq n$. Matriisien kertolasku määritellään asettamalla

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

kaikilla $1 \leq i, j \leq n$. Erityisesti dimensiossa 2 saadaan laskutoimitukset

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} .$$

Seuraava määritelmä yleistää Esimerkin 1.1(b).

Olkoot $(X_1, *_1), (X_2, *_2), \ldots, (X_n, *_n)$ laskutoimituksella varustettuja joukkoja. Tulojoukon $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ laskutoimitus $*$, joka määritellään asettamalla kaikille $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) * (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2, \ldots, x_n *_n y_n) ,$$

on laskutoimitusten $*_1, *_2, \ldots, *_n$ *tulolaskutoimitus*.

Usein laskutoimitukselle ei käytetä mitään erityistä merkkiä vaan laskutoimitusta merkitään kirjoittamalla laskutoimituksella varustetun joukon alkioista muodostettuja *sanoja* kuten kokonais-, rationaali- ja reaalilukujen kertolaskussa on tapana: $a \cdot b = ab$.

Edellä tarkastellut esimerkit liittyvät kaikki tavanomaiseen *luvuilla laskemiseen*. Laskutoimituksen käsite on kuitenkin laajempi, kuten seuraavista esimerkeistä näemme.

Joukon X osajoukot muodostavat *potenssijoukon*

$$\mathscr{P}(X) = \{A : A \subset X\} .$$

Joukkojen leikkaus $(A, B) \mapsto A \cap B$ ja yhdiste $(A, B) \mapsto A \cup B$ ovat laskutoimituksia potenssijoukossa $\mathscr{P}(X)$.

Laskutoimituksella varustetun äärellisen joukon $(X, *)$ *laskutaulu* on joukon X alkioilla indeksoitu taulukko, jossa paikalla (g, h), siis rivillä g ja sarakkeessa h on alkio gh.

Esimerkki 1.2. Joukon $\{0, 1\}$ potenssijoukon $\mathscr{P}(\{0, 1\}) = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\big\}$ laskutoimitusten $\cap$ ja $\cup$ laskutaulut ovat

$\cap$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\{0,1\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$

ja

$\cup$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$

.

Esimerkki 1.3. (a) Yhden alkion muodostamassa joukossa[1] $\{a\}$ on täsmälleen yksi laskutoimitus: Joukossa $\{a\} \times \{a\}$ on yksi alkio (a, a). Jos $*$ on laskutoimitus joukossa $\{a\}$, niin laskun $a * a$ ainoa mahdollinen arvo on joukon $\{a\}$ ainoa alkio a.

(b) Kahden alkion muodostamassa joukossa $X = \{a, b\}$ on $4^2 = 16$ eri laskutoimitusta: Joukossa

$$X \times X = \big\{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\big\}$$

on neljä alkiota ja jokaisella alkiolla on kaksi mahdollista arvoa a tai b. Seuraavat laskutaulut näyttävät viisi eri laskutoimitusta:

$*_1$	a	b
a	a	a
b	a	a

$*_2$	a	b
a	b	b
b	b	b

$*_3$	a	b
a	a	a
b	b	b

$\cdot$	a	b
a	a	a
b	a	b

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

.

1.2 Indusoitu laskutoimitus

Joissain tilanteissa laskutoimituksella varustetulla joukolla $(A, *)$ on osajoukkoja $B \subset A$, joihin $*$ määrää laskutoimituksen. Tutustumme tällaisiin tapauksiin esimerkiksi luvuissa 3.3 ja 9.1.

Olkoon $(A, *)$ laskutoimituksella varustettu joukko. Jos $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, ja kaikille $b, b' \in B$ pätee $b * b' \in B$, niin B on laskutoimituksella varustetun joukon $(A, *)$ *vakaa* osajoukko. Laskutoimitus $*$ määrää *indusoidun laskutoimituksen* $*|_B$ vakaassa joukossa B, kun asetetaan

$$b *|_B b' = b * b' .$$

Esimerkki 1.4. (a) Jos $a, b \in \mathbb{Q} - \{0\}$, niin $ab \neq 0$. Siis $\mathbb{Q} - \{0\}$ on laskutoimituksella varustetun joukon $(\mathbb{Q}, \cdot)$ vakaa osajoukko ja rationaalilukujen kertolasku indusoi laskutoimituksen joukkoon $\mathbb{Q} - \{0\}$. Vastaavasti reaalilukujen kertolasku indusoi laskutoimituksen joukkoon $\mathbb{R} - \{0\}$. Näin saamme laskutoimituksella varustetut joukot

$$\mathbb{Q}^\times = (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$$

ja

$$\mathbb{R}^\times = (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot) .$$

Rationaali- tai reaalilukujen yhteenlasku ei indusoi laskutoimitusta joukkoon $\mathbb{Q} - \{0\}$ tai $\mathbb{R} - \{0\}$, koska esimerkiksi $-1, 1 \in \mathbb{Q} - \{0\}$, mutta $-1 + 1 = 0 \notin \mathbb{Q} - \{0\}$.

(b) Olkoon

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \right\} .$$

Tällöin kaikille $A, B \in P$ pätee $A + B \in P$ ja $AB \in P$, joten matriisien yhteenlasku ja kertolasku indusoivat kaksi laskutoimitusta joukossa $P \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Yleensä indusoidulle laskutoimitukselle käytetään samaa merkintää kuin laskutoimitukselle, joka indusoi sen: $*|_B = *$.

[1] Yhden alkion muodostamaa joukkoa voi kutsua *yksiöksi*.

1.3 Homomorfismi

Kahden laskutoimituksella varustetun joukon väliset kuvaukset, jotka sopivat laskutoimitusten kanssa hyvin yhteen, ovat algebrassa keskeisessä osassa:

Olkoot $(E, *)$ ja $(E', \circledast)$ laskutoimituksella varustettuja joukkoja.
Kuvaus $h\colon (E, *) \to (E', \circledast)$ on *homomorfismi*, jos kaikille $a, b \in E$ pätee

$$h(a * b) = h(a) \circledast h(b)\,.$$

Bijektiivinen homomorfismi on *isomorfismi*.
Isomorfismi laskutoimituksella varustetulta joukolta E itselleen on *automorfismi*.
Laskutoimituksella varustetut joukot $(E, *)$ ja $(E', \circledast)$ ovat *isomorfisia (keskenään)*, jos on isomorfismi $h\colon (E, *) \to (E', \circledast)$.

Esimerkki 1.5. (a) Olkoon $n \geq 2$. Lineaarialgebrassa osoitettiin, että kaikille $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ pätee

$$\det(AB) = \det A \det B\,.$$

Siis kuvaus $\det\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, \cdot)$ on homomorfismi.
(b) Yhteenlaskulla varustetut joukot $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), +)$ ja $(\mathbb{R}^{n^2}, +)$ ovat selvästi isomorfisia.
(c) Kuvaus $h\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \cdot)$,

$$h(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on homomorfismi:

$$h(n+m) = \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = h(n)h(m).$$

Isomorfiset laskutoimituksella varustetut joukot ovat algebrallisilta ominaisuuksiltaan samanlaiset vaikka joukot ja laskutoimitukset voivat "ulkoisesti" olla hyvinkin erilaisia, kuten Esimerkin 1.5 avulla huomaamme.

Esimerkki 1.6. Reaalilukujen kertolasku indusoi laskutoimituksen positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ =]0, \infty[$. Eksponenttikuvaus $\exp\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $\exp(x) = e^x$, on homomorfismi: Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee

$$\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\exp(y)\,.$$

Eksponenttifunktio on tunnetusti bijektio, joten se on isomorfismi.

Eksponenttifunktion käänteisfunktio $\log\colon (\mathbb{R}_+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ on myös isomorfismi: Käänteiskuvauksena se on bijektio ja kaikille $x, y \in \mathbb{R}_+$ pätee

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

Seuraavan tuloksen jälkimmäinen kohta yleistää Esimerkin 1.6 eksponenttifunktiota ja logaritmia koskevan havainnon kaikille isomorfismeille.

Propositio 1.7. *(1) Homomorfismien yhdistetty kuvaus on homomorfismi.*
(2) Isomorfismin käänteiskuvaus on isomorfismi.

Todistus. (1) Harjoitustehtävä 1.4.
(2) Olkoon $\phi\colon (A,*) \to (B,\circledast)$ isomorfismi. Olkoot $b_1, b_2 \in B$. Koska ϕ on bijektio, pätee

$$b_1 \circledast b_2 = \phi\big(\phi^{-1}(b_1)\big) \circledast \phi\big(\phi^{-1}(b_2)\big)\,.$$

Koska ϕ on homomorfismi, saamme

$$\phi\big(\phi^{-1}(b_1)\big) \circledast \phi\big(\phi^{-1}(b_2)\big) = \phi\big(\phi^{-1}(b_1) * \phi^{-1}(b_2)\big)\,.$$

Yhdistämällä nämä kaksi yhtälöä saamme

$$b_1 \circledast b_2 = \phi\big(\phi^{-1}(b_1) * \phi^{-1}(b_2)\big)\,,$$

mistä seuraa

$$\phi^{-1}(b_1 \circledast b_2) = \phi^{-1}(b_1) * \phi^{-1}(b_2)\,,$$

koska ϕ on bijektio. Siis ϕ^{-1} on homomorfismi. □

Tässä luvussa esitellyn sanaston lisäksi käytetään melko usein seuraavia nimityksiä:
Injektiivinen homomorfismi on *monomorfismi*.
Surjektiivinen homomorfismi on *epimorfismi*.
Näillä kursseilla käytämme näistä homomorfismityypeistä pääsääntöisesti nimityksiä injektiivinen ja surjektiivinen homomorfismi.

1.4 Assosiatiivisuus ja kommutatiivisuus

Laskutoimitusten suorittamisen järjestyksen kanssa on syytä olla huolellinen. Sulut kertovat, missä järjestyksessä operaatiot suoritetaan: Lausekkeessa $a * (b * c)$ muodostetaan ensin tulo $(b * c)$, joka kerrotaan vasemmalta alkiolla a kun taas lausekkeessa $(a * b) * c$ muodostetaan ensin tulo $(a * b)$, joka kerrotaan oikealta alkiolla c. Lausekkeet $a * (b * c)$ ja $(a * b) * c$ eivät välttämättä anna samaa tulosta.

Joukon A laskutoimitus $*$ on

(1) *assosiatiivinen* eli *liitännäinen*, jos $a * (b * c) = (a * b) * c$ kaikilla $a, b, c \in A$.

(2) *kommutatiivinen* eli *vaihdannainen*, jos $a * b = b * a$ kaikilla $a, b \in A$.

Sulkujen määrää lausekkeissa voi vähentää, jos laskutoimitus $*$ on assosiatiivinen: Koska sulkujen paikalla ei ole merkitystä lausekkeessa $a*(b*c) = (a*b)*c$, joten voimme käyttää merkintää

$$a * b * c = (a * b) * c = a * (b * c)$$

ilman vaaraa. Kaikki tavanomaiset laskutoimitukset eivät ole assosiatiivisia, kuten näemme Esimerkissä 1.8 ja Harjoitustehtävässä 1.20.

Esimerkki 1.8. (a) Luonnollisten lukujen, kokonais-, rationaali- ja reaalilukujen yhteen- ja kertolasku ovat kommutatiivisia ja assosiatiivisia

(1) $m+n=n+m$ ja $mn=nm$ kaikilla m,n ja

(2) $m+(n+l)=(m+n)+l$ ja $m(nl)=(mn)l$ kaikilla m,n,l.

(b) Kokonaislukujen vähennyslasku ei ole assosiatiivinen eikä kommutatiivinen:

$$1-(1-1)=1\neq -1=(1-1)-1$$

ja

$$1-0=1\neq -1=0-1.$$

(c) Lineaarialgebran kurssilla on osoitettu, että matriisien yhteen- ja kertolaskut ovat assosiatiivisia laskutoimituksia joukossa $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Matriisien yhteenlasku on myös kommutatiivinen mutta matriisien kertolasku joukossa $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ei ole kommutatiivinen, kun $n\geq 2$. Esimerkiksi

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

(d) Olkoon X joukko. Joukon $\mathscr{P}(X)$ laskutoimitukset $\cap$ ja $\cup$ ovat assosiatiivisia:

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

ja

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

kaikilla $A,B,C\in\mathscr{P}(X)$, ja kommutatiivisia:

$$A\cap B=B\cap A\quad\text{ja}\quad A\cup B=B\cup A$$

kaikilla $A,B\in\mathscr{P}(X)$.

Merkintöjä $+$ ja $\cdot$ käytetään yleisesti eri laskutoimituksille. Tulomerkintää kutsutaan usein *multiplikatiiviseksi* merkinnäksi ja summamerkintää *additiiviseksi* merkinnäksi.

Merkintää $+$ käytetään ainoastaan kommutatiiviselle laskutoimitukselle.

Seuraava tulos on hyödyllinen esimerkiksi luvussa 2 modulaariaritmetiikan ominaisuuksien perustelussa.

Propositio 1.9. *Olkoon $h\colon (E,*)\to(E',\circledast)$ surjektiivinen homomorfismi.*

(1) Jos $*$ on kommutatiivinen, niin $\circledast$ on kommutatiivinen.

(2) Jos $*$ on assosiatiivinen, niin $\circledast$ on assosiatiivinen.

Todistus. (1) Olkoot $a',b'\in E'$. Tällöin on $a,b\in E$, joille $h(a)=a'$ ja $h(b)=b'$. Siis

$$a'\circledast b'=h(a)\circledast h(b)=h(a*b)=h(b*a)=h(b)\circledast h(a)=b'\circledast a',$$

joten $\circledast$ on kommutatiivinen.
(2) Harjoitustehtävä 1.11. □

Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. Kaikkien joukosta A joukkoon B määriteltyjen kuvausten joukko on B^A.[a]

[a] Tämän merkinnän idea on se, että esimerkiksi $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{\{0,1\}} = \{f\colon \{1,2\} \to \mathbb{R}\}$. Samalla ajatuksella voidaan potenssijoukolle käyttää merkintää $2^X = \mathscr{P}(X)$, koska potenssijoukon alkio $A \in \mathscr{P}(X)$ voidaan samastaa karakteristisen funktion $\chi_A\colon A \to \{0,1\}$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$, kanssa.

Esimerkki 1.10. Olkoon $X \neq \emptyset$. Jos $f, g\colon X \to X$, niin $f \circ g\colon X \to X$. Siis kuvausten yhdistäminen $\circ$ on laskutoimitus joukossa $X^X = \{f\colon X \to X\}$.

Laskutoimitus $\circ$ on assosiatiivinen: Olkoot $f, g, h \in X^X$. Yhdistetyn kuvauksen määritelmän mukaan

$$\big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f\big((g \circ h)(x)\big) = f\big(g(h(x))\big)$$

kaikilla $x \in X$ ja

$$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f\big(g(h(x))\big)$$

kaikilla $x \in X$. Siis $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ kaikilla $f, g, h \in X^X$.

Laskutoimitus $\circ$ ei ole kommutatiivinen, jos joukossa X on ainakin kaksi alkiota. Olkoon esimerkiksi $X = \{0,1\}$ ja olkoot $\underline{0}, \underline{1} \in X^X$ vakiokuvaukset $\underline{0}(x) = 0$ ja $\underline{1}(x) = 1$ kaikilla $x \in X$. Tällöin $\underline{1} \circ \underline{0} = \underline{1} \neq \underline{0} = \underline{0} \circ \underline{1}$.

1.5 Neutraalialkio

Olkoon $A \neq \emptyset$ ja olkoon $*$ joukon A laskutoimitus.

Alkio $e \in A$ on laskutoimituksen $*$ *vasen neutraalialkio*, jos $e * g = g$ kaikilla $g \in A$.

Alkio $e \in A$ on laskutoimituksen $*$ *oikea neutraalialkio*, jos $g * e = g$ kaikilla $g \in A$.

Jos $e \in A$ on laskutoimituksen $*$ vasen ja oikea neutraalialkio, niin e on laskutoimituksen $*$ *neutraalialkio*.

Esimerkki 1.11. (a) Luku $0 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ on laskutoimituksella varustettujen joukkojen $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ ja $(\mathbb{R}, +)$ neutraalialkio. Luku $1 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ on laskutoimituksella varustettujen joukkojen $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ja $(\mathbb{R}, \cdot)$ neutraalialkio

(b) Olkoon $X \neq \emptyset$. Määritellään joukon $\mathscr{P}(X)$ laskutoimitus $-$ asettamalla

$$A - B = \{a \in A : a \notin B\}$$

kaikille $A, B \in \mathscr{P}(X)$. Tällöin jokaisella $A \in \mathscr{P}(X)$ pätee $A - \emptyset = A$, joten $\emptyset$ on laskutoimituksen $-$ oikea neutraalialkio. Kuitenkin $\emptyset - A = \emptyset$ kaikilla $A \in \mathscr{P}(X)$, joten $\emptyset$ ei ole laskutoimituksen $-$ vasen neutraalialkio. Vasenta neutraalialkiota ei ole, sillä kaikille $A \in \mathscr{P}(X)$ pätee $A - X = \emptyset \neq X$. Tällä laskutoimituksella ei siis ole neutraalialkiota.

Propositio 1.12. *Olkoon $(X, *)$ laskutoimituksella varustettu joukko. Jos $e \in X$ on laskutoimituksen $*$ vasen neutraalialkio ja $e' \in X$ on laskutoimituksen $*$ oikea neutraalialkio, niin $e = e'$. Erityisesti e on laskutoimituksen $*$ neutraalialkio.*

Todistus. Käyttämällä oletettuja ominaisuuksia saadaan $e = e * e' = e'$. Koska e siis toteuttaa ehdot $e * g = g$ ja $g * e = g$ kaikilla $g \in X$, niin e on neutraalialkio. □

Propositiosta 1.12 seuraa erityisesti, että laskutoimituksella varustetun joukon neutraalialkio on yksikäsitteinen:

Seuraus 1.13. *Olkoon $(X, *)$ laskutoimituksella varustettu joukko. Jos $e \in X$ on laskutoimituksen $*$ neutraalialkio ja $e' \in X$ on laskutoimituksen $*$ neutraalialkio, niin $e = e'$.* □

Jos laskutoimituksesta käytetään tulomerkintää, neutraalialkiolle käytetään usein merkintää 1 ja summamerkintää käytettäessä merkintää 0.

Propositio 1.14. *Olkoon $h\colon (E, *) \to (E', \circledast)$ surjektiivinen homomorfismi. Jos laskutoimituksella varustetussa joukossa E on neutraalialkio e, niin $h(e)$ on laskutoimituksella varustetun joukon E' neutraalialkio.*

Todistus. Olkoon $g' \in E'$. Tällöin $g' = h(g)$ jollain $g \in E$ ja pätee

$$h(e) \circledast g' = h(e) \circledast h(g) = h(e * g) = h(g) = g'$$

ja

$$g' \circledast h(e) = h(g) \circledast h(e) = h(g * e) = h(g) = g',$$

joten $h(e)$ on neutraalialkio. □

Esimerkki 1.15. Kuvaus $h\colon (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{N}, \cdot)$, $h(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, on homomorfismi, koska kaikille $m, n \in \mathbb{N}$ pätee

$$h(n + m) = 0 = 0\,0 = h(m)h(n).$$

Kuitenkaan neutraalialkio $0 \in (\mathbb{N}, +)$ ei kuvaudu neutraalialkioksi $1 \in (\mathbb{N}, \cdot)$. Tämä esimerkki osoittaa, että neutraalialkio ei välttämättä kuvaudu neutraalialkiolle, jos homomorfismi ei ole surjektiivinen

1.6 Käänteisalkio

Olkoon $A \neq \emptyset$ ja olkoon $*$ joukon A laskutoimitus, jonka neutraalialkio on e.
Alkio $\bar{x} \in A$ on alkion $x \in A$ *vasen käänteisalkio*, jos $\bar{x} * x = e$.
Alkio $\bar{x} \in A$ on alkion $x \in A$ *oikea käänteisalkio*, jos $x * \bar{x} = e$.
Jos $\bar{x}$ on alkion x vasen ja oikea käänteisalkio, niin se on alkion x *käänteisalkio*.

Esimerkki 1.16. Useimmilla luonnollisilla luvuilla ei ole käänteisalkiota laskutoimituksella varustetuissa joukoissa $(\mathbb{N}, +)$ ja $(\mathbb{N}, \cdot)$. Sen sijaan jokaisella kokonais-, rationaali- ja reaaliluvulla x on vastaluku $-x$, joka on luvun x käänteisalkio laskutoimituksella varustetuissa joukoissa $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ ja $(\mathbb{R}, +)$.

Luvulla 0 ei ole käänteisalkiota laskutoimituksella varustetuissa joukoissa $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ja $(\mathbb{R}, \cdot)$: $0\,x = x\,0 = 0 \neq 1$ kaikilla luvuilla x. Kaikilla nollasta poikkeavilla rationaali- ja reaaliluvuilla x sen sijaan on käänteisluku $x^{-1} = 1/x$, esimerkiksi rationaaliluvulle $a/b \neq 0$ pätee $(a/b)^{-1} = b/a$.

Laskutoimituksella varustetun joukon $(X, *)$ alkion $x \in X$ käänteisalkiota merkitään yleensä x^{-1}.

Summamerkintää käytettäessä käytetään käänteisalkiolle merkintää $-x$. Käänteisalkiota kutsutaan tällöin *vasta-alkioksi* tai *vastaluvuksi*.

Esimerkki 1.17. (a) Olkoon $X \neq \emptyset$. Identtinen kuvaus $\mathrm{id} = \mathrm{id}_X$ on laskutoimituksella varustetun joukon $(X^X, \circ)$ neutraalialkio:

$$\mathrm{id} \circ f = f = f \circ \mathrm{id}$$

kaikilla $f \in X^X$. Jos $f \in X^X$ on bijektio, sen käänteiskuvaus f^{-1} on kuvauksen f käänteisalkio: $f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f$. Muilla joukon X^X alkioilla ei ole käänteisalkiota.
(b) Olkoot $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ kuvaukset, jotka määritellään asettamalla

$$f(n) = \begin{cases} 0, \text{ kun } n = 0 \\ n - 1, \text{ kun } n \neq 0 \end{cases}$$

ja $g(n) = n+1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kuvaukset f ja g eivät ole bijektioita, joten kummallakaan ei ole käänteisalkiota. Kuitenkin pätee $f \circ g = \mathrm{id}$, joten f on kuvauksen g vasen käänteisalkio ja vastaavasti g on kuvauksen f oikea käänteisalkio.

Propositio 1.18. *Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon $*$ joukon X assosiatiivinen laskutoimitus. Jos alkiolla $g \in X$ on käänteisalkio, se on yksikäsitteinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.15. □

1.7 Kahdella laskutoimituksella varustetut joukot

Edellä olemme jo nähneet, että samassa joukossa voi määritellä useita eri laskutoimituksia. Kokonais-, rationaali- ja reaalilukujen aritmetiikkaa[2] yleistettäessä tarkastellaan kahta samassa joukossa määriteltyä laskutoimitusta.

Olkoot $*$ ja $\oplus$ joukon A laskutoimituksia. Kolmikko $(A, *, \oplus)$ on *kahdella laskutoimituksella varustettu joukko*.

Kahdella laskutoimituksella varustetun joukon $(A, *, \oplus)$ eri laskutoimituksilla on usein eri neutraalialkiot ja alkion a käänteisalkioita käsiteltäessä on syytä tehdä selväksi tarkoitetaanko alkiota $b \in A$, jolle $a * b = b * a$ on laskutoimituksen $*$ neutraalialkio vai alkiota $c \in A$, jolle $a \oplus b = b \oplus a$ on laskutoimituksen $\oplus$ neutraalialkio. Esimerkiksi renkaan $(R, +, \cdot)$ yhteydessä on luontevaa käyttää nimityksiä *käänteisalkio yhteenlaskun suhteen* ja *käänteisalkio kertolaskun suhteen* ja käyttää niille järjestelmällisesti luvussa 1.6 esiteltyjä merkintöjä $-x$ ja x^{-1}.

Kahdella laskutoimituksella varustettu joukko on niin yleinen käsite, että yhtenäisen teorian esittämiseksi on hyvä edellyttää, että laskutoimitukset sopivat jollain tavalla yhteen keskenään.

[2] Aritmetiikalla tarkoitetaan laskutoimituksilla $+$ ja $\cdot$ ja niistä johdettavilla käsitteillä kuten neliöjuuri, kuutiojuuri, eksponenttifunktio tehtäviä operaatioita.

Olkoon $(A, *, \oplus)$ kahdella laskutoimituksella varustettu joukko. Laskutoimitus $*$ on *distributiivinen laskutoimituksen $\oplus$ suhteen*, jos

$$\begin{aligned} a * (b \oplus c) &= (a * b) \oplus (a * c) \quad \text{ja} \\ (b \oplus c) * a &= (b * a) \oplus (c * a) \end{aligned} \tag{1.1}$$

kaikilla $a, b, c \in A$.

Distributiivisuuden määritteleviä yhtälöitä (1.1) sanotaan *osittelulaeiksi*.

Esimerkki 1.19. (a) Tunnetusti kaikille luonnollisille luvuille, kokonais-, rationaali- ja reaaliluvuille a, b, c pätee

$$(a + b)c = ac + bc = ca + cb = c(a + b)\,,$$

joten kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen. Yhteenlasku ei ole distributiivinen kertolaskun suhteen. Esimerkiksi $1 \cdot 1 + 1 = 2 \neq 4 = (1 + 1)(1 + 1)$.

(b) Olkoon $n \geq 2$. Lineaarialgebrassa on osoitettu, että kaikille matriiseille $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ pätee

$$(A + B)C = AB + AC$$

ja

$$C(A + B) = CA + CB\,.$$

Siis matriisien kertolasku on yhteenlaskun suhteen distributiivinen.

Olkoot $(A, \oplus, \otimes)$ ja $(B, \boxplus, \boxtimes)$ kahdella laskutoimituksella varustettuja joukkoja. Kuvaus $j\colon (A, \oplus, \otimes) \to (B, \boxplus, \boxtimes)$ on *(kahdella laskutoimituksella varustettujen joukkojen) homomorfismi*, jos $j\colon (A, \oplus) \to (B, \boxplus)$ on homomorfismi ja $j\colon (A, \otimes) \to (B, \boxtimes)$ on homomorfismi.

Esimerkki 1.20. Kuvaus $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $i(x) = x$, on injektiivinen kahdella laskutoimituksella varustettujen joukkojen homomorfismi.

1.8 Kompleksiluvut

Kompleksiluvut $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ on kahdella laskutoimituksella varustettu joukko, jossa kaikille $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ asetetaan

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

ja

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Kompleksiluku $i = (0, 1)$ on *imaginaariyksikkö*.

Lemma 1.21. *(1) Kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku ovat assosiatiivisia ja kommutatiivisia. Yhteenlaskun neutraalialkio on* $0 = (0,0)$ *ja kertolaskun neutraalialkio on* $1 = (1,0)$*. Kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen*

(2) Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$*. Tällöin* $zw = 0$*, jos ja vain jos* $z = 0$ *tai* $w = 0$*.*

Todistus. Harjoitustehtävät 1.21 ja 1.22. □

Lemman 1.21(2) nojalla kertolasku indusoi laskutoimituksen joukkoon $\mathbb{C} - \{0\}$ ja saamme laskutoimituksella varustetun joukon

$$\mathbb{C}^\times = (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot) \,.$$

Lemma 1.22. *Olkoon* $j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*,* $j(x) = (x, 0)$*. Tällöin* j *on injektiivinen homomorfismi.*

Todistus. Injektiivisyys on selvää. Kaikille $a, c \in \mathbb{R}$ pätee

$$j(a) + j(c) = (a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) = j(a + c)$$

ja

$$j(a)j(c) = (a, 0)(c, 0) = (ac, 0) = j(ac) \,,$$

joten j on kahdella laskutoimituksella varustettujen joukkojen homomorfismi. □

Lemman 1.22 nojalla voimme samastaa kompleksiluvun $(a, 0)$ ja reaaliluvun a. Tällöin kuvaus j on inkluusiokuvaus.

Jokainen kompleksiluku voidaan esittää yksikäsitteisesti summana

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + i\, b \,,$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$. Näillä merkinnöillä kompleksilukujen laskutoimitukset ovat

$$\begin{aligned}(a + i\, b) + (c + i\, d) &= (a + c) + i(b + d),\\ (a + i\, b)(c + i\, d) &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Erityisesti kaikille reaaliluvuille $a \in \mathbb{R}$ ja kompleksiluvuille $c + id$ pätee

$$a(c + i\, d) = (a + i\, 0)(c + i\, d) = ac + i\, ad \,.$$

Esimerkki 1.23. (a) $i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1$.
(b) $(1 + i)^2 = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + i(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 2\, i$.

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Kompleksiluvun $z = a + i\, b$ *reaaliosa* on $\mathrm{Re}\,(z) = a$, sen *imaginaariosa* on $\mathrm{Im}(z) = b$ ja sen *(kompleksi)konjugaatti* eli *liittoluku* on $\bar{z} = a - i\, b$.
Kompleksiluvun $z = a + i\, b$ *(algebrallinen) normi* on

$$\mathbf{n}(z) = z\bar{z} = \mathrm{Re}\,(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \geq 0$$

ja sen *moduli* on

$$|z| = \sqrt{\mathbf{n}(z)} = \|(a, b)\|.$$

Lemma 1.24. *Osoita, että kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ pätee*

(1) $\bar{\bar{z}} = z$,

(2) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$,

(3) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ *ja*

(4) $\mathbf{n}(\bar{z}) = \mathbf{n}(z)$.

Todistus. Harjoitustehtävä 1.23. □

Lemma 1.25. *Jokaisella kompleksiluvulla z on vastaluku $-z = -1 \cdot z$ ja jokaisella nollasta poikkeavalla kompleksiluvulla z on käänteisluku*

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{\mathbf{n}(z)}.$$

Todistus. Olkoon $z \in \mathbb{C}$. Tällöin distributiivisuuden, sen, että $1 + (-1) = 0$ reaaliluvuilla ja Lemman 1.21 nojalla

$$z + (-1)z = (1-1)z = 0\, z = 0\,.$$

Ensimmäinen väite seuraa tästä, koska yhteenlasku on kommutatiivinen.

Olkoon $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Tällöin

$$z\,\frac{\bar{z}}{\mathbf{n}(z)} = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} = 1\,.$$

Toinen väite seuraa tästä, koska kertolasku on kommutatiivinen. □

Jos $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, niin sen moduli on sama kuin sen itseisarvo reaalilukuna:

$$|x + 0\,i| = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Propositio 1.26. *(1) Kompleksikonjugointi $\bar{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on kahdella laskutoimituksella varustetun joukon $\mathbb{C}$ automorfismi.*

(2) Kompleksikonjugointi $\bar{\cdot}\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ on automorfismi.

(3) Kuvaukset $\mathbf{n}, |\cdot|\colon (\mathbb{C}, \cdot) \to \big([0,\infty[, \cdot\big)$ ja $\mathbf{n}, |\cdot|\colon \mathbb{C}^\times \to \big(]0,\infty[, \cdot\big)$ ovat surjektiivisia homomorfismeja.

Todistus. (1) Seuraa Harjoitustehtävästä 1.23.

(2) Kompleksikonjugointi $\bar{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on bijektio kohdan (1) nojalla ja $\bar{0} = 0$, joten kompleksikonjugoinnin rajoittuma joukkoon $\mathbb{C} - \{0\}$ on bijektio. Siis väite seuraa kohdasta (1).

(3) Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$. Normin määritelmän, kompleksikonjugoinnin homomorfisuuden ja kompleksilukujen kertolaskun kommutatiivisuuden ja assosiatiivisuuden nojalla saadaan

$$\mathbf{n}(zw) = (zw)\overline{(zw)} = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = \mathbf{n}(z)\mathbf{n}(w)\,,$$

mistä väite seuraa. Vastaava väite modulille seuraa ottamalla neliöjuuri.

Normin ja modulin surjektiivisuus seuraa siitä, että reaaliluvun moduli kompleksilukuna on sama kuin sen itseisarvo. □

1.9 Potenssit ja monikerrat

Tässä luvussa otamme käyttöön hyödyllisen määritelmän, joka tiivistää merkintöjä.

Olkoon $(A, \cdot)$ assosiatiivisella laskutoimituksella varustettu joukko. Olkoon $a^1 = a$, ja kaikille $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ olkoon $a^{n+1} = a^n a$. Jos laskutoimituksella varustetussa joukossa $(A, \cdot)$ on neutraalialkio e, olkoon $a^0 = e$ ja jos alkiolla $a \in A$ on käänteisalkio a^{-1}, olkoon $a^n = (a^{-1})^{-n}$ jokaiselle $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$.

Näin määritelty alkio $a^k \in A$ on alkion a *k:s potenssi*, kun $k \in \mathbb{Z}$.

Jos laskutoimitukselle käytetään yhteenlaskumerkkiä, puhutaan potenssien sijaan monikerroista. Seuraava määritelmä on itse asiassa sama kuin potenssin määritelmä, ero on merkinnässä.

Olkoon $(A, +)$ assosiatiivisella laskutoimituksella varustettu joukko. Olkoon[a] $1\,a = a$ ja olkoon $(n+1)a = na + a$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Jos laskutoimituksella varustetussa joukossa $(A, +)$ on neutraalialkio 0, olkoon $0\ a = 0 \in A$ ja jos alkiolla $a \in A$ on käänteisalkio $-a$ laskutoimituksen $+$ suhteen, olkoon $(-1)\,a = -a$ ja olkoon $n\,a = (-n)(-a)$ jokaiselle $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$.

Näin määritelty alkio $k\,a \in A$ on alkion a *k:s monikerta.*

[a] Huomaa, että tässä $1 \in \mathbb{Z}$.

Tavanomaiset laskulait pätevät potensseille ja monikerroille:

Lemma 1.27. *Olkoon $(A, \cdot)$ assosiatiivisella laskutoimituksella varustettu joukko, jolla on neutraalialkio. Tällöin*

(1) $a^n a^m = a^{n+m}$ kaikilla $a \in A$, $n, m \in \mathbb{N}$.

(2) $(a^n)^m = a^{nm}$ kaikilla $a \in A$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Jos alkiolla a on käänteisalkio, niin kohtien (1) ja (2) väitteet pätevät kaikille kokonaisluvuille $m, n \in \mathbb{Z}$.
Olkoon $(H, +)$ kommutatiivisella laskutoimituksella varustettu joukko, jolla on neutraalialkio. Tällöin

(3) $na + ma = (n+m)a$ kaikilla $a \in H$, $n, m \in \mathbb{N}$.

(4) $n(ma) = (nm)a$ kaikilla $a \in H$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Jos alkiolla a on käänteisalkio, niin kohtien (3) ja (4) väitteet pätevät kaikille kokonaisluvuille $m, n \in \mathbb{Z}$.

Todistus. (1) Väite on selvä, jos $m = 0$ tai $n = 0$. Osoitetaan väite induktiolla positiivisille eksponenteille m ja n. Olkoon $a \in A$. Jos $1 \leq n, m$ ja $n + m = 2$, niin $n = m = 1$. Tällöin väite pätee, sillä se on toisen potenssin määritelmä. Oletetaan, että $a^n a^m = a^{n+m}$, kun $n + m \leq N$. Oletetaan, että $n + m = N + 1$ ja $n \geq 2$. Tällöin potenssin määritelmän, assosiatiivisuuden ja induktio-oletuksen nojalla

$$a^m a^n = a^m(a^{n-1}a) = (a^m a^{n-1})a = a^{m+n-1}a = a^{m+n}\,,$$

joten väite seuraa induktioperiaatteesta. Tapaus $n, m \leq -1$ käsitellään samaan tapaan.

Olkoon $m \geq 1$ ja olkoon $n \leq -1$. Tällöin

$$a^m a^n = a^m (a^{-1})^{-n} = a^{m-1} a a^{-1} (a^{-1})^{-n-1}\,.$$

Toistamalla tätä $\min(m, -n)$ kertaa päädytään yhtälöön $a^m a^n = a^{m+n}$, kuten haluttiin.

(2) Olkoon $n \in \mathbb{Z}$. Olkoon $m \geq 1$. Väite pätee määritelmän nojalla, jos $m = 1$. Oletetaan, että $(a^n)^M = a^{nM}$. Tällöin potenssin määritelmän, induktio-oletuksen ja kohdan (1) nojalla

$$(a^n)^{M+1} = (a^n)^M a^n = a^{nM} a^n = a^{nM+n} = a^{n(M+1)}\,,$$

joten väite seuraa induktioperiaatteesta.

Tarkastellaan sitten tapauksia, joissa $m \leq -1$. Kohdan (1) nojalla $a^{-n} a^n = a^0 = 1$. Siis $a^{-n} = (a^n)^{-1}$. Oletetaan, että $M \leq -1$ ja $(a^n)^M = a^{nM}$. Tällöin potenssin määritelmän, induktio-oletuksen, tapauksen $m = -1$

$$(a^n)^{M-1} = (a^n)^M (a^n)^{-1} = (a^{nM}) a^{-n} = a^{nM-n} = a^{n(M-1)}\,,$$

joten väite seuraa induktioperiaatteesta.

Väitteet (3) ja (4) seuraavat kohdista (1) ja (2). □

Harjoitustehtäviä

1.1. Olkoon

$$\Gamma = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$

Osoita, että matriisien kertolasku indusoi laskutoimituksen joukossa Γ. Miten matriisien yhteenlasku käyttäytyy?

1.2. Olkoon $f\colon (A, *) \to (C, \circledast)$ homomorfismi. Osoita:

(a) Jos $B \subset A$ on vakaa,[3] niin $f(B) \subset C$ on vakaa.

(b) Jos $B \subset C$ on vakaa ja $f^{-1}(B)$ ei ole tyhjä joukko, niin $f^{-1}(B) \subset A$ on vakaa.

1.3. Osoita, että

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

on matriisien kertolaskulla varustetun joukon $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ vakaa osajoukko.

Osoita, että laskutoimituksella varustettu joukko $(\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$ on isomorfinen matriisien kertolaskulla varustetun joukon $(A, \cdot)$ kanssa.

1.4. Olkoot $f\colon (A, *) \to (B, \circledast)$ ja $g\colon (B, \circledast) \to (C, \cdot)$ laskutoimituksella varustettujen joukkojen homomorfismeja. Osoita, että $g \circ f$ on homomorfismi.

1.5. Olkoon $(A, *)$ laskutoimituksella varustettu joukko ja olkoon $\mathrm{Hom}(A, A)$ kaikkien homomorfismien $\phi\colon (A, *) \to (A, *)$ joukko. Osoita, että homomorfismien yhdistäminen on laskutoimitus joukossa $\mathrm{Hom}(A, A)$.

1.6. Ovatko laskutoimituksella varustetut joukot $(\mathscr{P}(\{0,1\}), \cap)$ ja $(\mathscr{P}(\{0,1\}), \cup)$ isomorfisia?

[3] Katso määritelmä luvusta 1.2.

1.7. Olkoon X joukko, jossa on ainakin 2 alkiota. Onko joukon $\mathscr{P}(X)$ laskutoimitus $-$ assosiatiivinen?[4]

1.8. Olkoon $*$ kahden alkion joukon $X = \{a, b\}$ laskutoimitus, jonka laskutaulu on

$*$	a	b
a	b	b
b	a	a

.

Onko laskutoimitus $*$ kommutatiivinen? Onko se assosiatiivinen?

1.9. Olkoon $*$ kolmen alkion joukon $X = \{a, b, c\}$ laskutoimitus, jonka laskutaulu on

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

.

Onko laskutoimitus $*$ kommutatiivinen? Onko laskutoimituksella $*$ neutraalialkio? Onko laskutoimituksella varustetun joukon $(X, *)$ jokaisella alkiolla käänteisalkio? Onko käänteisalkio yksikäsitteinen? Onko laskutoimitus $*$ assosiatiivinen?

1.10. Kivi-paperi-sakset –pelissä kaksi pelaajaa näyttää samanaikaisesti kädellään yhden symboleista kivi, paperi tai sakset. Kivi voittaa sakset, sakset voittaa paperin ja paperi voittaa kiven. Jos molemmat pelaajat näyttävät saman symbolin, tämä symboli katsotaan voittajaksi. Pelin sääntö määrää laskutoimituksen kolmen alkion joukolla, jonka alkiot ovat kivi, paperi ja sakset: laskutoimituksen tulos on voittaja.

Muodosta kivi-paperi-sakset –pelin laskutaulu. Onko pelin laskutoimitus assosiatiivinen?

1.11. Todista Propositio 1.9(2).

1.12. Olkoon $*$ rationaalilukujen laskutoimitus, joka määritellään asettamalla

$$a * b = \frac{a + b}{2}.$$

Onko laskutoimitus $*$ assosiatiivinen? Onko laskutoimituksella $*$ neutraalialkio?

1.13. Olkoon $*$ positiivisten reaalilukujen joukon $\mathbb{R}_+$ laskutoimitus, joka määritellään asettamalla

$$a * b = \sqrt{ab}.$$

Onko laskutoimitus $*$ assosiatiivinen? Onko laskutoimituksella $*$ neutraalialkio?

1.14. Olkoon X joukko. Onko potenssijoukon $\mathscr{P}(X)$ laskutoimituksilla $\cap$ ja $\cup$ neutraalialkiot? Onko jokaisella $A \in \mathscr{P}(X)$ käänteisalkiot laskutoimitusten $\cap$ ja $\cup$ suhteen?

1.15. Todista Propositio 1.18.

1.16. Keksi esimerkki laskutoimituksella varustetusta joukosta $(A, *)$ ja alkiosta $a \in A$, jolla on useita vasempia käänteisalkioita.

[4]Katso Esimerkki 1.11(b)

1.17. Varustetaan luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ laskutoimituksella $\vee$, joka määritellään asettamalla

$$a \vee b = \begin{cases} a, & \text{jos } a \geq b \\ b & \text{muuten.} \end{cases}$$

(a) Onko laskutoimitus $\vee$ assosiatiivinen?

(b) Onko laskutoimituksella $\vee$ neutraalialkio?

(c) Millä alkioilla $n \in (\mathbb{N}, \vee)$ on käänteisalkio?

1.18. Varustetaan reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ laskutoimituksella $*$, joka määritellään asettamalla

$$a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

kaikille $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Onko laskutoimitus $*$ assosiatiivinen?

(b) Onko laskutoimituksella $*$ neutraalialkio?

Olkoon $\psi\colon (\mathbb{R}, *) \to (\mathbb{R}, +)$ kuvaus, joka määritellään asettamalla $\psi(a) = a^2$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

(c) Onko kuvaus $\psi\colon (\mathbb{R}, *) \to (\mathbb{R}, +)$ homomorfismi?

1.19. Olkoon X joukko. Onko joukon $\mathscr{P}(X)$ laskutoimitus $\cap$ distributiivinen laskutoimituksen $\cup$ suhteen? Onko laskutoimitus $\cup$ distributiivinen laskutoimituksen $\cap$ suhteen?

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ *vektoritulo* eli *ristitulo* on laskutoimitus, joka määritellään asettamalla kaikille $a = (a_1, a_2, a_3)$ ja $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

$$a \times b = \Big(\det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Big).$$

1.20. Osoita, että

(a) $\times$ on *antikommutatiivinen*: $b \times a = -a \times b$ kaikille $a, b \in \mathbb{R}^3$.

(b) $\times$ on distributiivinen vektorien yhteenlaskun suhteen.

(c) $\times$ ei ole assosiatiivinen. [5]

1.21. Todista Lemma 1.21(1).

1.22. Todista Lemma 1.21(2).

1.23. Todista Lemma 1.24.

1.24. Määritellään Harjoitustehtävässä 1.8 käsitellylle laskutoimitukselle $*$ joukon X alkioiden positiiviset potenssit kuten luvussa1.9. Pätevätkö Lemman 1.27 laskusäännöt?

[5] Keksi sopiva esimerkki.

Luku 2

Tekijälaskutoimitus ja modulaariaritmetiikka

Tässä luvussa tutustumme ekvivalenssirelaatioon ja määrittelemme, mitä tarkoittaa, että ekvivalenssirelaatio on laskutoimituksen kanssa yhteensopiva. Jos joukossa on määritelty ekvivalenssirelaatio, sen avulla määritellään uusi joukko, jota kutsutaan tekijäjoukoksi. Jos alkuperäisessä joukossa on lisäksi ekvivalenssirelaation kanssa yhteensopiva laskutoimitus, saadaan tekijäjoukkoon määriteltyä laskutoimitus, jota sanotaan tekijälaskutoimitukseksi. Tämä konstruktio on tärkeä erityisesti luvussa 7 kurssilla RENKAAT JA KUNNAT ja luvussa12 kurssilla RYHMÄT. Tärkeänä esimerkkinä tutustumme kongruenssiin mod q kokonaislukujen joukossa ja sen avulla saataviin yhteen- ja kertolaskun tekijälaskutoimituksiin kongruenssiluokkien joukossa.

2.1 Ekvivalenssirelaatio

Olkoon A epätyhjä joukko. Joukon $A \times A$ osajoukko on *relaatio* joukossa A. Jos $\mathrm{R} \subset A \times A$ on relaatio, merkitään $a \,\mathrm{R}\, b$, jos ja vain jos $(a, b) \in \mathrm{R}$.

Joukon A relaatio R on

(1) *refleksiivinen*, jos $a \,\mathrm{R}\, a$ kaikilla $a \in A$,

(2) *symmetrinen*, jos $b \,\mathrm{R}\, a$ kaikilla $a, b \in A$, joille $a \,\mathrm{R}\, b$,

(3) *transitiivinen*, jos $a \,\mathrm{R}\, c$ aina kun $a \,\mathrm{R}\, b$ ja $b \,\mathrm{R}\, c$,

Jos relaatio on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, se on *ekvivalenssirelaatio*.

Jos R on ekvivalenssirelaatio joukossa A ja $a \,\mathrm{R}\, b$, alkiot a ja b ovat *ekvivalentteja*.

Ekvivalenssirelaation merkkinä käytetään usein merkkiä $\sim$.

Toinen tärkeä esimerkki relaatiosta on *osittainen järjestys* $\leq$, joka on refleksiivinen, transitiivinen ja *antisymmetrinen* (jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$) relaatio.

Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa A. Alkion $a \in A$ *ekvivalenssiluokka* on

$$[a] = \{b \in A : a \sim b\}.$$

Ekvivalenssirelaatiota $\sim$ vastaava joukon A *tekijäjoukko* on

$$A/\!\sim \;= \big\{[a] : a \in A\big\}.$$

Kuvaus $\pi = \pi_\sim \colon A \to A/\!\sim$, $\pi(a) = [a]$, on ekvivalenssirelaatiota $\sim$ vastaava *tekijäkuvaus* eli *luonnollinen kuvaus*.
Alkio $a \in A$ on ekvivalenssiluokkansa $[a]$ *edustaja*.

Lemma 2.1. *Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa A ja olkoot $a, b \in A$. Tällöin $[a] = [b]$ tai $[a] \cap [b] = \emptyset$.*

Todistus. Oletetaan, että $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Tällöin on $x \in [a] \cap [b]$ ja tälle alkiolle pätee $a \sim x$ ja $b \sim x$. Ekvivalenssirelaation symmetrisyyden nojalla $x \sim b$, joten transitiivisuuden nojalla $a \sim b$. Siis $b \in [a]$. Olkoon $y \in [b]$. Tällöin $b \sim y$, joten transitiivisuuden nojalla $a \sim y$. Siis $[b] \subset [a]$. Vastaavasti osoitetaan, että $[a] \subset [b]$. □

Olkoon I epätyhjä *indeksijoukko*. Olkoot A_i, $i \in I$, joukon A epätyhjiä osajoukkoja. Jos

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \tag{2.1}$$

ja kaikille $i \neq j$ pätee $A_i \cap A_j = \emptyset$, niin A on *erillinen yhdiste* joukoista A_i, $i \in I$. Merkitsemme joukkojen A_i, $i \in I$, erillistä yhdistettä

$$A = \bigsqcup_{i \in I} A_i \,.$$

Jos $A = \bigsqcup_{i \in I} A_i$, niin joukot A_i, $i \in I$ muodostavat joukon A *osituksen*.

Propositio 2.2. *Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa X. Ekvivalenssiluokat määräävät joukon X osituksen:*

$$X = \bigsqcup_{[a] \in X/\!\sim} [a] \,.$$

Todistus. Jos $x \in X$, niin $x \in [x]$, joten $X = \bigcup_{[a] \in X/\!\sim} [a]$. Yhdiste on erillinen Lemman 2.1 nojalla. □

Joukon A *osituksen* $A = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ *määräämä relaatio* R on relaatio, joka määritellään asettamalla $x \,\mathrm{R}\, y$, jos ja vain jos $x, y \in A_i$ jollain $i \in I$.

Propositio 2.3. *Joukon $X \neq \emptyset$ osituksen määräämä relaatio on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Olkoon R osituksen $A = \bigsqcup_{i\in I} A_i$ määräämä relaatio. Koska $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, niin jokaiselle $a \in A$ pätee $a \in A_i$ jollakin $i \in I$. Siis $a \,\mathrm{R}\, a$, joten R on refleksiivinen.

Olkoot $a, b \in A$ siten, että $a \,\mathrm{R}\, b$. Siis on $i \in I$, jolle $a, b \in A_i$. Tässä ehdossa alkioiden a ja b järjestys on merkityksetön, joten $b \,\mathrm{R}\, a$.

Olkoot $a, b, c \in A$ siten, että $a \,\mathrm{R}\, b$ ja $b \,\mathrm{R}\, c$. Siis on $i, j \in I$, joille $a, b \in A_i$ ja $b, c \in A_j$. Koska joukot A_k, $k \in I$ muodostavat joukon A osituksen, pätee joko $A_i = A_j$ tai $A_i \cap A_j = \emptyset$. Oletuksen mukaan $b \in A_i \cap A_j$, joten $A_i = A_j$ ja siis $a, c \in A_i$, joten $a \,\mathrm{R}\, c$. Siis relaatio R on transitiivinen. □

2.2 Kongruenssi

Olkoon $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Kokonaisluvut $a \in \mathbb{Z}$ ja $b \in \mathbb{Z}$ ovat *kongruentteja luvun m suhteen* tai *kongruentteja modulo m*, jos $m \mid (b - a)$. Tällöin merkitään $a \equiv b \bmod m$.

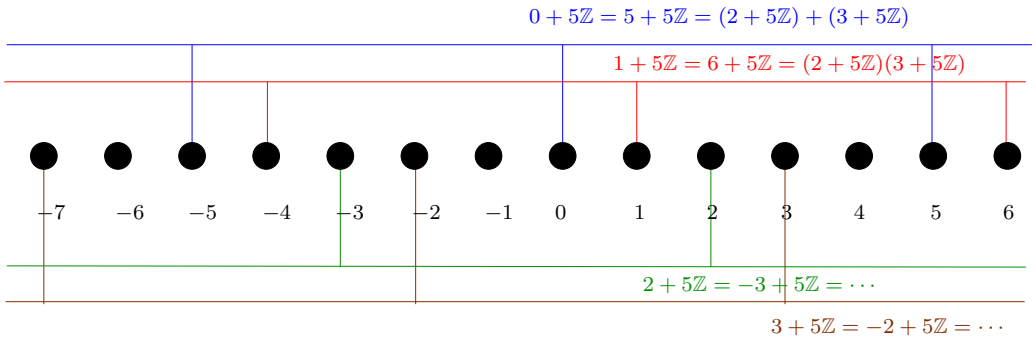
Luku m on kongruenssin *moduli*.

Relaatio $\equiv$ on *kongruenssi* mod m.

Jos $a \equiv b \bmod q$, niin $a - b = kq$ jollain $k \in \mathbb{Z}$, mikä voidaan kirjoittaa myös muodossa $a = b + kq$ jollain $k \in \mathbb{Z}$. Ottamalla käyttöön merkintä

$$r + q\mathbb{Z} = \{r + kq : k \in \mathbb{Z}\}$$

saadaan vielä yksi tapa: $a \equiv b \bmod q$, jos ja vain jos $a \in b + q\mathbb{Z}$.



Kuva 2.1 — Kongruenssiluokat modulo 5.

Lemma 2.4. *Olkoon $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Kongruenssi* mod q *on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Tarkastamme, että ekvivalenssirelaation määrittelevät ehdot ovat voimassa

(1) $a = a + 0\,q$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$,

(2) jos $b - a = kq$ jollain $k \in \mathbb{Z}$, niin $a - b = (-k)q$,

(3) jos $b - a = kq$ ja $c - b = nq$ joillain $k, n \in \mathbb{Z}$, niin $c - a = (c - b) + (b - a) = (k + n)q$. □

Olkoon $q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Kongruenssin mod q ekvivalenssiluokat $a + q\mathbb{Z}$ ovat *kongruenssiluokkia (modulo q)*.

Luku $a \in \mathbb{Z}$ on kongruenssiluokan $a + q\mathbb{Z}$ *edustaja*.

Kongruenssin modulo q tekijäjoukko on kongruenssiluokkien joukko

$$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{a + q\mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z}\}.$$

Esimerkki 2.5. Kongruenssin modulo q tekijäkuvaus on $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $\pi(a) = a + q\mathbb{Z}$.

Propositio 2.6. *Olkoon $q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Tällöin $\#\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = q$ ja*

$$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{0 + q\mathbb{Z}, 1 + q\mathbb{Z}, 2 + q\mathbb{Z}, \ldots, q - 1 + q\mathbb{Z}\}.$$

Todistus. Jakoyhtälöstä[1] seuraa, että jokaiselle ekvivalenssiluokalle on yksikäsitteinen edustaja joukossa $\{0, 1, \ldots, q-1\}$. Siis tekijäjoukossa $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on korkeintaan q alkiota. Toisaalta, jos $0 \leq a < b \leq n - 1$, niin $1 \leq b - a \leq n - 1$, joten $a + q\mathbb{Z} \neq b + q\mathbb{Z}$. Siis tekijäjoukossa $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on ainakin q alkiota. □

2.3 Tekijälaskutoimitus

Algebran yhteydessä tarkastelemme laskutoimituksilla varustettujen joukkojen ekvivalenssirelaatioita, jotka ovat yhteensopivia laskutoimitusten kanssa. Näin saadaan määriteltyä alkuperäisiin laskutoimituksiin liittyviä laskutoimituksia tekijäjoukoissa.

Joukon A laskutoimitus $*$ ja ekvivalenssirelaatio $\sim$ ovat *yhteensopivat*, jos $a * b \sim a' * b'$ kaikille $a, b, a', b' \in A$, joille $a \sim a'$ ja $b \sim b'$.

Lemma 2.7. *Olkoon $(A, *)$ laskutoimituksella varustettu joukko ja olkoon $\sim$ joukon A ekvivalenssirelaatio, joka on yhteensopiva laskutoimituksen $*$ kanssa. Lauseke*

$$[a] * [b] = [a * b]$$

määrää laskutoimituksen tekijäjoukossa $A/\sim$.

Todistus. Jos $[a] = [a']$ ja $[b] = [b']$, niin $a \sim a'$ ja $b \sim b'$. Yhteensopivuuden nojalla $a * b \sim a' * b'$, joten $[a * b] = [a' * b']$. Siis laskutoimitus on hyvin määritelty. □

Jos joukon A ekvivalenssirelaatio $\sim$ ja laskutoimitus $*$ ovat yhteensopivat, niin Lemman 2.7 antama tekijäjoukon $A/\sim$ laskutoimitus $*$ on joukon A laskutoimituksen $*$ määräämä *tekijälaskutoimitus*.

Seuraavat havainnot seuraavat suoraviivaisesti määritelmistä:

[1] Propositio **??**

Propositio 2.8. *Olkoon $\sim$ laskutoimituksella varustetun joukon $(E, *)$ laskutoimituksen $*$ kanssa yhteensopiva ekvivalenssirelaatio. Tällöin:*

(1) Luonnollinen kuvaus $\pi\colon E \to E/\sim$ on surjektiivinen homomorfismi.

(2) Jos $e \in E$ on laskutoimituksen $*$ neutraalialkio, niin $[e] \in E/\sim$ on tekijälaskutoimituksen neutraalialkio.

(3) Jos laskutoimitus $*$ on assosiatiivinen, sen tekijälaskutoimitus on assosiatiivinen.

(4) Jos $*$ on kommutatiivinen, sen tekijälaskutoimitus on kommutatiivinen.

Todistus. Todistetaan väite (1): Kaikille $a, b \in E$ pätee

$$\pi(a) * \pi(b) = [a] * [b] = [a * b] = \pi(a * b),$$

joten luonnollinen kuvaus on homomorfismi. Kuvauksen surjektiivisuus on selvää, koska jokaisella ekvivalenssiluokalla on edustaja joukossa E.

Väite (2) seuraa Propositiosta 1.14 ja väitteet (3) ja (4) Propositiosta 1.9, koska luonnollinen kuvaus on väitteen (1) mukaan surjektiivinen homomorfismi. □

2.4 Kongruenssiluokkien laskutoimitukset

Tässä luvussa sovellamme tekijälaskutoimituksen konstruktiota kongruenssiluokkien laskutoimitusten määrittelyyn ja Propositiota 2.8 niiden perusominaisuuksien osoittamiseen.

Lemma 2.9. *Kokonaislukujen yhteenlasku ja kertolasku ovat yhteensopivia kongruenssin kanssa.*

Todistus. Osoitamme väitteen yhteenlaskulle. Kertolaskulle väite osoitetaan samaan tapaan Harjoitustehtävässä 2.1. Jos $a \equiv a' \mod q$ ja $b \equiv b' \mod q$, niin on $m, n \in \mathbb{Z}$, joille $a' = a + mq$ ja $b' = b + nq$. Tällöin

$$a' + b' - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) = (m + n)q,$$

joten $a' + b' \equiv a + b \mod q$. □

Propositio 2.10. *(1) Kokonaislukujen yhteenlasku ja kertolasku määräävät assosiatiiviset ja kommutatiiviset laskutoimitukset q alkion joukossa $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.*

(2) Kongruenssiluokka $0+q\mathbb{Z}$ on kongruenssiluokkien yhteenlaskun neutraalialkio ja $1+q\mathbb{Z}$ on kongruenssiluokkien kertolaskun neutraalialkio.

(3) Jokaisella $a + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ pätee $a + q\mathbb{Z} + (-a + q\mathbb{Z}) = 0 + q\mathbb{Z}$.

Todistus. Väitteet (1) ja (2) seuraavat Propositiosta 2.8.

(3) Jokaisella $a \in \mathbb{Z}$ on vastaluku $-a \in \mathbb{Z}$, joten

$$a + q\mathbb{Z} + (-a + q\mathbb{Z}) = (a - a) + \mathbb{Z} = 0 + q\mathbb{Z}\,. \qquad \square$$

Käytämme molemmille kongruenssiluokkien laskutoimituksille samoja merkintöjä kuin vastaaville kokonaislukujen laskutoimituksille: kaikille $a + q\mathbb{Z}, b + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$

$$(a + q\mathbb{Z}) + (b + q\mathbb{Z}) = (a + b) + q\mathbb{Z}$$

ja

$$(a + q\mathbb{Z})(b + q\mathbb{Z}) = ab + q\mathbb{Z}\,.$$

Esimerkki 2.11. Yhteen- ja kertolaskun laskutaulut kongruenssiluokilla modulo 4

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

ja modulo 5

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

.

Näissä laskutauluissa merkitään luvulla $0 \leq a \leq q-1$ ekvivalenssiluokkaa $a+q\mathbb{Z}$, kun $q \in \{4,5\}$. Huomaamme, että jokaisella nollasta poikkeavalla alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksella varustetussa joukossa $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},\cdot)$ mutta alkiolla $2+4\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\cdot)$ ei ole käänteisalkiota. Tarkastelemme tämän havainnon syitä luvussa 5.3.

Lemma 2.12. *Kongruenssiluokkien kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen.*

Todistus. Olkoot $a,b,c \in \mathbb{Z}$ ja olkoon $q \in \mathbb{N}-\{0,1\}$. Tällöin kokonaislukujen osittelulain nojalla pätee

$$\begin{aligned}(a+q\mathbb{Z})\big((b+q\mathbb{Z})+(c+q\mathbb{Z})\big) &= (a+q\mathbb{Z})\big((b+c)+q\mathbb{Z}\big) = a(b+c)+q\mathbb{Z} \\ &= (ab+ac)+q\mathbb{Z} = (ab+q\mathbb{Z})+(ac+q\mathbb{Z})\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Harjoitustehtäviä

2.1. Osoita, että kokonaislukujen kertolasku on yhteensopiva kongruenssin kanssa.[2]

2.2. Määritellään relaatio $\sim$ joukossa $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ asettamalla $(m,n)\sim(p,q)$, jos ja vain jos $m+q=n+p$. Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.[3]

2.3. Määritellään laskutoimitus $*$ joukossa $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ asettamalla

$$(m,n)*(p,q) = (mp+nq, mq+np)\,.$$

Osoita, että $*$ on yhteensopiva tehtävän 2.2 ekvivalenssirelaation kanssa. Todistuksessa voi käyttää vain luonnollisia lukuja![4]

2.4. Muodosta yhteen- ja kertolaskun laskutaulut kongruenssiluokilla modulo 2 ja modulo 6.

[2]Katso Lemma 2.9.

[3]Tehtävä liittyy kokonaislukujen määrittelemiseen luonnollisten lukujen muodollisina erotuksina.

[4]Tarkasteltava laskutoimitus antaa kokonaislukujen kertolaskun, kun kokonaislukuja ajatellaan kahden luonnollisen luvun erotuksina. Vihje: Osoita, että ehdosta $(m,n)\sim(m',n')$ seuraa $(m,n)*(p,q)\sim(m',n')*(p,q)$ ja päättele väite käyttämällä ekvivalenssirelaatioiden ja tarkasteltavan laskutoimituksen ominaisuuksia.

2.5. Muodosta yhteen- ja kertolaskun laskutaulut kongruenssiluokilla modulo 3 ja modulo 9.

2.6. Määritellään relaatio $\sim$ reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ asettamalla $x \sim y$, jos ja vain jos $x = qy$ jollain $q \in \mathbb{Q}^\times$. Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Osoita, että tekijäjoukko $\mathbb{R}/\sim$ on ylinumeroituva.

Olkoon $f\colon X \to A$ kuvaus. Olkoon $x \underset{f}{\sim} y$, jos ja vain jos $f(x) = f(y)$ alkioille $x, y \in X$.

2.7. Osoita, että $\underset{f}{\sim}$ on ekvivalenssirelaatio. Osoita, että lauseke

$$F([x]) = f(x)$$

määrittelee bijektion $F\colon X/\underset{f}{\sim} \to f(X)$.

2.8. Olkoon $\phi\colon (X, *) \to (A, \circledast)$ homomorfismi. Osoita, että laskutoimitus $*$ ja ekvivalenssirelaatio $\underset{\phi}{\sim}$ ovat yhteensopivat. Osoita, että $\phi(X)$ on laskutoimituksella varustetun joukon $(A, \circledast)$ vakaa osajoukko ja että homomorfismin ϕ määräämä kuvaus[5] $\Phi\colon X/\underset{\phi}{\sim} \to \phi(X)$ on isomorfismi.

2.9. Määritä kertolaskun laskutaulu kongruenssiluokilla modulo 8.

[5]Katso Harjoitustehtävä 2.7.

Osa II

Renkaat ja kunnat

Luku 3

Renkaat

Renkaat ovat kahdella assosiatiivisella laskutoimituksella varustettuja joukkoja, joissa ainakin toinen laskutoimitus on kommutatiivinen. Lisäksi vaaditaan, että yksi laskutoimituksista on distributiivinen toisen suhteen. Vaadimme siis näiltä kahdella laskutoimituksella varustetuilta joukoilta joitakin ominaisuuksia, joita kokonaisluvuilla on, mutta kertolaskua vastaava laskutoimitus ei välttämättä ole kommutatiivinen. Tässä luvussa aloitamme tutustumisen renkaiden perusominaisuuksiin ja eri tapoihin luokitella renkaita ominaisuuksiensa perusteella. Tutkimme myös useita esimerkkejä renkaista.

3.1 Ryhmä

Ryhmät ovat pääosassa kurssilla Ryhmät. Tälläkin kurssilla ryhmän käsite on hyödyllinen käsite renkaiden ja vektoriavaruuksien määritelmissä ja renkaiden teoriassa muutenkin. Tutustumme siksi ryhmän määritelmään ja joihinkin perusominaisuuksiin jo nyt.

Laskutoimituksella varustettu joukko $(G, *)$ on *ryhmä*, jos

- laskutoimitus $*$ on assosiatiivinen,
- laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio ja
- jokaisella $g \in (G, *)$ on käänteisalkio.

Lemma 3.1. *Olkoon $(G, *)$ ryhmä. Jokaisella $g \in G$ on täsmälleen yksi käänteisalkio.*

Todistus. Alkiolla $g \in G$ on ainakin yksi käänteisalkio ryhmän määritelmän nojalla. Proposition 1.18 nojalla sillä on korkeintaan yksi käänteisalkio, koska $*$ on assosiatiivinen laskutoimitus. □

Esimerkki 3.2. Laskutoimituksella varustetut joukot $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $\mathbb{R}^\times$ ja $\mathbb{Q}^\times$ ovat ryhmiä.

Supistussäännöt ovat voimassa laskutoimituksella varustetussa joukossa $(A, *)$, jos kaikilla $a, b, c \in A$ pätee

(1) Jos $a * b = a * c$, niin $b = c$.

(2) Jos $a * b = c * b$, niin $a = c$.

Propositio 3.3. *Supistussäännöt pätevät ryhmässä.*

Todistus. Olkoon G ryhmä ja olkoot $a, b, c \in G$ siten, että $ab = ac$. Siis

$$b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = c\,,$$

joten sääntö (1) pätee. Sääntö 2 todistetaan samaan tapaan. □

Lemman 3.1 toinen todistus. Riittää osoittaa käänteisalkion yksikäsitteisyys. Olkoon $g \in G$. Jos e on ryhmän G neutraalialkio ja $ag = e = bg$, niin supistussäännön nojalla $a = b$. Siis alkiolla g on vain yksikäänteisalkio. □

Esimerkki 3.4. (a) Supistussääntö ei päde esimerkiksi laskutoimituksella varustetuissa joukoissa $(\mathbb{N}, \cdot)$ ja $(\mathbb{R}, \cdot)$, koska $0\,a = 0$ kaikille $a \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

(b) Supistussääntö pätee laskutoimituksella varustetussa joukossa $(\mathbb{N} - \{0\}, \cdot)$, joka ei ole ryhmä.

Propositio 3.5. *Olkoot G ja G' ryhmiä ja olkoon $\phi\colon G \to G'$ homomorfismi. Tällöin*

(1) Jos $e \in G$ ja $e' \in G'$ ovat ryhmien neutraalialkiot, niin $\phi(e) = e'$.

(2) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ kaikille $g \in G$.

Todistus. (1) Olkoon $\phi\colon G \to G'$ homomorfismi. Tällöin

$$e'\phi(e) = \phi(e) = \phi(ee) = \phi(e)\phi(e)\,,$$

mistä väite seuraa supistussäännöllä.

(2) Olkoon $g \in G$. Tällöin

$$\phi(g^{-1})\phi(g) = \phi(g^{-1}g) = \phi(e) = e'$$

ja

$$\phi(g)\phi(g^{-1}) = \phi(gg^{-1}) = \phi(e) = e'\,,$$

joten $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$. □

3.2 Rengas

Kahdella laskutoimituksella varustettu joukko $(R, +, \cdot)$ on *(ykkösellinen) rengas*, jos laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ ovat assosiatiivisia ja

(1) $(R, +)$ on kommutatiivinen ryhmä,

(2) kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen ja

(3) kertolaskulla on neutraalialkio $1 = 1_R \in R$.

Ryhmä $(R, +)$ on renkaan $(R, +, \cdot)$ *additiivinen ryhmä*.
Rengas on *kommutatiivinen rengas*, jos sen kertolasku on kommutatiivinen.

Laskutoimituksen $+$ neutraalialkiolle käytetään merkintää $0 = 0_R$.
Käytämme tavanomaista merkintää $x - y = x + (-y)$.

Esimerkki 3.6. Lukujen 1.7, 1.8 ja 2.4 nojalla kahdella laskutoimituksella varustetut joukot $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ja $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +, \cdot)$, kun $q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, ovat kommutatiivisia renkaita.

Kun viittaamme renkaaseen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ tarkoitamme rengasta, jonka laskutoimitukset ovat kuten Esimerkissä 3.6.

Olkoon $q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Rengas $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on *jäännösluokkarengas* mod q.

Renkaiden R ja S *tulorengas* on joukko $R \times S$ varustettuna yhteenlaskulla ja kertolaskulla, jotka määritellään

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

ja

$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2)$$

kaikille $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$.

Propositio 3.7. *Tulorengas on rengas.*

Esimerkki 3.8. Olkoon R rengas, jossa on vähintään 2 alkiota. Kaikkien R-kertoimisten $n \times n$-matriisien joukko $\mathrm{M}_n(R)$ varustettuna matriisien yhteen- ja kertolaskulla on rengas. Kun $R = \mathbb{R}$, kaikki renkaan ominaisuudet on osoitettu lineaarialgebrassa, katso Esimerkit 1.1(c) ja 1.19(b). Kun $n \geq 2$, niin $\mathrm{M}_n(R)$ ei ole kommutatiivinen rengas, koska matriisien kertolasku ei ole kommutatiivinen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 3.9. (a) Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon R rengas. Olkoot $f, g \in R^X$. Asetamme

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{ja} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

kaikilla $x \in X$. Kahdella laskutoimituksella varustettu joukko $(R^X, +, \cdot)$ on rengas, jota kutsutaan *funktiorenkaaksi*.

Laskutoimitusten assosiatiivisuus, yhteenlaskun kommutatiivisuus ja kertolaskun distributiivisuus yhteenlaskun suhteen seuraa siitä, että funktioiden arvot ovat renkaassa R ja funktioiden laskutoimitukset on määritelty pisteittäin. Yhteenlaskun neutraalialkio on vakiofunktio $\underline{0}\colon X \to R$ ja kertolaskun neutraalialkio on $\underline{1}\colon X \to R$. Funktion $f \in R^X$ käänteisalkio yhteenlaskun suhteen on funktio $-f$, joka määritellään asettamalla $(-f)(x) = -f(x)$ kaikilla $x \in R$.

Rengas R^X on kommutatiivinen, jos R on kommutatiivinen. Esimerkiksi siis $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on kommutatiivinen rengas.

(b) Olkoot $L_1, L_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarikuvauksia. Lineaarialgebran kurssilla on osoitettu, että $L_1 + L_2$ ja $L_1 \circ L_2$ ovat myös lineaarikuvauksia avaruudelta $\mathbb{R}^n$ itselleen. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ *endomorfismirengas* on

$$\mathrm{End}(\mathbb{R}^n) = \{L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : L \text{ on lineaarikuvaus}\}$$

varustettuna yhteenlaskulla

$$(L_1 + L_2)(x) = L_1(x) + L_2(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja kertolaskulla

$$L_1 L_2 = L_1 \circ L_2\,.$$

Molemmat laskutoimitukset ovat assosiatiivisia[1] ja yhteenlasku on kommutatiivinen.

Lineaarikuvaus $0 \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ on selvästi yhteenlaskun neutraalialkio. Määritellään jokaiselle $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ lineaarikuvaus $-L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ asettamalla $(-L)(x) = -L(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin selvästi $L + (-L) = 0$ kaikilla $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, joten $(\mathrm{End}(\mathbb{R}^n), +)$ on kommutatiivinen ryhmä.

Jos $L, L', L'' \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, niin kaikilla $a \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$(L + L')L''(a) = LL''(a) + L'L''(a) = (LL'' + L'L'')(a),$$

ja

$$L''(L + L')(a) = L''(L(a) + L'(a)) = L''L(a) + L''L'(a) = (L''L + L''L')(a).$$

Siis kertolasku on yhteenlaskun suhteen distributiivinen.

Lisäksi identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus ja se on selvästi kertolaskun neutraalialkio. Siis $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ on rengas.

(c) Yhden alkion joukossa $\{a\}$ on vain yksi laskutoimitus $*$. Kahdella laskutoimituksella varustettu joukko $(\{a\}, *, *)$ on *nollarengas*, jossa $0 = 1 = a$.

Propositio 3.10. *Olkoon R rengas. Tällöin*

(1) $0_R \cdot x = 0_R = x \cdot 0_R$ *kaikilla* $x \in R$,

(2) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$ *ja* $(-x)(-y) = xy$ *kaikilla* $x, y \in R$,

(3) $x(y - z) = xy - xz$ *ja* $(y - z)x = yx - zx$ *kaikilla* $x, y, z \in R$.

[1] Katso Esimerkki 1.10.

Todistus. (1) Distributiivisuuden nojalla

$$0_R\, x + x = (0_R + 1_R)x = 1_R\, x = x = 0_R + x$$

kaikilla $x \in R$. Renkaan R additiivisen ryhmän supistussäännöstä seuraa, että $0_R\, x = 0_R$ kaikilla $x \in R$. Toinen yhtälö todistetaan samalla tavalla.

Loput väitteet todistetaan harjoitustehtävässä 3.3. □

Esimerkki 3.11. Renkaassa R pätee $-1_R\, x = -x$ kaikilla $x \in R$.

Edellä osoitettujen laskusääntöjen avulla on helppo osoittaa seuraavat perusominaisuudet

Propositio 3.12. *Olkoon R rengas. Jos $\#R \geq 2$, niin*

(1) $0 \neq 1$ *ja*

(2) yhteenlaskun neutraalialkiolla 0 *ei ole käänteisalkiota kertolaskun suhteen.*

Todistus. (1) Jos $1 = 0$, niin kaikille $x \in R$ pätee Proposition 3.10 nojalla

$$x = 1\, x = 0\, x = 0.$$

(2) Harjoitustehtävä 3.5. □

Lemma 3.13. *Kommutatiivisessa renkaassa K pätee* binomikaava:[2]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

kaikille $a, b \in K$ ja kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Harjoitustehtävä 3.6. □

3.3 Alirengas

Olkoon R rengas ja olkoon $S \subset R$ vakaa yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen. Jos S varustettuna indusoiduilla laskutoimituksilla on rengas ja jos $1_S = 1_R$, niin S on renkaan R *alirengas*.

Esimerkki 3.14. (a) Kokonaislukujen rengas $\mathbb{Z}$ on renkaan $\mathbb{Q}$ alirengas, $\mathbb{Q}$ on renkaan $\mathbb{R}$ alirengas ja $\mathbb{R}$ on renkaan $\mathbb{C}$ alirengas.

(b) Joukko

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$$

on renkaan $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vakaa osajoukko ja se on rengas indusoiduilla laskutoimituksilla. Sen kertolaskun neutraalialkio on $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, joten S ei ole renkaan $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ alirengas.

[2] Katso monikerran ja potenssin määritelmä luvusta 1.9.

Esimerkki 3.14 osoittaa, että oletus $1_S = 1_R$ on oleellinen alirenkaan määritelmässä. Sen sijaan alirenkaan yhteenlaskun neutraalialkio on automaattisesti sama kuin koko renkaan yhteenlaskun neutraalialkio.

Lemma 3.15. *Olkoon S renkaan R alirengas. Tällöin $0_S = 0_R$.*

Todistus. Neutraalialkioiden määritelmän nojalla pätee $0_S + 0_S = 0_S = 0_S + 0_R$. Supistussäännön nojalla siis $0_S = 0_R$. □

Propositio 3.16 (Alirengastesti)**.** *Olkoon R rengas ja olkoon $S \subset R$. Tällöin S on renkaan R alirengas, jos ja vain jos*

(1) Kaikille $x, y \in S$ $x + y \in S$ ja $xy \in S$ ja

(2) $-1_R \in S$.

Todistus. Harjoitustehtävä 3.7. □

Esimerkki 3.17. Proposition 3.16 avulla on helppo tarkastaa, että

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

on renkaan $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ alirengas.

Esimerkki 3.18. Analyysin kursseilla osoitetaan, että indusoiduilla laskutoimituksilla varustetut joukot

$\mathrm{C}^0(\mathbb{R}) = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ on jatkuva}\}$, ja
$\mathrm{C}^k(\mathbb{R}) = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ on } k \text{ kertaa jatkuvasti derivoituva}\}$, $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$.

ovat funktiorenkaan $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ alirenkaita

3.4 Rengashomomorfismit

Olkoot R ja R' renkaita. Kuvaus $\phi : R \to R'$ on *rengashomomorfismi*, jos se on kahdella laskutoimituksella varustettujen joukkojen homomorfismi, jolle pätee $\phi(1_R) = 1_{R'}$.
Bijektiivinen rengashomomorfismi on *rengasisomorfismi*.
Jos on isomorfismi $\phi \colon R \to R'$, niin renkaat R ja R' ovat *isomorfisia*, $R \cong R'$.

Lemma 3.19. *Olkoon $\phi \colon R \to R'$ rengashomomorfismi. Tällöin*

$$\phi(0_R) = 0_{R'} \quad \textit{ja} \quad \phi(-1_R) = -1_{R'}\,.$$

Todistus. Kuvaus $\phi \colon (R, +) \to (R', +)$ on ryhmähomomorfismi, joten ensimmäinen väite seuraa Proposition 3.5 kohdasta (1), koska 0_R on additiivisen ryhmän $(R, +)$ neutraalialkio. Toinen väite seuraa Proposition 3.5 kohdasta (2), koska rengashomomorfismin määritelmän nojalla $\phi(1_R) = 1_{R'}$. □

Proposition 3.12 nojalla rengashomomorfismille $\phi\colon R \to R'$ pätee $\phi(1) = 0$ vain, jos $R' = \{0\}$. Lisäksi yhden alkion renkaalta ei ole rengashomomorfismia renkaaseen, jossa on vähintään kaksi alkiota.

Esimerkki 3.20. Luonnollinen kuvaus $\pi_q : k \mapsto k + q\mathbb{Z}$ renkaasta $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ jäännösluokkarenkaaseen $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +, \cdot)$ on surjektiivinen rengashomomorfismi Propositioiden 2.8 ja 2.10 nojalla.

Esimerkki 3.21. Olkoon X epätyhjä joukko ja olkoon R rengas. Olkoon $a \in X$. *Evaluaatiokuvaus pisteessä* a $E_a\colon R^X \to R$, $E_a(f) = f(a)$, on rengashomomorfismi:

$$E_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = E_a(f) + E_a(g),$$
$$E_a(fg) = (fg)(a) = f(a)g(a) = E_a(f)E_a(g)$$

ja

$$E_a(\underline{1}) = \underline{1}(a) = 1.$$

Esimerkki 3.22. Olkoon $K = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta ja olkoon $(Lv_i)_K \in \mathbb{R}^n$ vektorin Lv_i koordinaattivektori sarakevektorina kannassa K. Lineaarialgebrassa on osoitettu, että kuvaus $\mathrm{Mat}\colon \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, joka liittää lineaarikuvaukseen L sen matriisin tässä kannassa, on rengasisomorfismi. Jos $L, L' \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, niin $(L + L')(v) = Lv + L'v$, joten

$$\mathrm{Mat}(L + L') = \mathrm{Mat}(L) + \mathrm{Mat}(L'),$$

eli Mat on ryhmähomomorfismi additiivisten ryhmien välillä. Lisäksi kaikille lineaarikuvauksille $L, L' \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ pätee

$$\mathrm{Mat}(L'L) = \mathrm{Mat}(L')\,\mathrm{Mat}(L)$$

ja identtisen kuvauksen matriisi on $I_n = 1_{\mathrm{M}_n(R)}$.

Propositio 3.23. *(1) Jos $f\colon R \to S$ ja $g\colon S \to T$ ovat rengashomomorfismeja, niin $g \circ f$ on rengashomomorfismi.*
(2) Rengashomomorfismi $f\colon R \to S$ on rengasisomorfismi, jos ja vain jos on rengashomomorfismi $\bar{f}\colon S \to R$, jolle $\bar{f} \circ f = \mathrm{id}_R$ ja $f \circ \bar{f} = \mathrm{id}_S$.

Todistus. Harjoitustehtävät 1.4 ja 3.11. □

Rengashomomorfismin $\psi\colon R \to R'$ *ydin* on

$$\ker \psi = \psi^{-1}(0) = \{x \in R : \psi(x) = 0\}.$$

Esimerkki 3.24. Luonnollisen rengashomomorfismin $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $a \mapsto a + q\mathbb{Z}$, ydin on $q\mathbb{Z}$ kaikilla $q \geq 2$.

Propositio 3.25. *Rengashomomorfismi on injektio, jos ja vain jos sen ydin on $\{0\}$.*

Todistus. Olkoon $\psi\colon R \to S$ rengashomomorfismi. Koska $\psi(0) = 0$, niin $0 \in \ker \psi$. Jos $\ker \psi \neq \{0\}$, on $x \in R - \{0\}$, jolle $\psi(x) = 0 = \psi(0)$. Siis ψ ei ole injektio. Jos taas ψ ei ole injektio, on $x, y \in R$, $x \neq y$, joille $\psi(x - y) = \psi(x) - \psi(y) = 0$. Koska $x - y \neq 0$, pätee $\ker \psi \neq \{0\}$. □

Olkoon Y joukko ja olkoon $\emptyset \neq X \subset Y$. Kuvaus $i : X \to Y$, $i(x) = x$, on *inkluusiokuvaus.*[a]

[a]Inkluusiokuvausta kutsutaan myös *kanoniseksi injektioksi.*

Esimerkki 3.26. Olkoon S renkaan R alirengas. Alirenkaan määritelmän mukaan alirenkaan inkluusiokuvaus on rengashomomorfismi. Sen ydin on $\{0\}$.

Rengashomomorfismin $\phi : R \to S$ ydin ei yleensä ole renkaan R alirengas, koska se ei välttämättä sisällä kertolaskun neutraalialkiota 1_R. Palaamme tähän aiheeseen luvussa 7.

Seuraava tulos yleistää Esimerkin 3.26 havainnon.

Propositio 3.27. *Olkoon $\phi\colon R \to R'$ rengashomomorfismi.*
(1) Jos S on renkaan R alirengas, niin $\phi(S)$ on renkaan R' alirengas.
(2) Jos S' on renkaan R' alirengas, niin $\phi^{-1}(S')$ on renkaan R alirengas.

Todistus. (1) Sovelletaan alirengastestiä.[3] Olkoot $\phi(a), \phi(b) \in \phi(S)$. Tällöin

$$\phi(a) + \phi(b) = \phi(a + b) \in \phi(S)$$

ja

$$\phi(a)\,\phi(b) = \phi(ab) \in \phi(S)\,,$$

koska $\phi\colon (R, +) \to (R', +)$ ja $\phi\colon (R, \cdot) \to (R', \cdot)$ ovat homomorfismeja. Koska $-1_R \in S$, niin Lemman 3.19 nojalla

$$-1_{R'} = -\phi(1_R) = \phi(-1_R) \in \phi(S).$$

Siis $\phi(S)$ on alirengas.
(2) Harjoitustehtävä 3.12. □

Seuraus 3.28. *Olkoon $\phi\colon R \to R'$ rengashomomorfismi. Tällöin $\phi(R)$ on renkaan R' alirengas ja $\phi^{-1}(R')$ on renkaan R alirengas.* □

3.5 Renkaan karakteristika

Kokonaislukujen renkaan $\mathbb{Z}$ rakenne on yksinkertainen: sen kaikki alkiot ovat alkion 1 monikertoja.[4]Tästä seuraa erityisominaisuus renkaassa $\mathbb{Z}$ määritellyille rengashomomorfismeille.

Propositio 3.29. *Olkoon R rengas. On täsmälleen yksi rengashomomorfismi $\phi\colon \mathbb{Z} \to R$.*

Todistus. Kuvaus $\phi\colon \mathbb{Z} \to R$,

$$\phi(n) = n1_R = 1_R + 1_R + \cdots + 1_R\,,$$

on rengashomomorfismi, sillä

$$\phi(m + n) = (m + n)1_R = m1_R + n1_R = \phi(m) + \phi(n)$$

[3]Propositio 3.16
[4]Katso monikerran määritelmä luvusta 1.9.

ja

$$\phi(mn) = mn1_R = m1_R n1_R = \phi(m)\phi(n)$$

kaikille $m, n \in \mathbb{Z}$. Siis haluttuja kuvauksia on ainakin yksi.

Jos $\psi\colon \mathbb{Z} \to R$ on rengashomomorfismi, niin $\psi(1) = 1_R$. Siis $\psi(m) = m\,\psi(1_R)$ kaikille $m \in \mathbb{Z}$, joten $\psi = \phi$. □

Esimerkki 3.30. Olkoon $\psi\colon \mathbb{Z} \to R$ rengashomomorfismi $\psi(k) = k\,1_R$. Homomorfismin ψ kuva $\psi(\mathbb{Z}) = \{k\,1_R : k \in \mathbb{Z}\}$ on renkaan R alirengas Proposition 3.27 nojalla.

Jos rengashomomorfismi $\phi\colon \mathbb{Z} \to R$ ei ole injektio, niin Proposition 3.25 nojalla sen ydin sisältää muitakin kokonaislukuja kuin 0. Jos $\phi(k) = 0_R$, niin Proposition 3.5 nojalla $\phi(-k) = -\phi(k) = 0_R$. Siis $\ker\phi$ sisältää positiivisia kokonaislukuja. Tätä havaintoa käytetään seuraavassa määritelmässä:

Olkoon R rengas. Jos homomorfismi $\mathbb{Z} \to R$, $k \mapsto k\,1_R$, on injektio, niin renkaan R *karakteristika* $\chi(R)$ on 0. Muuten renkaan R *karakteristika* on

$$\chi(R) = \min\{k \in \mathbb{N} - \{0\} : k\,1_R = 0\}.$$

Esimerkki 3.31. (a) Renkaiden $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ karakteristika on 0, koska ne sisältävät kaikki alirenkaana isomorfisen kopion kokonaislukurenkaasta $\mathbb{Z}$.

(b) Jäännösluokkarenkaan $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ karakteristika on q, koska huomasimme Esimerkissä 3.24, että tekijähomomorfismin $\pi_q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ydin on $q\mathbb{Z}$.

(c) Jos $\chi(R) = 0$, niin R on ääretön. Polynomirenkaiden[5] avulla huomaamme, että on äärettömiä renkaita, joiden karakteristika on äärellinen.

(c) Määritelmän mukaan nollarenkaan karakteristika on 1. Jos renkaassa R on vähintään 2 alkiota, niin Proposition 3.12 nojalla $1_R \neq 0_R$, joten $\chi(R) \neq 1$.

Lemma 3.32. *Jos renkaan R karakteristika on q, niin $qx = 0_R$ kaikille $x \in R$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 3.15 □

Harjoitustehtäviä

3.1. Todista Propositio 3.7.

3.2. Määritellään joukossa $\mathbb{Z}^3$ yhteenlasku komponenteittain ja kertolasku asettamalla

$$(a, b, c)(x, y, z) = (ax, bx + cy, cz)$$

kaikilla $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$. Osoita, että $\mathbb{Z}^3$ varustettuna näillä laskutoimituksilla on rengas. Onko se kommutatiivinen?

3.3. Olkoon R rengas. Osoita, että

(a) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$ kaikilla $x, y \in R$ ja

(b) $x(y - z) = xy - xz$ ja $(y - z)x = yx - zx$ kaikilla $x, y, z \in R$.

[5] Katso luku 6.

3.4. Olkoon $(R, \oplus, \cdot)$ kahdella assosiatiivisella laskutoimituksella varustettu joukko siten, että

(1) $(R, \oplus)$ on ryhmä,

(2) kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen ja

(3) kertolaskulla on neutraalialkio $1 = 1_R \in R$.

Osoita, että $(R, \oplus, \cdot)$ on rengas.[6]

3.5. Todista Propositio 3.12(2).

3.6. Todista Lemma 3.13.

3.7. Todista Propositio 3.16.

3.8. Osoita, että

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \right\}$$

on rengas, joka ei ole kommutatiivinen. Montako alkiota renkaassa Y on? Millä renkaan Y alkioilla on käänteisalkio kertolaskun suhteen?

3.9. Osoita, että Esimerkin 3.17 rengas C on isomorfinen kompleksilukujen renkaan $\mathbb{C}$ kanssa. Mikä renkaan C kuvaus vastaa kompleksikonjugointia?

3.10. Ovatko funktiorenkaat $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ja $\mathbb{R}^{[0,2]}$ isomorfisia?

3.11. Todista Propositio 3.23(2).

3.12. Todista Propositio 3.27(2).

3.13. Olkoot $m, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Osoita, että kuvaus $\Phi\colon \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$,

$$\Phi(k) = (k + m\mathbb{Z}, k + n\mathbb{Z}),$$

on rengashomomorfismi.

3.14. Olkoot $m \geq 2$ ja $n \geq 2$ luonnollisia lukuja, joiden suurin yhteinen tekijä on 1. Osoita, että renkaat $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ ja $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ovat isomorfisia.

3.15. Todista Lemma 3.32.

3.16. Osoita, että renkaalla $\mathbb{Z}$ ei ole muita alirenkaita kuin $\mathbb{Z}$.

3.17. Olkoon $q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Osoita, että ei ole rengashomomorfismia jäännösluokkarenkaalta $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ renkaaseen $\mathbb{Z}$.

3.18. Sievennä lauseke $(a + b)^p$ kommutatiivisessa renkaassa, jonka karakteristika on alkuluku p.[7] Miksi oletamme, että p on alkuluku?

3.19. Olkoon K kommutatiivinen rengas, jonka karakteristika on alkuluku p. Olkoon $\phi\colon K \to K$ kuvaus $\phi(a) = a^p$. Osoita, että ϕ on rengashomomorfismi.

[6] Tehtävässä ei oleteta, että $\oplus$ on kommutatiivinen. Tarkastele lauseketta $(1 \oplus 1)(x \oplus y)$.

[7] Lemma 3.13.

Renkaan R alkio x on *idempotentti*, jos $x^2 = x$.
Jos renkaan B kaikki alkiot ovat idempotentteja, niin B on *Boolen rengas*.

3.20. Olkoon B Boolen rengas. Osoita, että

(1) B on kommutatiivinen ja

(2) $2x = 0$ kaikille $x \in B$.

Olkoon X joukko. Joukkojen $A, B \in \mathscr{P}(X)$ *symmetrinen erotus* on

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)\,.$$

3.21. Osoita, että $(\mathscr{P}(X), \triangle)$ on ryhmä.

3.22. Osoita, että $(\mathscr{P}(X), \triangle, \cap)$ on Boolen rengas.

Luku 4

Kunnat

Tässä luvussa tarkastelemme renkaita, joiden kaikilla nollasta poikkeavilla alkioilla on käänteisalkio kertolaskun suhteen. Tällaisia renkaita kutsutaan jakorenkaiksi. Erityisesti tarkastelemme kommutatiivisia jakorenkaita eli kuntia, mutta tutustumme lyhyesti myös Hamiltonin kvaternioihin, jotka muodostavat jakorenkaan, joka ei ole kunta.

4.1 Yksiköt

Jos R on rengas ja alkiolla $u \in R$ on käänteisalkio kertolaskun suhteen, niin u on renkaan R *yksikkö*.

Propositio 4.1. *Renkaan yksiköiden joukko varustettuna kertolaskulla on ryhmä.*

Todistus. Renkaan R kertolasku on assosiatiivinen laskutoimitus, jonka neutraalialkio on 1. Yksiköiden joukko on vakaa kertolaskun suhteen: Jos u ja v ovat yksiköitä, niin uv on yksikkö, koska

$$(uv)(v^{-1}u^{-1}) = 1 = (v^{-1}u^{-1})(uv).$$

Kertolasku on siis assosiatiivinen laskutoimitus yksiköiden joukossa. Laskutoimituksella on neutraalialkio, koska 1 on yksikkö. Määritelmän mukaan jokaisella yksiköllä u on käänteisalkio u^{-1} renkaassa R. Myös u^{-1} on yksikkö, koska $(u^{-1})^{-1} = u$. □

Renkaan R *yksiköiden ryhmä* (tai *multiplikatiivinen ryhmä*) on

$$R^\times = \{u \in R : u \text{ on yksikkö}\}$$

varustettuna renkaan R kertolaskun indusoimalla laskutoimituksella.

Esimerkki 4.2. (a) Kaikissa renkaissa pätee $1_R \in R^\times$, koska $1_R 1_R = 1_R$. Jos renkaassa R on ainakin kaksi alkiota, niin Proposition 3.12 mukaan $0_R \neq 1_R$ ja 0_R ei ole yksikkö.

(b) Renkaissa $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ kaikki nollasta poikkeavat alkiot ovat yksiköitä, joten aiemmin esitellyt multiplikatiiviset ryhmät $\mathbb{Q}^\times$, $\mathbb{R}^\times$ ja $\mathbb{C}^\times$ sopivat yhteen yksiköiden ryhmän määritelmän kanssa.

(c) Kokonaislukujen renkaan yksiköiden ryhmä on $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$.

(d) Funktiorenkaan R^X alkio f on yksikkö, jos ja vain jos $f(X) \subset R^\times$.

4.2 Jakorenkaat ja kunnat

Olkoon K rengas, jossa on ainakin kaksi alkiota. Jos kaikki renkaan K nollasta poikkeavat alkiot ovat yksiköitä, niin K on *jakorengas*.

Kommutatiivinen jakorengas on *kunta*.

Jakorengas, joka ei ole kunta on *vino kunta*.

Jos K ja K' ovat kuntia, niin rengashomomorfismi $\phi\colon K \to K'$ on *kuntahomomorfismi*.

Esimerkki 4.3. (a) Renkaassa $\mathbb{Z}$ on äärettömän monta alkiota mutta sen ainoat yksiköt ovat ± 1. Siis $\mathbb{Z}$ ei ole jakorengas eikä siis kunta.

(b) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ ovat kuntia ja inkluusiokuvaukset $\mathbb{Q} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{C}$ ovat kuntahomomorfismeja.

(c) Olkoon R rengas, jossa on vähintään kaksi alkiota. Matriisirengas $\mathrm{M}_n(R)$ ei ole jakorengas, kun $n \geq 2$, koska esimerkiksi matriisilla A, jonka ainoa nollasta poikkeava kerroin on A_{11}, ei ole käänteismatriisia.

Jos k on kunnan K alirengas ja k on kunta, niin k on kunnan K *alikunta*. Tällöin kunta K on kunnan k *kuntalaajennus*.

Esimerkki 4.4. Rationaalilukujen kunta $\mathbb{Q}$ on kunnan $\mathbb{R}$ alikunta. Kunnat $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ ovat kunnan $\mathbb{C}$ alikuntia.

Esimerkki 4.5. Olkoon $F = \{0, 1, \alpha, \beta\}$ joukko, jossa on määritelty kaksi laskutoimitusta $+$ ja $\cdot$, joiden laskutaulut ovat

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

ja

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

.

Laskutaulusta on helppo tarkastaa, että F on kunta. Sen osajoukko $\{0, 1\}$ on vakaa yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen ja $-1 = 1$, joten Proposition 3.16 nojalla $\{0, 1\}$ on kunnan F alikunta.

Kunnan K osajoukko K' voidaan osoittaa kunnaksi näyttämällä ensin alirengastestin[1] avulla, että K' on renkaan K alirengas ja sitten osoittamalla, että nollasta poikkeavilla alkioilla on käänteisalkio kertolaskun suhteen. Seuraava tulos antaa menetelmän, jossa ei käytetä alirengastestiä.

[1] Propositio 3.16.

Propositio 4.6 (Alikuntatesti)**.** *Olkoon K kunta. Osajoukko $K' \subset K$ on alikunta, jos ja vain jos*

(1) $\#K' \geq 2$,

(2) $a - b \in K'$ *kaikilla* $a, b \in K'$ *ja*

(3) $ab^{-1} \in K'$ *kaikilla* $a, b \in K'$, $b \neq 0$.

Todistus. Oletetaan ensin, että K' on alikunta. Tällöin se on erityisesti kunta, joten $\#K' \geq 2$. Koska $(K', +)$ on ryhmä, saadaan $a - b \in K'$ kaikilla $a, b \in K'$. Vastaavasti $(K')^\times$ on ryhmä Proposition 4.1 nojalla, joten $ab^{-1} \in K'$ kaikilla $a, b \in K, b \neq 0$.

Oletetaan sitten, että osajoukolla K' on ominaisuudet (1)–(3). Tarkastamme ensin, että K' on alirengas: Oletuksen (2) nojalla kaikille $a \in K'$ pätee $0_K = a - a \in K'$, joten oletuksen (2) nojalla $-a = 0_K - a \in K'$ ja kaikille $a, b \in K'$ pätee $a + b = a - (-b) \in K'$. Vastaavalla tavalla saadaan oletuksesta (3), että kaikille $b \in K' - \{0_K\}$ pätee $1_K = bb^{-1} \in K'$, joten $b^{-1} = 1b^{-1} \in K'$. Siis ominaisuuden (3) nojalla $ab = a(b^{-1})^{-1} \in L'$ kaikilla $a \in K'$ ja $b \in K' - \{0_K\}$. Edellä näimme, että $0_K, 1_K \in K'$, joten ominaisuuden (2) nojalla $-1'_K$. Alirengastestin 3.16 nojalla K' on renkaan K alirengas.

Alirengas K' on kommutatiivinen koska K on kommutatiivinen. Lisäksi edellä näimme, että $b^{-1} \in K'$ kaikilla $b \neq 0_K$. Siis K' on kunta. □

Kuntaominaisuudet säilyvät homomorfismeissa:

Propositio 4.7. *Olkoon K kunta ja olkoon R rengas, jossa on ainakin kaksi alkiota. Olkoon $\phi\colon K \to R$ rengashomomorfismi. Tällöin ϕ on injektio ja $\phi(K)$ on kunta. Erityisesti kuntahomomorfismi on injektio.*

Todistus. Seurauksen 3.28 mukaan $\phi(K)$ on rengas, joka on Proposition 1.9 mukaan kommutatiivinen. Koska ϕ on rengashomomorfismi ja renkaassa R on vähintään kaksi alkiota, pätee Proposition 3.12 mukaan

$$\phi(0_K) = 0_R \neq 1_R = \phi(1_K)\,.$$

Siis renkaassa $\phi(K)$ on vähintään kaksi alkiota. Yksikön kuva on yksikkö: Jos $u \in K^\times$, niin

$$\phi(u)\phi(u^{-1}) = \phi(uu^{-1}) = \phi(1_K) = 1_R\,.$$

Siis renkaan $\phi(K)$ nollasta poikkeavat alkiot ovat yksiköitä, joten $\phi(K)$ on kunta.

Olkoon $a \in \ker\phi$. Jos $a \neq 0$, niin a on yksikkö, koska K on kunta. Siis

$$1_R = \phi(1_K) = \phi(aa^{-1}) = 0_R\,\phi(a^{-1}) = 0_R\,,$$

mikä on mahdotonta. Siis ϕ on injektio Proposition 3.25 nojalla. □

4.3 Toisen asteen lukukunnat

Jokaisella positiivisella reaaliluvulla $x > 0$ on positiivinen neliöjuuri $\sqrt{x} > 0$, jolle pätee $(\sqrt{x})^2 = x$. Negatiivisella reaaliluvulla ei ole reaalista neliöjuurta. Sen sijaan, jos $x < 0$, niin $(i\sqrt{-x})^2 = x$. Kompleksilukuna ajateltuna luvulla $x < 0$ on siis neliöjuuri $i\sqrt{|x|}$, jolle käytämme merkintää $\sqrt{x}$. Seuraavassa esimerkissä tutustumme kuntiin ja renkaisiin, jotka saadaan rationaalilukujen kunnasta ja kokonaislukujen renkaasta, kun niitä laajennetaan jonkin kokonaisluvun neliöjuuren avulla.

Esimerkki 4.8. Olkoon $d \in \mathbb{Z} - \{0\}$ kokonaisluku, joka ei ole neliö.Olkoot

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R},$$

kun $d \in \mathbb{N}$ ja

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C},$$

kun $d \notin \mathbb{N}$. Harjoitustehtävässä 4.7 osoitetaan, että $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ on rationaalilukujen kunnan laajennus. Jos $d \in \mathbb{N} - \{0\}$, niin $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ on kunnan $\mathbb{R}$ alikunta. Jos $d < 0$, niin $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ on kompleksilukujen kunnan alikunta. Harjoitustehtävässä 4.9 osoitetaan, että

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

on kunnan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ alirengas.

Jos $d = c^2$ jollain kokonaisluvulla d, niin $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}$, joten nämä tapaukset on luonnollista sulkea pois tarkastelusta. On helppo tarkastaa, että $\mathbb{Q}(\sqrt{k^2 d}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kaikille $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, joten voimme olettaa, että d ei ole jaollinen minkään kokonaisluvun neliöllä.

Olkoon d kokonaisluku, joka ei ole jaollinen minkään kokonaisluvun $a > 1$ neliöllä. Kunta $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ on kunnan $\mathbb{Q}$ *toisen asteen kuntalaajennus* eli *toisen asteen lukukunta.*

Kunta $\mathbb{Q}(i)$ on *Gaussin rationaalilukujen kunta.*

Kokonaisalueen $\mathbb{Z}[i]$ alkiot ovat *Gaussin kokonaislukuja.*

4.4 Hamiltonin kvaterniot

Hamiltonin kvaterniot on joukko

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

varustettuna renkaasta $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ indusoiduilla laskutoimituksilla.

Propositio 4.9. *Hamiltonin kvaterniot on vino kunta.*

Todistus. Harjoitustehtävässä 4.13 osoitetaan, että $\mathbb{H}$ on renkaan $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ alirengas. Lisäksi

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2,$$

joten jokainen $A \in \mathbb{H} - \{0\}$ on kääntyvä matriisi. Itse asiassa kaikki nollasta poikkeavat alkiot ovat yksiköitä, koska

$$\frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

ja pätee

$$\frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}.$$

Siis $\mathbb{H}$ on jakorengas.

Jakorengas $\mathbb{H}$ ei ole kommutatiivinen sillä esimerkiksi

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} .$$

Siis $\mathbb{H}$ on vino kunta. □

Kvaternioita käsitellessä on tapana käyttää esimerkiksi merkintöjä

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} .$$

Tällöin

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1} \tag{4.1}$$

ja

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}. \tag{4.2}$$

Matriisit $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ virittävät avaruuden $\mathbb{H}$ neliulotteisena reaalisena vektoriavaruutena, joten Hamiltonin kvaterniot voidaan esittää reaalisina lineaarikombinaatioina

$$x = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}\,,$$

$x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, joilla voi laskea kuten kompleksiluvuilla huomioiden laskusäännöt (4.1) ja (4.2). Hamiltonin kvaternioiden alirengas $\{x_0\mathbf{1} : x_0 \in \mathbb{R}\}$ on isomorfinen kunnan $\mathbb{R}$ kanssa ja usein käytetäänkin esimerkiksi merkintää

$$x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}\,.$$

Hamiltonin kvaternioiden alirengas $\{x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} : x_0 \in \mathbb{R}\}$ on isomorfinen kunnan $\mathbb{C}$ kanssa. Jos ajattelemme kvaternioita kompleksikertoimisten matriisien avulla, näemme, että injektiivinen kuvaus $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{H}$, $\phi(z) = \operatorname{diag}(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} z\,\mathbf{1} + \operatorname{Im} z\,\mathbf{i}$, on rengashomomorfismi.

4.5 Lineaarialgebraa

Lineaarialgebran kursseilla käsitelty reaalisten vektoriavaruuksien ja lineaarikuvausten teoria yleistyy K-kertoimiseen tilanteeseen. Tässä luvussa tutustumme muutamaan määritelmään yleisessä tilanteessa ja näemme ensimmäiset sovellukset kuntien teoriaan. Lineaarialgebran perustulosten todistukset ovat samat kuin lineaarialgebran kursseilla, joten ohitamme niiden yksityiskohdat. Yleiseen kuntakertoimiseen lineaarialgebraan voi perehtyä monien lineaarialgebran ja algebran kirjojen avulla, esimerkiksi [Art], [DF], [War].

Olkoon K kunta ja olkoon $(V, +)$ kommutatiivinen ryhmä. *Vakiolla kertominen* on kuvaus $K \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, joka toteuttaa ehdot

(1) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ kaikille $\lambda \in K$ ja $v, w \in V$,

(2) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ kaikille $\lambda, \mu \in K$ ja $v \in V$,

(3) $\mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v$ kaikille $\lambda, \mu \in K$ ja $v \in V$ ja

(4) $1\,v = v$ kaikille $v \in V$.

Ryhmä V varustettuna tällä rakenteella on *K-vektoriavaruus.*

Propositio 4.10. *Olkoon K kunnan L alikunta. Tällöin L on K-vektoriavaruus.*

Todistus. Koska L on kunta, $(L, +)$ on kommutatiivinen ryhmä. Määritellään vakiolla kertominen $K \times L \to L$ asettamalla $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ kunnan L kertolaskuna. Tämä toimii, koska K on kunnan L alikunta. Ehdot (1)–(3) seuraavat kunnan L laskutoimitusten distributiivisuudesta ja assosiatiivisuudesta ja (4) seuraa siitä, että $1_K = 1_L$. □

Esimerkki 4.11. Kompleksilukujen kunnalla $\mathbb{C}$ on alikunta $j(\mathbb{R})$, joka on isomorfinen reaalilukujen kunnan kanssa. Proposition 4.10 mukaan $\mathbb{C}$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, kun määritellään vakiolla kertominen asettamalla $xz = j(x)z$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $z \in \mathbb{C}$. Yleensä tallaisessa tilanteessa unohdetaan kuntahomomorfismi j ja ajatellaan, että $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Lineaarisen riippuvuuden ja kannan määritelmät yleistävät vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$ lineaarialgebran kursseilla tavatut määritelmät.

Olkoon K kunta ja olkoon V K-vektoriavaruus. Joukko $A \subset V$ on *lineaarisesti riippumaton*, jos kaikille äärellisille joukoille $\{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ ainoat kertoimet $a_1, a_2, \ldots, a_N \in K$, joille pätee $\sum_{k=1}^{N} a_k v_k = 0$, ovat $a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$.

Vektorit $v_1, v_2, \ldots, v_N \in V$ muodostavat K-vektoriavaruuden V *kannan*, jos jokaiselle $x \in V$ on yksikäsitteiset $x_1, x_2, \ldots, x_N \in K$, joille pätee

$$x = \sum_{i=1}^{N} x_i v_i \,.$$

Lemma 4.12. *Olkoot $v_1, v_2, \ldots, v_N \in V$ ja $w_1, w_2, \ldots, w_M \in V$ K-vektoriavaruuden V kantoja. Tällöin $M = N$.*

Todistus. Todistetaan kuten lineaarialgebran kurssilla. □

Olkoon V K-vektoriavaruus, jolla on kanta, jossa on d alkiota. Tällöin avaruus V on *d-ulotteinen* ja sen *dimensio* on d.

Lemma 4.13. *Olkoon K kunta, jossa on N alkiota. Jos V on d-ulotteinen K-vektoriavaruus, niin avaruudessa V on N^d alkiota.*

Todistus. Harjoitustehtävä 4.15. □

Esimerkki 4.14. Esimerkin 4.5 kunta F on 2-ulotteinen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-vektoriavaruus. Joukko $\{1, \alpha\}$ on sen kanta: Lemman 4.13 nojalla kannassa on oltava 2 alkiota. Alkioille 1 ja α pätee $1 \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha + 1 = \beta \neq 0$ kunnan F yhteenlaskutaulun mukaan.

Harjoitustehtäviä

4.1. Olkoon B Boolen rengas.[2] Määritä $B^\times$.

Hyperboliset luvut on joukko

$$\mathbb{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

varustettuna matriisirenkaasta $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ indusoiduilla laskutoimituksilla.

4.2. Osoita, että $\mathbb{S}$ on renkaan $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ alirengas. Onko $\mathbb{S}$ kunta?

4.3. Osoita, että ei ole kuntahomomorfismia $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

4.4. Olkoon K kunta ja olkoon $K' \subset K$ vakaa osajoukko, joka on kunta indusoiduilla laskutoimituksilla. Osoita, että $0_{K'} = 0_K$ ja $1_{K'} = 1_K$.

4.5. Osoita, että ei ole kuntahomomorfismia $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.[3]

4.6. Osoita, että $\mathbb{Q}(i)$ on kompleksilukujen kunnan alikunta.

4.7. Olkoon $d \in \mathbb{Z}$.Osoita, että $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ on reaalilukujen kunnan alikunta, jos $d > 0$ ja kompleksilukujen kunnan alikunta, jos $d < 0$.

4.8. Määritä Gaussin kokonaislukujen yksiköiden ryhmä.[4]

4.9. Olkoon d luonnollinen luku, joka ei ole neliö. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ on reaalilukujen renkaan alirengas.

4.10. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ on ääretön.[5]

4.11. Olkoon $d \equiv 1 \bmod 4$ kokonaisluku, joka ei ole jaollinen minkään kokonaisluvun $a > 1$ neliöllä. Osoita, että

$$\mathbb{Z}\Big[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\Big] = \Big\{ a + b\frac{1+\sqrt{d}}{2} \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z} \Big\}$$

on kompleksilukujen kunnan alirengas. Miksi oletamme kongruenssiehdon $d \equiv 1 \bmod 4$?

Kommutatiivisen renkaan $\mathbb{Z}\big[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\big]$ alkiot ovat *Eisensteinin kokonaislukuja*.

4.12. (a) Olkoon z Eisensteinin kokonaisluku. Osoita, että $\mathbf{n}(z) \in \mathbb{N}$.

(b) Määritä Eisensteinin kokonaislukujen yksiköiden ryhmä.[4]

4.13. Osoita, että Hamiltonin kvaterniot muodostavat renkaan.

4.14. Osoita, että yhtälöllä $x^2 = -1$ on äärettömän monta ratkaisua Hamiltonin kvaternioiden vinossa kunnassa.[6]

[2] Katso Harjoitustehtävä 3.20.
[3] Minne imaginaariyksikkö kuvautuisi?
[4] Käytä kompleksilukujen normin tai modulin ominaisuuksia.
[5] Etsi sopiva yksikkö ja käytä Propositiota 4.1.
[6] Tarkastele kvaternioita, jotka ovat muotoa $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

4.15. Todista Lemma 4.13.

4.16. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]^\times$ on ääretön.[5]

4.17. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]^\times$ on ääretön.[5]

4.18. Olkoon E kunta. Osoita, että $\bigcap\{F \subset E : E \text{ on alikunta}\}$ on kunnan E alikunta.

Luku 5

Jaollisuus

Tässä luvussa käsittelemme jaollisuutta kommutatiivisissa renkaissa. Tämä teoria yleistää kokonaislukujen jaollisuustuloksia yleisempään tilanteeseen.

5.1 Jaollisuudesta

Jaollisuus määritellään kommutatiivisessa renkaassa samalla tavalla kuin se määritellään lukuteorian kursseilla kokonaislukujen renkaassa.

Jos K on kommutatiivinen rengas ja $a, b, c \in K$ siten, että $ab = c$, niin a ja b ovat alkion c *tekijöitä*. Tällöin alkiot a ja b *jakavat* alkion c, mistä käytetään merkintää $a \mid c$ ja vastaavasti $b \mid c$. Jos a ei ole alkion b tekijä, käytetään merkintää $a \nmid b$.

Propositio 5.1. *Olkoon K kommutatiivinen rengas. Tällöin*
(1) $a \mid a$ kaikille $a \in K$.
(2) Jos $a \mid b$ ja $b \mid c$, niin $a \mid c$.
(3) Jos $a \mid b$ ja $a \mid c$, niin $a \mid b + c$.

Todistus. Harjoitustehtävä 5.1. □

Olkoon K kommutatiivinen rengas, jossa on vähintään 2 alkiota. Jos $a, b \in K$, $a, b \neq 0$ ja $ab = 0$, niin a ja b ovat *nollanjakajia*.
Kommutatiivinen rengas K, jossa ei ole nollanjakajia, on *kokonaisalue*.

Esimerkki 5.2. (a) Kokonaislukujen rengas $\mathbb{Z}$ on kokonaisalue.
(b) Jos $q = cd$ joillain $c, d \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, niin $c + q\mathbb{Z} \neq 0 \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $d + q\mathbb{Z} \neq 0 \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ja

$$(c + q\mathbb{Z})(d + q\mathbb{Z}) = cd + q\mathbb{Z} = q + q\mathbb{Z} = 0 + q\mathbb{Z} = 0 \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\,,$$

joten $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ei ole kokonaisalue. Tämä esimerkki osoittaa, että kokonaisalueen kuva rengashomomorfismissa ei välttämättä ole kokonaisalue.

Propositio 5.3. *Yksikkö ei ole nollanjakaja.*

Todistus. Olkoon a yksikkö ja oletetaan, että $ab = 0$. Silloin $b = a^{-1}\,0 = 0$. Vastaavasti nähdään, että $b = 0$, jos $ba = 0$. □

Seuraus 5.4. *Jakorenkaassa ei ole nollanjakajia. Erityisesti kunta on kokonaisalue.* □

Renkaassa R pätee *kertolaskun supistussääntö*, jos $b = c$ aina, kun jollekin $a \in R - \{0\}$ pätee $ab = ac$ tai $ba = ca$.

Renkaan kertolaskun supistussääntö poikkeaa hieman Luvussa 3.1 tarkastellusta laskutoimituksen supistussäännöstä, koska $0\,a = 0$ kaikille $a \in R$.

Propositio 5.5. *Kommutatiivinen rengas K on kokonaisalue, jos ja vain jos kertolaskun supistussääntö pätee renkaassa K.*

Todistus. Harjoitustehtävä 5.2 □

Propositio 5.6. *Kokonaisalueen karakteristika on 0 tai alkuluku.*

Todistus. Olkoon R rengas, jonka karakteristika on $\chi(R) = ab$, missä $a, b \notin \{0, 1\}$. Proposition 3.29 nojalla on täsmälleen yksi rengashomomorfismi $\phi\colon \mathbb{Z} \to R$. Karakteristikan määritelmän mukaan $\phi(ab) = 0$. Nyt $\phi(a), \phi(b) \neq 0$, koska $1 < a, b < ab = \chi(R)$. Lisäksi $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab) = 0$, joten R ei ole kokonaisalue. □

Lause 5.7. *Äärellinen kokonaisalue on kunta.*

Todistus. Olkoon E kokonaisalue ja olkoon $a \in E - \{0\}$. Kuvaus $\ell_a : E \to E$, $\ell_a(x) = ax$ on injektio Proposition 5.5 nojalla. Kun oletamme lisäksi, että E on äärellinen, niin kuvaus ℓ_a on myös surjektio. Tällöin on $\bar{a} \in E$, jolle $a\bar{a} = \ell_a(\bar{a}) = 1$. Koska E on kommutatiivinen, $\bar{a} = a^{-1}$. □

Seuraava äärellisiä renkaita koskeva tulos on vaikeampi todistaa, mutta se on hyvä tietää.

Lause 5.8 (Wedderburnin lause)**.** *Äärellinen jakorengas on kunta.*

Todistus. Katso esimerkiksi [Kna, Theorem 2.48] tai [War, Theorem 39.9]. □

5.2 Jaottomat alkiot ja alkualkiot

Kokonaisalueen E alkio $p \in E - (E^\times \cup \{0\})$ on *jaoton*, jos a tai b on yksikkö aina, kun $p = ab$.

Lukuteoriassa renkaan $\mathbb{Z}$ positiivisia jaottomia alkioita sanotaan *alkuluvuiksi*.

Seuraava tulos on hyödyllinen tutkittaessa jaollisuutta ja jaottomuutta luvussa 4.3 tarkastelluissa renkaissa $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Lemma 5.9. *Olkoon $d < 0$ kokonaisluku.*
(1) Jos $a \mid b$ renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, niin $\bar{a} \mid \bar{b}$ renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ja $\mathbf{n}(a) \mid \mathbf{n}(b)$ renkaassa $\mathbb{Z}$.
(2) Jos $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ja $\mathbf{n}(a) = 1$, niin $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$.

Todistus. (1) Jos $b = ac$, niin Proposition 1.26(1) nojalla $\bar{b} = \overline{ac} = \bar{a}\bar{c}$, joten $\bar{a} \mid \bar{b}$.
Jos $c = c_1 + ic_2\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, niin $\mathbf{n}(c) = c\,\bar{c} = c_1^2 - dc_2^2 \in \mathbb{N}$. Proposition 1.26(3) nojalla $\mathbf{n}(b) = \mathbf{n}(ac) = \mathbf{n}(a)\mathbf{n}(c)$, joten $\mathbf{n}(a) \mid \mathbf{n}(b)$.
(2) Jos $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, niin $\bar{a} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ja oletuksen mukaan $1 = \mathbf{n}(a) = a\bar{a}$, joten a on yksikkö. □

Esimerkki 5.10. Kokonaislukurenkaan $\mathbb{Z}$ alkuluvut eivät välttämättä ole jaottomia kaikissa renkaissa $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, joiden alirengas $\mathbb{Z}$ on. Esimerkiksi, jos $d \in \mathbb{Z}$ on alkuluku, niin se on jaoton kokonaislukujen renkaassa. Kuitenkin $\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ja $d = (\sqrt{d})^2$, joten d ei ole jaoton renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Osoitetaan, että $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ on jaoton. Huomataan ensin, että $\mathbf{n}(2) = 2^2 = 4$. Jos $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ja $ab = 2$, niin Lemman 5.9(1) nojalla $\mathbf{n}(a) \mid \mathbf{n}(2) = 4$ ja $\mathbf{n}(b) \mid \mathbf{n}(2) = 4$ renkaassa $\mathbb{Z}$. Siis $\mathbf{n}(a) \in \{1, 2, 4\}$. Renkaan $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ alkioiden normeille pätee

$$\mathbf{n}\big(m + n\sqrt{-5}\big) = m^2 + 5n^2 \in \mathbb{N}\,. \tag{5.1}$$

Siis renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ei ole alkiota, jonka normi on 2, joten a tai b on yksikkö Lemman 5.9(2) nojalla, joten $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ on jaoton.

Samalla tavalla osoitetaan, että myös alkiot 3 ja $1 \pm i\sqrt{5}$ ovat jaottomia renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$: Lasku osoittaa, että $\mathbf{n}(3) = 3^2 = 9$ ja $\mathbf{n}(1 \pm i\sqrt{5}) = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}) = 6$. Yhtälön (5.1) nojalla renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ei ole alkioita, joiden normi olisi 2 tai 3.

Kokonaisalueen K alkio $p \in K - (K^\times \cup \{0\})$ on *alkualkio* (tai *alkuluku*), jos kaikille $a, b \in K$ pätee $p \mid a$ tai $p \mid b$, jos $p \mid ab$.[a]

[a] Esimerkiksi kokonaislukuja käsiteltäessä merkintä p varataan usein alkualkioille tai alkuluvuille. Tämä johtuu siitä, että alkuluku on englanniksi prime, saksaksi Primzahl, ranskaksi nombre premier.

Propositio 5.11. *Kokonaisalueen alkualkiot ovat jaottomia.*

Todistus. Olkoon K kokonaisalue ja olkoon $p \in K$ alkualkio. Oletetaan, että $p = ab$. Riittää tarkastella tapaus $p \mid a$. Tällöin $a = pc$ jollakin $c \in K$, joten $p = pcb$. Proposition 5.5 nojalla kertolaskun supistussääntö on voimassa kokonaisalueessa K, joten $1 = cb$. Siis b on yksikkö, joten p on jaoton. □

Propositio 5.12 (Eukleideen lemma)**.** *Kokonaislukujen renkaan jaottomat alkiot ovat alkualkioita.*

Todistus. Katso Propositio **??**. □

Kokonaislukujen renkaassa jaottomat alkiot ja alkualkiot ovat samoja Eukleideen lemman ja Proposition 5.11 nojalla. Näillä määritelmillä luvut ± 2, ± 3, ± 5, ± 7, ± 11, ± 13, ± 17, ± 19, ± 23, ± 29 ja niin edelleen ovat renkaan $\mathbb{Z}$ alkualkioita ja jaottomia alkioita.

Kokonaislukuja yleisemmissä kokonaisalueissa jaottomat alkiot eivät kaikissa tapauksissa välttämättä ole alkualkioita.

Esimerkki 5.13. (a) Renkaan $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ jaottomat alkiot[1] 2, 3 ja $1 \pm i\sqrt{5}$ eivät ole al-

[1] Katso Esimerkki 5.10 .

kualkioita. Yhtälöstä

$$2 \cdot 3 = 6 = (1 + i\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})$$

näemme esimerkiksi, että $2 \mid (1+i\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$, mutta toisaalta $2 \nmid (1+i\sqrt{5})$ ja $2 \nmid (1-i\sqrt{5})$, koska $\mathbf{n}(2) = 4 \nmid 6 = \mathbf{n}(1 \pm i\sqrt{5})$.
(b) Renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ voidaan osoittaa, että alkiot 2, 3, $4+\sqrt{10}$ ja $4-\sqrt{10}$ ovat jaottomia mutta eivät alkualkioita, koska

$$2 \cdot 3 = 6 = (4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10})$$

mutta 2 tai 3 ei ole lukujen $(4 \pm \sqrt{10})$ tekijä ja vastaavasti $(4 \pm \sqrt{10})$ ei ole lukujen 2 tai 3 tekijä.

5.3 Renkaan $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ yksiköt

Sovellamme nyt liitteessä **??** kerrattavia kokonaislukujen jaollisuustuloksia jäännösluokkarenkaan $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ yksiköiden ryhmän ominaisuuksien tarkasteluun.

Propositio 5.14. *Olkoon $q \geq 2$. Tällöin $a + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on yksikkö, jos ja vain jos* $\operatorname{syt}(a, q) = 1$. *Jos p on alkuluku ja $a \not\equiv 0 \mod p$, niin $a + p\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.*

Todistus. Jäännösluokka $a + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on yksikkö, jos ja vain jos on $b \in \mathbb{Z}$, jolle pätee

$$1 + q\mathbb{Z} = (a + q\mathbb{Z})(b + q\mathbb{Z}) = ab + q\mathbb{Z}\,.$$

Tämä on yhtäpitävää ehdon $ab \equiv 1 \mod q$ kanssa, joka taas pätee, jos ja vain jos on $c \in \mathbb{Z}$, jolle $ab = 1 + cq$. Tämä Bézout'n yhtälön[2] nojalla yhtäpitävää sen kanssa, että $\operatorname{syt}(a, q) = 1$. □

Seuraus 5.15. *Jos p on alkuluku, niin $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on kunta.*

Lukuteoreettinen todistus. Seuraa Proposition 5.14 jälkimmäisestä väitteestä. □

Algebrallinen todistus. Olkoon p alkuluku ja olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$ab + p\mathbb{Z} = (a + p\mathbb{Z})(b + p\mathbb{Z}) = 0\,.$$

Alkuluvun määritelmän nojalla $p \mid a$ tai $p \mid b$, joten $a + p\mathbb{Z} = 0$ tai $b + p\mathbb{Z} = 0$. Siis $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on kokonaisalue, joten Lauseen 5.7 nojalla se on kunta. □

Propositio 5.16. *Olkoon $q \geq 2$. Alkio $a + q\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) - \{0\}$ on nollanjakaja, jos ja vain jos* $\operatorname{syt}(a, q) > 1$. *Jos q ei ole alkuluku, niin renkaassa $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on nollanjakajia.*

Todistus. Propositioiden 5.14 ja 5.3 nojalla $a + q\mathbb{Z}$ ei ole nollanjakaja, jos $\operatorname{syt}(a, q) = 1$. Jos $\operatorname{syt}(a, q) = d > 1$, niin $a = bd$ ja $q = cd$ joillain $b, c \in \mathbb{N} - \{0\}$. Tällöin

$$(a + q\mathbb{Z})(c + q\mathbb{Z}) = ac + q\mathbb{Z} = bdc + q\mathbb{Z} = bq + q\mathbb{Z} = 0 + q\mathbb{Z}\,.$$ □

Seuraus 5.17. *Renkaan $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ nollasta poikkeava alkio on joko nollanjakaja tai yksikkö.*

[2] Propositio **??**

Todistus. Seuraa Propositioista 5.16 ja 5.14. □

Esimerkki 5.18. (a) Seurausta 5.17 vastaava tulos ei päde renkaille yleisesti, sillä kokonaislukujen renkaassa $\mathbb{Z}$ ei ole nollanjakajia ja siinä on ainoastaan kaksi yksikköä ± 1.
(b) Jäännösluokkarengas $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ on kunta Seurauksen 5.15 nojalla. Alkiot $\pm 1 + 11\mathbb{Z}$ ovat omia käänteisalkioitaan kaikissa renkaissa. Kokeilemalla havaitsemme, että

$$\begin{aligned}(2+11\mathbb{Z})(6+11\mathbb{Z}) &= 12+11\mathbb{Z} = 1+11\mathbb{Z}\,,\\ (3+11\mathbb{Z})(4+11\mathbb{Z}) &= 12+11\mathbb{Z} = 1+11\mathbb{Z}\,,\\ (5+11\mathbb{Z})(9+11\mathbb{Z}) &= 45+11\mathbb{Z} = 1+11\mathbb{Z}\,,\\ (7+11\mathbb{Z})(8+11\mathbb{Z}) &= 56+11\mathbb{Z} = 1+11\mathbb{Z}\,,\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}(2+11\mathbb{Z})^{-1} &= (6+11\mathbb{Z})\,,\\ (3+11\mathbb{Z})^{-1} &= (4+11\mathbb{Z})\,,\\ (5+11\mathbb{Z})^{-1} &= (9+11\mathbb{Z})\,,\\ (7+11\mathbb{Z})^{-1} &= (8+11\mathbb{Z})\,.\end{aligned}$$

(c) Proposition 5.14 nojalla $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ei ole kunta. Renkaan $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ yksiköt ovat $1+12\mathbb{Z}$, $5+12\mathbb{Z}$, $7+12\mathbb{Z}$ ja $11+12\mathbb{Z} = -1+12\mathbb{Z}$ ja huomaamme, että

$$\begin{aligned}(5+12\mathbb{Z})^2 &= 25+12\mathbb{Z} = 1+12\mathbb{Z} \quad \text{ja}\\ (7+12\mathbb{Z})^2 &= 49+12\mathbb{Z} = 1+12\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Seurauksen 5.17 nojalla renkaan muut nollasta poikkeavat alkiot ovat nollanjakajia. Kokeilemalla havaitsemme, että

$$\begin{aligned}(2+12\mathbb{Z})(6+12\mathbb{Z}) &= 12+12\mathbb{Z} = 0+12\mathbb{Z}\,,\\ (3+12\mathbb{Z})(4+12\mathbb{Z}) &= 12+12\mathbb{Z} = 0+12\mathbb{Z}\,,\\ (8+12\mathbb{Z})(3+12\mathbb{Z}) &= (2+12\mathbb{Z})(4+12\mathbb{Z})(3+12\mathbb{Z}) = 0+12\mathbb{Z}\,,\\ (9+12\mathbb{Z})(4+12\mathbb{Z}) &= (3+12\mathbb{Z})(3+12\mathbb{Z})(4+12\mathbb{Z}) = 0+12\mathbb{Z} \quad \text{ja}\\ (10+12\mathbb{Z})(6+12\mathbb{Z}) &= (5+12\mathbb{Z})(2+12\mathbb{Z})(6+12\mathbb{Z}) = 0+12\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Jäännösluokkarenkaiden yksiköiden ryhmän rakennetta tarkastellaan kurssin RYHMÄT luvussa 8.4. .

Lause 5.19. *Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

(1) $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on kokonaisalue.

(2) $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on kunta.

(3) q on alkuluku.

Lukuteoreettinen todistus. Seuraa Propositioista 5.14 ja 5.16. □

Algebrallinen todistus. Kohtien (1) ja (2) yhtäpitävyys seuraa Lauseesta 5.7. Kohdat (1) ja (3) ovat yhtäpitäviä Seurauksen 5.15 ja Esimerkin 5.2(b) nojalla. □

Harjoitustehtäviä

5.1. Olkoon K kommutatiivinen rengas. Osoita, että

(1) $a \mid a$ kaikille $a \in K$.

(2) Jos $a \mid b$ ja $b \mid c$, niin $a \mid c$.

(3) Jos $a \mid b$ ja $a \mid c$, niin $a \mid b + c$.

5.2. Todista Propositio 5.5.

5.3. (1) Olkoon K kommutatiivinen rengas. Olkoon $u \in K^\times$ ja olkoon $a \in K$. Osoita, että $a \in K^\times$, jos $a \mid u$.

(2) Olkoon K kokonaisalue. Jos $a \mid b$ ja $b \mid a$, niin $a = ub$ jollain $u \in K^\times$.

5.4. Olkoon K kommutatiivinen rengas. Olkoot $a, b \in K$ siten, että ab on nollan jakaja. Osoita, että a on nollan jakaja tai b on nollan jakaja.

5.5. Olkoon D äärellinen rengas, jossa ei ole nollanjakajia. Osoita, että

(1) jokaisella $d \in D - \{0\}$ on vasen ja oikea käänteisalkio kertolaskun suhteen, ja

(2) D on jakorengas.[3]

5.6. Osoita, että $\mathbb{Z}[i]$ on kokonaisalue. Osoita, että $1 + i$ on jaoton renkaassa $\mathbb{Z}[i]$.

5.7. Olkoon p alkuluku ja olkoon

$$K = \left\{ \frac{r}{s} : r, s \in \mathbb{Z},\ s \not\equiv 0 \bmod p \right\} \subset \mathbb{Q}\,.$$

(1) Osoita, että K on rationaalilukujen renkaan alirengas.

(2) Osoita, että $\frac{a}{b} \in K$ on yksikkö, jos ja vain jos a ei ole jaollinen alkuluvulla p.

(3) Missä kohtaa käytimme oletusta, että p on alkuluku?

5.8. Olkoot $q_1, q_2, \ldots, q_N \in \mathbb{Z}$ siten, että $\operatorname{syt}(q_i, q_j) = 1$ kaikilla $i \neq j$. Olkoon $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $q_i \mid k$ kaikilla $1 \leq i \leq N$. Osoita, että $\prod_{i=1}^{N} q_i \mid k$.

5.9. Määritä renkaan $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ yksiköt ja nollanjakajat. Määritä renkaan $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ jokaisen yksikön käänteisalkio.

5.10. Määritä renkaan $\mathbb{Z}/14\,\mathbb{Z}$ yksiköt ja nollanjakajat. Määritä renkaan $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ jokaisen yksikön käänteisalkio.

5.11. Osoita, että kokonaisalueen K ainoat idempotentit[4] alkiot ovat 0 ja 1.

5.12. Määritä renkaan $\mathbb{Z}/15\,\mathbb{Z}$ yksiköt ja nollanjakajat. Määritä renkaan $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ jokaisen yksikön käänteisalkio.

[3] Katso määritelmät luvusta 1.6. Lauseen 5.7 todistus antaa idean kohdan (1) todistukseen, kohdassa (2) pitää vielä näyttää, että vasen ja oikea käänteisalkio ovatkin sama alkio.

[4] Katso Harjoitustehtävä 3.20.

Luku 6

Polynomirenkaat

Tässä luvussa tutustumme polynomeihin, joiden kertoimet ovat kommutatiivisessa renkaassa ja määrittelemme niille laskutoimitukset, jotka ovat samat kuin tutussa reaalikertoimisessa tapauksessa. Näin saamme määriteltyä yhden muuttujan polynomirenkaat, joita käytetään kurssin viimeisessä luvussa kuntalaajennusten ja erityisesti äärellisten kuntien konstruktiossa.

6.1 Polynomit ja polynomifunktiot

Tässä luvussa ja myöhemmin polynomeja käsiteltäessä X on muodollinen symboli, jota usein kutsutaan muuttujaksi.

Olkoon K kommutatiivinen rengas. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoot $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in K$. Lauseke

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

on *yhden muuttujan K-kertoiminen polynomi*. Luku a_0 on polynomin $P(X)$ *vakiotermi*. Jos $m > n$ ja $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_m = 0$, niin

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k .$$

Käytämme K-kertoimisten polynomien joukolle merkintää

$$K[X] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k : n \in \mathbb{N},\ a_k \in K \text{ kaikilla } 0 \leq k \leq n \right\}.$$

Kommutatiivinen rengas K on polynomin $P(X) \in K[X]$ *kerroinrengas*.

On hyvä huomata, että edellä määrittelimme polynomit algebrallisina lausekkeina, erityisesti polynomit eivät ole funktioita. Algebrassa tulee pitää erillään polynomin ja polynomifunktion käsitteet ja siksi on hyvä käyttää polynomille ja polynomifunktiolle selkeästi erilaisia merkintätapoja.

Olkoon K kommutatiivinen rengas. Polynomin $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$ määräämä *polynomifunktio* on $P\colon K \to K$,

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = P(x)\,.$$

Polynomien joukko voi renkaasta riippuen olla paljon suurempi joukko kuin vastaava polynomifunktioiden joukko: Jos K on kommutatiivinen rengas, jossa on ainakin kaksi alkiota, niin polynomirengas $K[X]$ on ääretön. Kuitenkin, jos K on äärellinen, niin funktioita joukolta K joukkoon K on ainoastaan äärellinen määrä.

Kun tarkastelemme $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$-kertoimisia polynomeja, merkitsemme kerrointa $a+q\mathbb{Z}$ yksinkertaisuuden vuoksi edustajalla a.

Esimerkki 6.1. Kuvausten joukossa $\{f\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ on neljä alkiota. Toisaalta joukko $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ on ääretön, koska se sisältää esimerkiksi polynomit $P_k(X) = X^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Polynomifunktioille $P_k\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pätee $P_k(0) = 0$ ja $P_k(1) = 1$ kaikilla $k \geq 1$, joten polynomit $P_k(X)$ määräävät saman polynomifunktion kaikilla $k \geq 1$.

6.2 Polynomirengas

Tässä luvussa määrittelemme K-kertoimisten polynomien joukossa kaksi laskutoimitusta ja tarkastelemme näin saatavan renkaan perusominaisuuksia.

Olkoon K kommutatiivinen rengas. Polynomien[a]

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X] \quad \text{ja} \quad Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in K[X]$$

summa on

$$P(X) + Q(X) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k \in K[X] \tag{6.1}$$

ja niiden *tulo* on

$$P(X)Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) X^k \in K[X]. \tag{6.2}$$

[a] Yhteenlaskun määritelmä on helpoin kirjoittaa, kun molempien polynomien summilla on sama yläraja n. Voimme rajoittua tähän tapaukseen lisäämällä tarvittaessa toiseen polynomiin termejä, joiden kerroin on 0.

Propositio 6.2. *Olkoon K kommutatiivinen rengas. Joukko $K[X]$ varustettuna polynomien yhteen- ja kertolaskulla on kommutatiivinen rengas.*

Todistus. Selvästi polynomit $0_{K[X]} = 0_K X^0$ ja $1_{K[X]} = 1_K X^0$ ovat yhteenlaskun ja kertolaskun neutraalialkiot. Muut renkaan määrittelevät ominaisuudet seuraavat suoraviivaisesti siitä, että K on kommutatiivinen rengas, Harjoitustehtävä 6.1. □

Olkoon K kommutatiivinen rengas. Rengas $K[X]$ on *K-kertoiminen polynomirengas.*

Lemma 6.3. *Olkoon K kommutatiivinen rengas. Kuvaus $i\colon K \to K[X]$, joka kuvaa renkaan K alkion a polynomiksi $a = aX^0 \in K[X]$, on injektiivinen rengashomomorfismi.*

Todistus. Kuvaus i kuvaa ainoastaan alkion $0 \in K$ nollapolynomiksi, joten Proposition 3.25 nojalla i on injektio, kunhan se osoitetaan homomorfismiksi. Olkoot siis $a, b \in K$. Tällöin polynomien laskutoimituksen määritelmän nojalla

$$i(a) + i(b) = aX^0 + bX^0 = (a+b)X^0 = i(a+b)$$

ja

$$i(a)\ i(b) = aX^0\ bX^0 = abX^0 = i(ab)\,.$$

Lisäksi $i(1) = 1 \cdot X^0$, joten i on homomorfismi. □

Olkoon K kommutatiivinen rengas. Olkoon $\mathrm{Fun}\colon K[X] \to K^K$,

$$\mathrm{Fun}(P(X)) = P$$

kuvaus, joka liittää polynomiin $P(X)$ sitä vastaavan polynomifunktion P.

Propositio 6.4. *Olkoon K kommutatiivinen rengas. Kuvaus $\mathrm{Fun}\colon K[X] \to K^K$ on rengashomomorfismi.*

Todistus. Harjoitustehtävä 6.7. □

Propositio 6.5. *Polynomirenkaan karakteristika on sama kuin sen kerroinrenkaan karakteristika.*

Todistus. Lemman 6.3 mukaan polynomirenkaalla $K[X]$ on kerroinrenkaan K kanssa isomorfinen alirengas $S = \{aX^0 : a \in K\}$. Renkaan $K[X]$ kertolaskun neutraalialkio on renkaassa S, joten renkailla $K[X]$ ja S on sama karakteristika. □

6.3 Polynomin vaihtoehtoinen määritelmä

Polynomeille $P(X), Q(X) \in K[X]$ pätee $P(X) = Q(X)$ täsmälleen silloin, kun niiden kerroinjonot ovat samat. Vähemmän havainnollinen mutta edellä esitettyä täsmällisempi ja sen kanssa yhtäpitävä tapa määritellä polynomit on korvata polynomin lauseke $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ sen kertoimien muodostamalla jonolla $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ ja määritellä yhteenlasku komponenteittain kuten jonoille on tapana ja kertolasku kaavan (6.2) mukaisesti. Tällöin jono $(0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ on symbolin X vastine. Seuraavassa määritelmässä

jono $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ ajatellaan funktiona $\omega\colon \mathbb{N} \to K$ siten, että $\omega(k) = a_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Olkoon K kommutatiivinen rengas, jossa on vähintään kaksi alkiota. Kuvaus $\omega\colon \mathbb{N} \to K$, jolle on $N_\omega \in \mathbb{N}$ siten, että $\omega(k) = 0$ kaikille $k \geq N_\omega$, on *K-kertoiminen polynomi.*

Joukko

$$K[X] = \{\omega\colon \mathbb{N} \to K\} = K^{\mathbb{N}}$$

varustettuna laskutoimituksilla

$$(\omega + \omega')(k) = \omega(k) + \omega'(k)$$

ja

$$(\omega\omega')(k) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}:i+j=k} \omega(i)\omega'(j)$$

on *K-kertoiminen polynomirengas.*

6.4 Aste

Tässä luvussa tutustumme polynomin asteen perusominaisuuksiin. Aste on käyttökelpoinen itseisarvon korvike polynomien jakoyhtälössä, jota käsittelemme luvussa 6.5.

Symbolilla $-\infty$ on seuraavat ominaisuudet:

- $-\infty < a$ kaikilla kokonaisluvuilla a,
- $-\infty + -\infty = -\infty$ ja
- $-\infty + a = -\infty$ kaikilla kokonaisluvuilla a.

Symbolille $-\infty$ ei ole määritelty muita ominaisuuksia, käytämme sitä ainoastaan nollapolynomin asteen merkkinä.

Olkoot $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in K$ ja olkoon $a_n \neq 0$. Polynomin

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

aste on $\deg(P(X)) = n$ ja a_n on polynomin $P(X)$ *korkeimman asteen kerroin.*
Nollapolynomin 0 *aste* on $-\infty$.

Esimerkki 6.6. (a) Olkoot $P(X), Q(X) \in \mathbb{Z}[X]$,

$$P(X) = 2X^2 + 2, \quad Q(X) = 1 + 2X\ .$$

Tällöin

$$P(X)Q(X) = 4X^3 + 2X^2 + 4X + 2.$$

Nyt $\deg(P(X)) = 2$, $\deg(Q(X)) = 1$ ja $\deg(P(X)Q(X)) = 3$.
(b) Jos polynomit $P(X), Q(X) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ määritellään samoilla lausekkeilla kuin kohdassa (a), niin

$$P(X)Q(X) = 2X^2 + 2.$$

Siis $P(X)Q(X) = P(X) = P(X) \cdot 1$ mutta $Q(X) \neq 1$, joten kertolaskun supistussääntö ei päde polynomirenkaassa $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$.

Lisäksi pätee $\deg(P(X)) = 2$ ja $\deg(Q(X)) = 1$ mutta

$$\deg(P(X)Q(X)) = 2 < 3 = 2 + 1$$

ja

$$-\infty = \deg 0 = \deg((2X)(2X)) < 2\deg(2X) = 2.$$

Lemma 6.7. *Olkoon K kommutatiivinen rengas, $K \neq \{0\}$. Tällöin*

$$\deg(P(X)Q(X)) \leq \deg P(X) + \deg Q(X)$$

kaikille $P(X), Q(X) \in K[X]$.

Todistus. Olkoot $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ja $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ ja oletetaan, että $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Tulopolynomin $P(X)Q(X)$ korkeimman asteen termi on $a_n b_m X^{n+m}$, jos $a_n b_m \neq 0$, muuten aste on alempi. □

Seuraava tulos osoittaa, että kokonaisalueominaisuus periytyy kerroinrenkaasta polynomirenkaaseen.

Propositio 6.8. *Jos K on kokonaisalue ja $P(X), Q(X) \in K[X]$, niin*

$$\deg(P(X)Q(X)) = \deg(P(X)) + \deg(Q(X)). \tag{6.3}$$

Lisäksi $K[X]$ on kokonaisalue.

Todistus. Oletetaan, että $P(X), Q(X) \in K[X] - \{0\}$. Lemman 6.7 merkinnöillä polynomin $P(X)Q(X)$ korkeimman asteen termi on $a_n b_m X^{m+n}$, missä $a_n b_m \neq 0$, sillä K on kokonaisalue. Siis yhtälö (6.3) pätee näille polynomeille.

Oletetaan sitten, että $P(X) = 0$. Tällöin kaikille $Q(X)$ pätee $0 \cdot Q(X) = 0$, joten

$$\deg(0 \cdot Q(X)) = \deg 0 = -\infty = -\infty + \deg Q(X) = \deg 0 + \deg Q(X)\,. \tag{6.4}$$

Siis yhtälö (6.3) pätee kaikille polynomeille.

Erityisesti näimme, että kahden nollasta poikkeavan polynomin tulo ei ole nollapolynomi, koska $\deg P(X)Q(X) \in \mathbb{N}$. □

Yhtälöstä (6.4) näemme, että polynomin $0 \in K[X]$ aste ei voi olla reaaliluku.

Seuraus 6.9. *Jos $K \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ tai $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jollain alkuluvulla p, niin*

$$\deg(P(X)Q(X)) = \deg P(X) + \deg Q(X)$$

kaikille $P(X), Q(X) \in K[X]$. □

Propositio 6.10. *Jos K on kunta, niin $P(X) \in K[X]^\times$, jos ja vain jos* $\deg P(X) = 0$.

Todistus. Jos $Q(X) \in K[X] - \{0\}$, niin

$$\deg(P(X)Q(X)) = \deg P(X) + \deg Q(X) \geq \deg P(X)\,,$$

joten $P(X)$ ei ole yksikkö, jos $\deg P(X) \geq 1$. Jos taas $\deg P(X) = 0$, niin $P(X) = aX^0$ jollain $a \in K^\times$ ja pätee $aX^0\ a^{-1}X^0 = 1X^0$, joten aX^0 on yksikkö. □

Polynomirengas ei ole koskaan kunta. Jos K on kokonaisalue, niin Proposition 6.8 mukaan ainoat polynomit, joilla on käänteisalkio kertolaskun suhteen, ovat vakiopolynomit u, missä $u \in K^\times$. Sen sijaan, jos kerroinrengas ei ole kokonaisalue, niin esimerkiksi vakiopolynomeilla $a = aX^0$, missä a on nollanjakaja renkaassa K, ei ole käänteisalkiota Propositioiden 5.3 ja 6.2 nojalla.

Propositiosta 6.8 seuraa, että ensimmäisen asteen polynomit ovat jaottomia kuntakertoimisessa polynomirenkaassa, koska kaikki nollasta poikkeavat polynomit, joiden aste on pienempi kuin 1 ovat vakiopolynomeita, siis yksiköitä. Korkeamman asteen polynomin osoittaminen jaottomaksi ei ole välttämättä kovin helppoa.

6.5 Polynomien jakoyhtälö

Yleistämme nyt kokonaislukujen jakoyhtälön[1] polynomirenkaille.

Lause 6.11 (Polynomien jakoyhtälö)**.** *Olkoon K kommutatiivinen rengas, jossa on vähintään kaksi alkiota. Olkoot $A(X)$, $B(X) \in K[X]$ siten, että $B(X) \neq 0$ ja polynomin $B(X)$ korkeimman asteen termin kerroin on yksikkö. Tällöin on yksikäsitteiset polynomit $Q(X), J(X) \in K[X]$, joille pätee*

$$A(X) = Q(X)B(X) + J(X)$$

ja $\deg J(X) < \deg B(X)$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että on polynomit $Q(X)$ ja $J(X)$, jotka toteuttavat väitteen yhtälön. Jos $B(X)$ jakaa polynomin $A(X)$, ei ole mitään todistettavaa. Muuten olkoon

$$S = \big\{A(X) - D(X)B(X) : D(X) \in K[X]\big\}.$$

Koska $B(X)$ ei jaa polynomia $A(X)$, niin $0 \notin S$, joten joukko

$$\deg S = \{\deg P(X) : P(X) \in S\}$$

on luonnollisten lukujen joukon epätyhjä osajoukko ja sillä on siis minimi $m \geq 0$.

Olkoon $Q(X) \in K[X]$ polynomi, jolle pätee $\deg(A(X) - Q(X)B(X)) = m$. Olkoon

$$J(X) = A(X) - Q(X)B(X) = a_m X^m + \cdots + a_0.$$

Nyt polynomit $Q(X)$ ja $J(X)$ siis toteuttavat väitteen yhtälön.

[1] Propositio **??**

Osoitetaan sitten, että $m < d = \deg B(X)$. Olkoon b_d polynomin $B(X)$ korkeimman asteen kerroin, joka on oletuksen mukaan yksikkö. Jos olisi $m \geq d$, niin

$$J(X) - a_m b_d^{-1} X^{m-d} B(X) = A(X) - (Q(X) + a_m b_d^{-1} X^{m-d}) B(X) \in S$$

ja $\deg \big(J(X) - a_m b_d^{-1} X^{m-d} B(X)\big) < m$, mutta tämä on mahdotonta, koska polynomin $J(X)$ aste on minimaalinen.

Osoitetaan lopuksi polynomien $Q(X)$ ja $J(X)$ yksikäsitteisyys. Jos $\widetilde{Q}(X)$ ja $\widetilde{J}(X)$ ovat polynomeja, joille pätee

$$A(X) = \widetilde{Q}(X)B(X) + \widetilde{J}(X)$$

ja $\deg \widetilde{J}(X) < d$, niin

$$(Q(X) - \widetilde{Q}(X))B(X) = \widetilde{J}(X) - J(X).$$

Jos $\widetilde{Q}(X) \neq Q(X)$, niin yhtälön vasemman puolen polynomin aste on vähintään d, koska polynomin $B(X)$ korkeimman asteen termi on oletuksen mukaan yksikkö.[2] Kuitenkin, koska $\deg J(X) < d$ ja $\deg \widetilde{J}(X) < d$, niin

$$\deg(\widetilde{J}(X) - J(X)) < d.$$

Siis $\widetilde{Q}(X) = Q(X)$ ja $\widetilde{J}(X) = J(X)$. □

Seuraus 6.12 (Kuntakertoimisten polynomien jakoyhtälö)**.** *Olkoon K kunta. Olkoot $A(X)$, $B(X) \in K[X]$ siten, että $B(X) \neq 0$. Tällöin on yksikäsitteiset $Q(X), J(X) \in K[X]$, joille*

$$A(X) = Q(X)B(X) + J(X)$$

ja $\deg J(X) < \deg B(X)$. □

Esimerkki 6.13. Jakoyhtälö voidaan toteuttaa algoritmisesti jakokulman avulla.

Olkoot $A(X) = 2X^3 + X^2 - X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ ja $B(X) = X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$. Tällöin jakokulma antaa

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 2X & +1 & & \\
\cline{2-5}
X^2-2 \;\big| & 2X^3 & +X^2 & -X & -1 \\
\cline{2-5}
 & \mp 2X^3 & & \pm 4X & \\
\cline{2-4}
 & & X^2 & +3X & -1 \\
 & & X^2 & & \pm 2 \\
\cline{3-5}
 & & & 3X & +1
\end{array}$$

Proposition 6.8 nojalla lasku pysähtyy tähän, koska $\deg(3X + 1) < \deg(X^2 - 2)$. Saimme siis yhtälön

$$2X^3 + X^2 - X - 1 = (2X + 1)(X^2 - 2) + 3X + 1\,.$$

[2]Katso Lemma 5.3 ja Proposition 6.8 todistus.

Esimerkki 6.14. Olkoot $A(X) = 2X^3 + X^2 - X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ ja $B(X) = 2X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Jakoyhtälö ei toimi tässä tapauksessa, koska polynomin $B(X)$ korkeimman asteen kerroin ei ole yksikkö. Jakokulmassa päädytään ongelmalliseen tilanteeseen

$$2X^3 + X^2 - X - 1 = X^2(2X + 1) - X - 1,$$

josta ei voi jatkaa.

Jos $A(X) = 2X^3 + X^2 - X - 1 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ ja $B(X) = 2X + 1 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$, niin jakoyhtälö toimii, koska $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ on kunta. Nyt

$$2X^3 + X^2 - X - 1 = (X^2 + 1)(2X + 1) + 1\,.$$

Jakoyhtälö toimii myös, jos $A(X) = 2X^3 + X^2 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ja $B(X) = 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Tällöin

$$2X^3 + X^2 - X - 1 = (X^2 - \frac{1}{2})(2X + 1) - \frac{1}{2}\,.$$

6.6 Polynomien juuret ja jaollisuus

Olkoon K kommutatiivinen rengas ja olkoon $P(X) \in K[X]$. Alkio $c \in K$ on polynomin $P(X)$ *juuri*, jos $P(c) = 0$.

Kun tarkastelemme $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$-kertoimisia polynomeja, laskemme polynomifunktioiden arvoja usein edustajien avulla ja tarkastelemme arvoja mod q.

Esimerkki 6.15. (a) Esimerkin 6.6(a) polynomeilla $P(X), Q(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ei ole juuria. Sen sijaan samalla lausekkeella määritellyllä rationaalilukukertoimisella polynomilla $Q(X) = 1 + 2X \in \mathbb{Q}[X]$ on juuri, sillä $Q(-\frac{1}{2}) = 0$. Yleisemmin, jos K on kunta ja $P(X) = aX + b \in K[X]$ on ensimmäisen asteen polynomi, niin polynomilla $P(X)$ on juuri, sillä $P(-\frac{b}{a}) = 0$.

(b) Esimerkin 6.6(b) polynomin $P(X) = 2X^2 + 2 \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ juuret ovat $1 + 4\mathbb{Z}$ ja $3 + 4\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} P(0) &= 2 \cdot 0^2 + 2 = 2 \equiv 2 \mod 4, \\ P(1) &= 2 \cdot 1^2 + 2 = 4 \equiv 0 \mod 4, \\ P(2) &= 2 \cdot 2^2 + 2 = 10 \equiv 2 \mod 4, \\ P(3) &= 2 \cdot 3^2 + 2 = 20 \equiv 0 \mod 4. \end{aligned}$$

Polynomilla $Q(X) = 1 + 2X \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ ei ole juuria, koska

$$Q(0) \equiv Q(2) \equiv 1 \not\equiv 0 \mod 4$$

ja

$$Q(1) \equiv Q(3) \equiv 3 \not\equiv 0 \mod 4\,.$$

(c) Polynomin $X^2 + X = X(X + 1) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ juuret ovat $0, 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Jakoyhtälö antaa seuraavan perustuloksen:

Propositio 6.16. *Olkoon K kommutatiivinen rengas, jossa on vähintään kaksi alkiota. Olkoon $P(X) \in K[X]$ ja olkoon $c \in K$. Tällöin c on polynomin $P(X)$ juuri, jos ja vain jos $(X - c) \mid P(X)$.*

Todistus. Oletetaan, että $P(c) = 0$. Koska polynomin $X - c$ korkeimman asteen termin kerroin on $1 \in K^\times$, voimme soveltaa jakoyhtälöä.[3] Jakoyhtälön mukaan on K-kertoimiset polynomit $Q(X)$ ja $J(X)$, joille $\deg J(X) < 1$ ja

$$P(X) = Q(X)(X - c) + J(X)\,. \tag{6.5}$$

Koska $\deg J < 1$, $J(X)$ on vakiopolynomi $J(X) = b$ jollakin $b \in K$. Erityisesti

$$0 = P(c) = Q(c)(c - c) + J(c) = b,$$

joten $b = 0$. Siis $J(X) = 0$ ja yhtälön (6.5) nojalla $(X - c)|P(X)$.

Toisaalta, jos $P(X) = (X - c)Q(X)$ jollain polynomilla $Q(X) \in K[X]$, niin

$$P(c) = (c - c)Q(c) = 0. \qquad \square$$

Seuraus 6.17. *Olkoon K kunta. Toisen tai kolmannen asteen polynomi $P(X) \in K[X]$ on jaoton, jos ja vain jos sillä ei ole juurta kunnassa K.*

Todistus. Harjoitustehtävä 6.12 $\square$

Esimerkki 6.18. (a) Toisen asteen polynomi $P(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ ei ole jaoton koska

$$X^2 + 1 = (X + i)(X - i)\,.$$

Tämän polynomin juuret ovat $\pm i \in \mathbb{C}$. Seurauksen 6.17 nojalla samalla lausekkeella määritellyt polynomit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ ja $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ovat jaottomia, koska niillä ei ole juuria.

Polynomi $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ on on myös jaoton: Se ei ole jaollinen muilla vakiopolynomeilla kuin ± 1. Jos se olisi jaollinen ensimmäisen asteen polynomilla, sama pätisi myös renkaassa $\mathbb{Q}[X]$, jolloin $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ei olisi jaoton. Mutta edellä näimme, että $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ on jaoton. Jaottomuuden voi perustella myös Proposition 6.16 avulla.

(b) Renkaassa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ on neljä toisen asteen polynomia: X^2, $X^2 + 1$, $X^2 + X$ ja $X^2 + X + 1$. Proposition 6.17 mukaan polynomi $X^2 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ on jaoton, koska sillä ei ole yhtään juurta kahden alkion kunnassa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, katso Harjoitustehtävä 6.5. Sen sijaan mikään muu toisen asteen polynomi ei ole jaoton tässä renkaassa, koska $X^2 = XX$, $X^2 + X = X(X + 1)$ ja $X^2 + 1 = (X + 1)^2$.

(c) Seuraus 6.17 soveltuu vain toisen ja kolmannen asteen polynomien tarkasteluun. Neljännen asteen polynomi $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)^2 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ ei ole jaoton, koska se on toisen asteen polynomin neliö. Sillä ei ole yhtään juurta.

[3] Lause 6.11

6.7 Juurien lukumäärä

Olkoon c polynomin $P(X) \in K[X]$ juuri. Jos $P(X) = (X-c)^k Q(X)$ jollain $Q(X) \in K[X]$ ja c ei ole polynomin $Q(X)$ juuri, niin c on polynomin $P(X)$ *k-kertainen juuri*.

Kun lasketaan polynomin $P(X)$ juuria, k-kertainen juuri lasketaan k juureksi.

Esimerkki 6.19. Polynomilla $X^2(X-1) \in \mathbb{C}[X]$ on kertaluku huomioiden kolme juurta, koska 0 on kaksinkertainen juuri.

Lause 6.20. *Olkoon K kokonaisalue ja olkoon $n \geq 0$. Jos $P(X) \in K[X] - \{0\}$ ja $\deg P(X) = n$, niin polynomilla $P(X)$ on korkeintaan n juurta.*

Todistus. Jos polynomin aste on 0, niin se on nollasta poikkeava vakiopolynomi. Tällaisella polynomilla ei ole juuria, joten väite pätee, kun $n = 0$. Oletetaan, että kaikilla $n-1$ asteen polynomeilla on korkeintaan $n-1$ juurta. Olkoon $P(X)$ polynomi, jonka aste on n. Jos polynomilla $P(X)$ on juuri $c \in K$, niin Proposition 6.16 nojalla $P(X) = (X-c)Q(X)$ jollain $Q(X) \in K[X]$. Koska K on kokonaisalue, $P(a) = 0$, jos ja vain jos $a = c$ tai $Q(a) = 0$. Proposition 6.8 mukaan $\deg(Q(X)) = n-1$ ja sillä on siis induktio-oletuksen mukaan korkeintaan $n-1$ juurta. Siis polynomilla $P(X)$ on kertaluku huomioiden korkeintaan n juurta. □

Seuraus 6.21. *Olkoon K kokonaisalue. Olkoot $c_1, c_2, \ldots, c_k$ polynomin $P(X) \in K[X]$ juuria. Tällöin on $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja $Q(X) \in K[X]$, joille pätee*

$$P(X) = (X-c_1)^{m_1}(X-c_2)^{m_2}\cdots(X-c_k)^{m_k}Q(X)$$

ja $\deg Q(X) = \deg P(X) - (m_1 + m_2 + \cdots + m_k)$. □

Esimerkki 6.22. Lauseen 6.20 väite ei päde kaikille kommutatiivisille renkaille. Toisen asteen polynomilla $X^2 \in (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})[X]$ on neljä juurta: $0^2 \equiv 4^2 \equiv 8^2 \equiv 12^2 \equiv 0 \mod 16$. Tämä on mahdollista, koska kerroinrengas $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ ei ole kokonaisalue.

Polynomin $X^2 \in (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})[X]$ voi esittää kolmella eri tavalla kahden ensimmäisen asteen polynomin tulona:

$$X^2 = X\,X = (X+4)(X+12) = (X+8)^2\,.$$

Tästä näemme, että $0 + 16\mathbb{Z}$ ja $8 + 16\mathbb{Z}$ ovat kaksinkertaisia juuria, joten toisen asteen polynomilla $Q(X)$ on kertaluku huomioiden 6 juurta.

Propositio 6.23. *Olkoon K ääretön kokonaisalue. Tällöin jokaista kokonaisalueen K polynomifunktiota vastaa yksikäsitteinen polynomi renkaassa $K[X]$.*

Todistus. Proposition 6.4 nojalla kuvaus $\mathrm{Fun}\colon K[X] \to K^K$ on rengashomomorfismi. Proposition 3.25 nojalla riittää osoittaa, että tämän homomorfismin ydin on $\{0\}$. Jos $\mathrm{Fun}(P(X))$ on nollafunktio, niin polynomilla $P(X)$ on äärettömän monta juurta. Lauseen 6.20 nojalla ainoa tällainen polynomi on $0 \in K[X]$. □

Seuraus 6.24. *Jos $K \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, niin* $\mathrm{Fun}\colon K[X] \to K^K$ *on injektio.* □

6.8 Algebrallisesti suljetut kunnat

Kunta K on *algebrallisesti suljettu*, jos jokaisella vakiosta poikkeavalla polynomilla $P(X) \in K[X]$ on juuri.

Esimerkki 6.25. (a) Reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$ ei ole algebrallisesti suljettu: Esimerkiksi toisen asteen polynomilla $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ei ole juurta.

(b) Rationaalilukujen kunta $\mathbb{Q}$ ei ole algebrallisesti suljettu: Esimerkiksi toisen asteen polynomilla $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ei ole juurta.

(c) Kahden alkion kunta $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ei ole algebrallisesti suljettu: Esimerkiksi toisen asteen polynomilla $X^2 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ ei ole juurta.

(d) Toisen asteen polynomilla $X^2+1 \in \mathbb{C}[X]$ on juuret $\pm i$ ja polynomilla $X^2+X+1 \in \mathbb{C}[X]$ on juuret $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Lause 6.26 (Algebran peruslause)**.** *Kompleksilukujen kunta on algebrallisesti suljettu.*

Todistus. Todistetaan kompleksianalyysin kursseilla. Katso myös [LP, Lause 6.23]. □

Lause 6.27. *Olkoon K algebrallisesti suljettu kunta ja olkoon $P(X) \in K[X]$ siten, että $\deg P(X) \geq 1$. Tällöin $P(X)$ on ensimmäisen asteen polynomien tulo. Polynomilla $P(X)$ on juurten kertaluku huomioiden $\deg P(X)$ juurta. Polynomi $P(X) \in K[X]$ on jaoton, jos ja vain jos $\deg P(X) = 1$.*

Todistus. Todistetaan kuten Lause 6.20, Harjoitustehtävä 6.17. □

Seuraus 6.28. *Jokainen vakiosta poikkeava polynomi $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ on ensimmäisen asteen polynomien tulo. Nollasta poikkeavalla polynomilla $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ on juurien kertaluku huomioiden $\deg P(X)$ juurta.* □

Harjoitustehtäviä

6.1. Todista Propositio 6.2.

6.2. Olkoot $P(X), Q(X) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$,

$$P(X) = 3 + 2X + 4X^2 + 2X^3$$

ja

$$Q(X) = 4 + 4X + 4X^2 + 4X^3 + 4X^4.$$

Määritä polynomi $P(X)Q(X)$.

6.3. Laske $(1 - 2X)^8$ renkaassa $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})[X]$.[4]

6.4. Laske $(1 + 4X)(X^3 + 2X + 3)$ polynomirenkaissa $\mathbb{Z}[X]$, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ ja $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

6.5. Määritä polynomien $X^2 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$, $X^2 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ ja $X^3 + 2X + 1 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ juuret.

[4] Käytä binomikaavaa.

6.6. Osoita, että $1 + 2\mathbb{Z}$ on polynomin $P(X) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ juuri, jos ja vain jos polynomilla $P(X)$ on parillinen määrä nollasta poikkeavia kertoimia.

6.7. Todista Propositio 6.4.

6.8. Jaa polynomi (kuten Luvussa 6.5 tehdään)

$$P(X) = X^3 + 2X^2 + 3X + 2$$

polynomilla

$$Q(X) = 2X^2 + 3X + 1$$

(1) polynomirenkaassa $\mathbb{Q}[X]$ ja

(2) polynomirenkaassa $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

6.9. Jaa polynomi

$$P(X) = X^3 + 2X^2 + X + 2 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$$

polynomilla

$$Q(X) = X^2 + 2 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]\,.$$

6.10. Olkoon K kokonaisalue. Olkoot $P(X), Q(X) \in K[X]$. Osoita: Jos $P(X) \mid Q(X)$ ja $Q(X) \mid P(X)$, niin on $u \in K^\times$, jolle $P(X) = uQ(X)$.

6.11. Olkoot $a_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ja olkoon

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]\,.$$

Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ polynomin $P(X)$ juuri. Osoita, että $\overline{z_0}$ on polynomin $P(X)$ juuri.

6.12. Todista Seuraus 6.17.

6.13. Päteekö Seurauksen 6.17 väite, jos oletamme vain, että K on kokonaisalue?

6.14. Mitkä polynomit $aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ ovat jaottomia?

6.15. (a) Onko polynomi $X^2 - 2 \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ jaoton?

(b) Onko polynomi $X^2 + 1 \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ jaoton?

6.16. Esitä polynomi $X^5 + 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ jaottomien polynomien tulona.

6.17. Todista Lause 6.27.

6.18 (Rationaalijuuritesti)**.** Olkoon

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]\,.$$

(a) Olkoon $q \in \mathbb{Z}$ polynomin $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ juuri. Osoita, että $q \mid a_0$.

(b) Olkoon $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ polynomin $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ juuri supistetussa muodossa.[5] Osoita, että $r \mid a_0$ ja $s \mid a_n$.

6.19. Esitä polynomi $X^4 + 2X^3 - 10X^2 - 11X - 12 \in \mathbb{Q}[X]$ jaottomien polynomien tulona.

[5] Siis $\operatorname{syt}(r, s) = 1$.

6.20. Esitä polynomi $5X^5+7X^4-23X^3-5X^2-28X-12 \in \mathbb{Q}[X]$ jaottomien polynomien tulona.

6.21. Laske $(X^2+11)\,(X^4+11X^3-X^2+11X+1)$ polynomirenkaissa $\mathbb{Z}[X]$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ ja $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

6.22. Laske $(X-1)^5$ polynomirenkaissa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ ja $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

6.23. Jaa polynomi

$$P(X) = X^5 + 3X^3 + 1$$

polynomilla

$$Q(X) = 2X + 1$$

(1) polynomirenkaassa $\mathbb{Q}[X]$ ja

(2) polynomirenkaassa $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

6.24. Anna esimerkit polynomeista $P(X)$ ja $Q(X)$, joille pätee

(a) $P(X) \in \big((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]\big)^\times$ ja $\deg P(X) \geq 1$ ja

(b) $Q(X) \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$ on nollanjakaja ja $\deg Q(X) \geq 1$.

6.25. Määritä kaikki renkaan $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ jaottomat toisen asteen polynomit.

Luku 7

Ideaalit ja kuntalaajennukset

Tässä luvussa tutustumme renkaiden ideaaleihin ja niiden avulla muodostettuihin tekijärenkaisiin. Kurssin huipentumana sovellamme polynomirenkaiden ideaaleja kuntalaajennusten ja erityisesti äärellisten kuntien konstruktioon.

7.1 Ideaalit

Olkoon G ryhmä. Olkoon $B \subset G$, $B \neq \emptyset$, vakaa osajoukko. Jos indusoidulla laskutoimituksella varustettu joukko B on ryhmä, niin se on ryhmän G *aliryhmä*.

Lemma 7.1. *Olkoon G ryhmä. Jokaisen aliryhmän $H \leq G$ neutraalialkio on ryhmän G neutraalialkio.*

Todistus. Olkoon $e \in G$ neutraalialkio. Jos joillekin $a, b \in H \leq G$ pätee $ab = b = eb$ ja $ba = b = be$, niin ryhmän G supistussäännön[1] nojalla $a = e$. □

Luvussa 3.4 huomasimme, että rengashomomorfismin ydin ei yleensä ole määrittelyrenkaansa alirengas. Ytimellä on kuitenkin seuraavat tärkeät ominaisuudet:

Propositio 7.2. *Olkoon $\phi\colon R \to R'$ rengashomomorfismi. Ydin $\ker\phi$ on additiivisen ryhmän $(R,+)$ aliryhmä. Kaikille $x \in R$ ja kaikille $a \in \ker\phi$ pätee $ax, xa \in \ker\phi$.*

Todistus. Jos $x, y \in \ker\phi$, niin

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) = 0 + 0 = 0\,,$$

joten $x + y \in \ker\phi$. Siis ydin on yhteenlaskun suhteen vakaa ja renkaan R additiivisen ryhmän $(R,+)$ laskutoimitus $+$ indusoi assosiatiivisen laskutoimituksen joukkoon $\ker\phi$. Lemman 3.19 nojalla $0 \in \ker\phi$. Proposition 3.5 kohdan (2) nojalla jokaisella $x \in \ker\phi$ pätee $\phi(-x) = -\phi(x) = 0$. Siis $-x \in \ker\phi$, joten $\ker\phi$ on ryhmä.

[1] Katso luku 3.1.

Toinen väite seuraa helposti huomaamalla, että kaikille $x \in R$ ja kaikille $a \in \ker \phi$ pätee

$$\phi(xa) = \phi(x)\phi(a) = \phi(x)0 = 0$$

ja

$$\phi(ax) = \phi(a)\phi(x) = 0\,\phi(x) = 0\,. \qquad \square$$

Renkaan R epätyhjä osajoukko $\mathscr{I} \subset R$ on *ideaali*, jos

(1) $(\mathscr{I}, +)$ on additiivisen ryhmän $(R, +)$ aliryhmä ja

(2) $xa, ax \in \mathscr{I}$ kaikilla $x \in R$ ja $a \in \mathscr{I}$.

Jos rengas R on kommutatiivinen, riittää tarkastaa ideaalin määritelmän ehto (1) ja kumpi tahansa ehdon (2) tuloista.

Lemma 7.3. *Jos $\mathscr{I} \subset R$ on renkaan R ideaali, niin $0_R \in \mathscr{I}$.*

Todistus. Määritelmän mukaan $\mathscr{I}$ on additiivisen ryhmän $(R, +)$ aliryhmä ja Lemman 7.1 nojalla $0_R \in \mathscr{I}$. $\square$

Seuraus 7.4. *Rengashomomorfismin $\phi\colon R \to R'$ ydin on renkaan R ideaali.* $\square$

Propositio 7.5 (Ideaalitesti)**.** *Olkoon R rengas. Osajoukko $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, on ideaali, jos ja vain jos*

(1) $a - b \in A$ kaikilla $a, b \in A$ ja

(2) $ra, ar \in A$ kaikilla $a \in A$ ja kaikilla $r \in R$.

Todistus. Harjoitustehtävä 7.1. $\square$

Esimerkki 7.6. (a) Jokaisella renkaalla R on ainakin ideaalit R ja $\{0\}$.
(b) Ideaalitestillä on helppo tarkastaa, että kokonaislukujen renkaan $\mathbb{Z}$ parillisten lukujen osajoukko $2\mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ on ideaali, koska $2k - 2\ell = 2(k - \ell) \in 2\mathbb{Z}$ kaikilla $k, \ell \in \mathbb{Z}$ ja kaikille $a, k \in \mathbb{Z}$ pätee $a(2k) = 2(ak) \in 2\mathbb{Z}$. Samalla tavalla osoitetaan, että kongruenssin määrittelyssä käytetyt osajoukot $q\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ovat ideaaleja kaikilla $q \geq 2$.
(c) Esimerkissä 3.20 totesimme, että $q\mathbb{Z}$ on rengashomomorfismin $\pi_q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ydin, joten se, että $q\mathbb{Z}$ on ideaali, voidaan perustella myös Seurauksella 7.4.

Lemma 7.7. *Jos renkaan R ideaali $\mathscr{I}$ sisältää yksikön, niin $\mathscr{I} = R$.*

Todistus. Olkoon $u \in \mathscr{I}$ yksikkö. Tällöin $1 = uu^{-1} \in \mathscr{I}$. Koska $\mathscr{I}$ on ideaali, niin kaikilla $x \in R$ pätee $x = x\,1 \in \mathscr{I}$. Siis $\mathscr{I} = R$. $\square$

Propositio 7.8. *Jos renkaan R ideaali $\mathscr{I}$ on alirengas, niin $\mathscr{I} = R$.*

Todistus. Jos $\mathscr{I}$ on renkaan R alirengas, niin $1 = 1_R \in \mathscr{I}$. Väite seuraa Lemmasta 7.7. $\square$

Propositio 7.9. *Olkoon $\mathscr{I}$ jakorenkaan R ideaali. Tällöin $\mathscr{I} = R$ tai $\mathscr{I} = \{0\}$. Erityisesti kunnan K ainoat ideaalit ovat $\{0\}$ ja K.*

Todistus. Väite seuraa Lemmasta 7.7. □

Ideaalien avulla saamme toisen todistuksen Proposition 4.7 injektiivisyysväitteelle:

Seuraus 7.10. *Olkoon K kunta ja olkoon R rengas, jossa on ainakin kaksi alkiota. Olkoon $\phi\colon K \to R$ rengashomomorfismi. Tällöin ϕ on injektio. Erityisesti kuntahomomorfismi on injektio.*

Todistus. Olkoon $\phi\colon R \to K$ rengashomomorfismi. Tällöin $\ker\phi$ on kunnan K ideaali. Proposition 3.12 nojalla $0_R \neq 1_R$. Siis $\ker\phi \neq K$, koska $\phi(1_K) = 1_R \neq 0_R$. Proposition 7.9 nojalla $\ker\phi = \{0_K\}$, joten ϕ on injektio Proposition 3.25 nojalla. □

Propositio 7.11. *Olkoon $\phi\colon R \to S$ rengashomomorfismi. Tällöin*

(1) Jos $\mathscr{I} \subset R$ on ideaali, niin $\phi(\mathscr{I})$ on renkaan $\phi(R)$ ideaali.

(2) Jos $\mathscr{I} \subset S$ on ideaali, niin $\phi^{-1}(\mathscr{I})$ on renkaan R ideaali.

Todistus. (1) Harjoitustehtävä 7.3.

(2) Lemman 7.3 nojalla $0_S \in \mathscr{I}$. Lemman 3.19 nojalla $\phi(0_R) = 0_S$, joten $\phi^{-1}(\mathscr{I}) \neq \emptyset$. Olkoot $a, b \in \phi^{-1}(\mathscr{I})$ ja $r \in R$. Tällöin $\phi(a-b) = \phi(a) - \phi(b) \in \mathscr{I}$, koska $\mathscr{I}$ on ideaali. Siis $a - b \in \phi^{-1}(\mathscr{I})$. Lisäksi $\phi(ra) = \phi(r)\phi(a) \in \mathscr{I}$, koska $\phi(a) \in \mathscr{I}$ ja $\mathscr{I}$ on renkaan S ideaali. Siis $ra \in \phi^{-1}(\mathscr{I})$. Vastaavasti osoitetaan, että $ar \in \phi^{-1}(\mathscr{I})$. Ideaalitestin[2] nojalla $\phi^{-1}(\mathscr{I})$ on ideaali. □

7.2 Pääideaalit

Lemma 7.12. *Olkoon K kommutatiivinen rengas ja olkoon $a \in K$. Joukko*

$$aK = Ka = \{ka : k \in K\}$$

on ideaali.

Todistus. Joukko Ka ei ole tyhjä, sillä $a = 1 \cdot a \in Ka$. Jos $x, y \in Ka$, niin $x = k_1 a$ ja $y = k_2 a$ joillain $k_1, k_2 \in K$. Tällöin $x - y = (k_1 - k_2)a \in Ka$. Lisäksi kaikille $k \in K$ pätee $kx = (kk_1)a \in Ka$. Proposition 7.5 nojalla Ka on ideaali. □

Olkoon K kommutatiivinen rengas ja olkoon $x \in K$. Ideaali $(x) = xK$ on alkion x virittämä *pääideaali*.

Esimerkki 7.13. (a) $(q) = q\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ on pääideaali kaikilla $q \in \mathbb{Z}$.

(b) Ideaalit $(0) = 0K = \{0_K\}$ ja $(1) = 1K = K$ ovat pääideaaleja jokaisessa kommutatiivisessa renkaassa K.

(c) Olkoon K kommutatiivinen rengas ja olkoon $P(X) \in K[X]$. Pääideaalit

$$(P(X)) = P(X)K[X] = \{T(X)P(X) : T(X) \in K[X]\}$$

ovat keskeisessä osassa luvuissa 7.4 ja 7.6.

[2]Propositio 7.5

Lemma 7.14. *Jos K on kommutatiivinen rengas ja $u \in K^\times$, niin $(ua) = (a)$ kaikille $a \in K$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 7.8. □

Kokonaisalue, jonka kaikki ideaalit ovat pääideaaleja on *pääideaalialue*.

Esimerkki 7.15. Proposition 7.9 nojalla kaikki kunnat ovat pääideaalialueita.

Propositio 7.16. *Kokonaislukujen rengas $\mathbb{Z}$ on pääideaalialue.*

Todistus. Olkoon $\mathscr{I} \neq \{0\}$ renkaan $\mathbb{Z}$ ideaali. Koska jokaiselle $b \in \mathscr{I}$ pätee $-b \in \mathscr{I}$, joukko $\{b \in \mathscr{I} : b > 0\}$ ei ole tyhjä. Olkoon

$$a = \min\{b \in \mathscr{I} : b > 0\}.$$

Osoitetaan, että $\mathscr{I} = a\mathbb{Z}$. Ideaalin määritelmän nojalla kaikki alkion a monikerrat ovat joukossa $\mathscr{I}$, joten $a\mathbb{Z} \subset \mathscr{I}$.

Olkoon $b \in \mathscr{I}$. Jakoyhtälön nojalla on $k \in \mathbb{Z}$ ja $0 \leq r < a$ siten, että $b = ka + r$. Ideaalin määritelmän nojalla $r = b - ka \in \mathscr{I}$. Jos $r \neq 0$, niin $0 < r < a$, mikä on ristiriita luvun a määritelmän kanssa. Siis $r = 0$ ja $b = ka \in a\mathbb{Z}$, joten $\mathscr{I} \subset a\mathbb{Z}$. □

Seuraavan tärkeän tuloksen todistus muistuttaa Proposition 7.16 todistusta.

Lause 7.17. *Olkoon K kunta. Tällöin polynomirengas $K[X]$ on pääideaalialue.*

Todistus. Olkoon $\mathscr{I} \neq \{0\}$ ideaali kokonaisalueessa $K[X]$. Olkoon $B(X) \in \mathscr{I} - \{0\}$ alkio, jolle pätee $\deg(B(X)) \leq \deg(C(X))$ kaikille $C(X) \in \mathscr{I} - \{0\}$. Ideaalin määritelmän nojalla $(B(X)) \subset \mathscr{I}$.

Osoitetaan, että $\mathscr{I} \subset \big(B(X)\big)$. Olkoon $A(X) \in \mathscr{I}$. Kuntakertoimisten polynomien jakoyhtälön[3] mukaan on $Q(X), R(X) \in K[X]$, joille pätee $A(X) = Q(X)B(X) + R(X)$ ja $\deg(R(X)) < \deg(B(X))$. Erityisesti $R(X) = A(X) - Q(X)B(X) \in \mathscr{I}$. Koska $\deg(B(X))$ on minimaalinen nollasta poikkeaville ideaalin $\mathscr{I}$ alkioille, pätee siis $R(X) = 0$, joten $A(X) = Q(X)B(X) \in \big(B(X)\big)$. □

Seurauksen 7.17 väite ei päde ilman oletusta, että kerroinrengas on kunta. Esimerkiksi kokonaislukukertoimisten polynomien renkaan ideaalirakenne on monimutkaisempi:

Esimerkki 7.18. Polynomirenkaan $\mathbb{Z}[X]$ ideaali $\mathscr{I} = (2, X)$, joka koostuu niistä kokonaislukukertoimisista polynomeista, joiden vakiotermi on parillinen ei ole pääideaali: Jos $\mathscr{I} = (P(X))$ jollekin $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$, niin $P(X)$ jakaa polynomin $2 \in \mathscr{I}$. Proposition 6.8 nojalla $\deg P(X) \leq \deg 2 = 0$, koska kerroinrengas $\mathbb{Z}$ on kokonaisalue. Siis $P(X) \in \{\pm 1, \pm 2\} \subset \mathbb{Z}[X]$. Koska $X \in \mathscr{I}$ ja $\pm 2 \nmid X$, täytyy olla $P(X) = \pm 1$, joten $\mathscr{I} = (P(X)) = \mathbb{Z}[X]$, mikä on ristiriita. Erityisesti siis polynomirengas $\mathbb{Z}[X]$ ei ole pääideaalialue.

[3] Seuraus 6.12

7.3 Tekijärenkaat

Olkoon R rengas. Ideaalin $\mathscr{I} \subset R$ *määräämä ekvivalenssirelaatio* $\sim$ määritellään asettamalla $x \sim y$, jos ja vain jos $x - y \in \mathscr{I}$.[a]

Ekvivalenssirelaation $\sim$ ekvivalenssiluokkia kutsutaan *jäännösluokiksi* mod $\mathscr{I}$ tai *sivuluokiksi*. Alkion $x \in R$ jäännösluokalle käytetäään additiivista merkintää

$$x + \mathscr{I} = \{x + z : z \in \mathscr{I}\} = \{y \in R : x - y \in \mathscr{I}\}.$$

[a]Harjoituksissa tarkastamme, että $\sim$ on todellakin ekvivalenssirelaatio. Ekvivalenssirelaation määritelmä on luvussa 2.1.

Ideaalin määräämä ekvivalenssirelaatio on kokonaislukurenkaan $\mathbb{Z}$ kongruenssin yleistys. Jos $\mathscr{I}$ on renkaan $\mathbb{Z}$ ideaali, niin Proposition 7.16 nojalla $\mathscr{I} = q\mathbb{Z}$ jollain $q \in \mathbb{Z}$. Jos $q \geq 1$, niin $x - y \in q\mathbb{Z}$, jos ja vain jos $x \equiv y \bmod q$.

Propositio 7.19. *Olkoon R rengas ja olkoon $\mathscr{I} \subset R$ ideaali. Renkaan R yhteenlasku ja kertolasku ovat yhteensopivia ideaalin $\mathscr{I}$ määräämän ekvivalenssirelaation kanssa.*

Todistus. Tarkastellaan kertolaskua: Olkoot $a, a', b, b' \in R$, $a \sim a'$ ja $b \sim b'$. Nyt $a - a' \in \mathscr{I}$ ja $b - b' \in \mathscr{I}$, joten

$$ab - a'b' = ab - ab' + ab' - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in \mathscr{I},$$

koska $\mathscr{I}$ on ideaali. Siis $ab \sim a'b'$.

Yhteenlaskun yhteensopivuus todistetaan Harjoitustehtävässä 7.11. □

Proposition 7.19 ja Lemman 2.7 nojalla renkaan R molemmat laskutoimitukset määrittelevät tekijälaskutoimituksen tekijäjoukossa $R/\mathscr{I}$.

Jäännösluokkien laskutoimitukset ovat

$$(x + \mathscr{I}) + (y + \mathscr{I}) = (x + y) + \mathscr{I}$$

ja

$$(x + \mathscr{I})(y + \mathscr{I}) = xy + \mathscr{I}$$

kaikille $x, y \in R$. Erityisesti $0_R + \mathscr{I} = \mathscr{I}$ on yhteenlaskun neutraalialkio ja $1_R + \mathscr{I}$ on kertolaskun neutraalialkio.

Seuraava tulos yleistää Esimerkkien 3.6 ja 3.20 tulokset kokonaislukurenkaan tilanteesta yleiseen tapaukseen:

Propositio 7.20. *Olkoon R rengas ja olkoon $\mathscr{I}$ sen ideaali. Tällöin tekijäjoukko $R/\mathscr{I}$ on rengas ja tekijäkuvaus $\pi\colon R \to R/\mathscr{I}$ on rengashomomorfismi.*

Todistus. Todistetaan samalla tavalla kuin vastaavat väitteet jäännösluokkarenkaille luvuissa 2.3 ja 2.4. Harjoitustehtävä 7.12. □

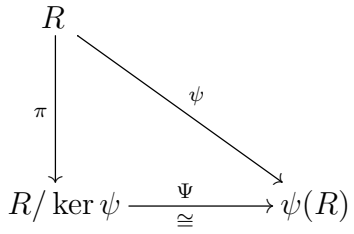
Seuraus 7.21. *Jokainen ideaali on jonkin rengashomomorfismin ydin.*

Todistus. Olkoon R rengas ja olkoon $\mathscr{I}$ sen ideaali. Proposition 7.20 nojalla tekijäkuvaus $\pi\colon R \to R/\mathscr{I}$ on homomorfismi. Sen ydin $\pi^{-1}(0)$ on tekijärenkaan määrittelevän ekvivalenssirelaation määritelmän mukaan $\mathscr{I}$. □

Propositio 7.22. *Tekijärengas on kommutatiivinen, jos alkuperäinen rengas on kommutatiivinen.*

Todistus. Tekijäkuvaus on surjektiivinen homomorfismi, joten väite seuraa Propositiosta 1.9 tai Propositiosta 2.8. □

Lause 7.23 (Renkaiden isomorfismilause)**.** *Olkoon $\psi\colon R \to S$ rengashomomorfismi. Tällöin tekijärengas $R/\ker\psi$ on isomorfinen renkaan $\psi(R)$ kanssa.*



Todistus. Määritellään kuvaus $\Psi : R/\ker\psi \to \psi(R)$ asettamalla

$$\Psi(x + \ker\psi) = \psi(x)$$

kaikille $x + \ker\psi \in R/\ker\psi$. Tarkastetaan, että kuvaus Ψ on hyvin määritelty, mikä tarkoittaa, että sen arvo ei riipu kuvattavan ekvivalenssiluokan edustajan valinnasta. Jos $x + \ker\phi = y + \ker\phi$, niin $x \sim y$, mikä määritelmän mukaan tarkoittaa $x - y \in \ker\psi$. Siis $\psi(x) - \psi(y) = \psi(x - y) = 0$, joten

$$\Psi(x + \ker\psi) = \psi(x) = \psi(y) = \Psi(y + \ker\psi)\,.$$

Osoitetaan, että Ψ on rengashomomorfismi: Olkoot $x, y \in R$. Tällöin

$$\begin{aligned}\Psi(x + \ker\psi) + \Psi(y + \ker\psi) &= \psi(x) + \psi(y) = \psi(x + y) = \Psi(x + y + \ker\psi)\\ &= \Psi(x + \ker\psi + y + \ker\psi)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(x + \ker\psi)\Psi(y + \ker\psi) &= \psi(x)\psi(y) = \psi(xy) = \Psi(xy + \ker\psi)\\ &= \Psi((x + \ker\psi)(y + \ker\psi))\end{aligned}$$

ja $\Psi(1 + \ker\psi) = \psi(1) = 1$, koska ψ on rengashomomorfismi.

Kuvaus Ψ on määritelmänsä nojalla surjektio. Osoitetaan se vielä injektioksi, jolloin väite tulee todistetuksi. Olkoon $x + \ker\psi \in \ker\Psi$. Tällöin $\psi(x) = 0$, joten $x \in \ker\psi$. Siis $x + \ker\psi = 0 + \ker\psi = 0 \in R/\ker\psi$. Siis Ψ on injektio. □

Esimerkki 7.24. (a) Koska R on aina renkaan R ideaali ja $R/R \cong \{0\}$, niin tekijärengas $R/\mathscr{I}$ voi olla kommutatiivinen vaikka R ei olisikaan. Toinen ääriesimerkki tekijärenkaasta on $R/\{0\} \cong R$.

(b) Olkoon $\Omega \neq \emptyset$ ja olkoon R rengas. Esimerkissä 3.21 tarkasteltu evaluaatiohomomorfismi $E_c\colon R^\Omega \to R$ on surjektio kaikille $c \in \Omega$, koska $E_c(\underline{a}) = a$ kaikille $a \in R$. Renkaiden isomorfismilauseen nojalla $R^\Omega/\ker E_c$ on rengasisomorfinen renkaan R kanssa kaikille $c \in \Omega$.

(c) Reaaliluvut konstruoidaan kurssilla Lukualueet[4] rationaalilukujen Cauchyn jonojen renkaan nollaan suppenevien jonojen ideaalia vastaavana tekijärenkaana.

Seuraus 7.25. *Kunnalla, jonka karakteristika on p, on alikunta, joka on isomorfinen kunnan $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kanssa.*

Todistus. Olkoon K kunta, jonka karakteristika on p. Olkoon $\phi\colon \mathbb{Z} \to K$ rengashomomorfismi. Proposition 3.27 nojalla $\phi(\mathbb{Z})$ on kunnan K alirengas. Karakteristikan määritelmän nojalla $\ker\phi = p\mathbb{Z}$, joten isomorfismilauseen nojalla $\phi(\mathbb{Z})$ on isomorfinen kunnan $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kanssa. □

Lause 7.26. *Olkoon K äärellinen kunta. Tällöin on alkuluku p ja positiivinen luonnollinen luku $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ siten, että $\#K = p^q$.*

Todistus. Kunnan K karakteristika on Proposition 5.6 nojalla p jollain alkuluvulla p.[5] Olkoon $\phi\colon \mathbb{Z} \to K$ rengashomomorfismi. Seurauksen 7.25 nojalla kunnalla K on alikunta k, jossa on p alkiota. Proposition 4.10 nojalla K on k-vektoriavaruus, joten väite seuraa Lemmasta 4.13. □

7.4 Polynomirenkaiden tekijärenkaita

Tässä luvussa tarkastelemme kuntakertoimisten polynomirenkaiden tekijärenkaita, joita käytämme luvussa 7.6 kuntalaajennusten muodostamisessa.

Lause 7.27. *Olkoon K kunta ja olkoon $P(X) \in K[X]$ polynomi, jonka aste on $d \geq 1$. Jos kunnassa K on q alkiota, niin renkaassa $K[X]/(P(X))$ on q^d alkiota.*

Todistus. Polynomien jakoyhtälön[6] nojalla jokaisella tekijärenkaan $K[X]/(P(X))$ alkiolla $Q(X)+(P(X)) \in K[X]/(P(X))$ on edustaja $\overline{Q}(X)$, jolle pätee $\deg\overline{Q}(X) < \deg P(X) = d$:

$$Q(X) = T(X)P(X) + \overline{Q}(X)$$

yksikäsitteiselle $T(X) \in K[X]$. Tällaisia polynomeja on q^d kappaletta ja mitkään kaksi eivät ole ekvivalentteja. □

Esimerkki 7.28. Olkoon $P(X) = X^2 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$. Lauseen 7.27 todistuksesta seuraa, että renkaan $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(P(X))$ alkiot ovat

$$\begin{array}{lll} 0 & = (P(X))\,, & 1 = 1 + (P(X))\,, \\ \alpha & = X + (P(X)) \quad \text{ja} & \alpha + 1 = X + 1 + (P(X))\,. \end{array}$$

[4] Katso [LP, luku 5].

[5] Jos renkaan R karakteristika on 0, niin R on ääretön.

[6] Seuraus 6.12

Tekijärenkaan yhteen- ja kertolaskun laskutaulut ovat

$+$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	1	α	$\alpha+1$
1	1	0	$\alpha+1$	α
α	α	$\alpha+1$	0	1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	α	1	0

ja

$\cdot$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha+1$
α	0	α	$\alpha+1$	1
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	1	α

.

Laskutauluja vertaamalla näemme, että tekijärengas $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(P(X))$ on isomorfinen Esimerkissä 4.5 tarkastellun kunnan F kanssa, siellähän $\beta = \alpha + 1$.

7.5 Maksimaaliset ideaalit

Olkoon R rengas. Renkaan R ideaali $\mathscr{I}$ on *aito ideaali*, jos $\mathscr{I} \neq R$.
Renkaan R aito ideaali $\mathscr{M}$ on *maksimaalinen ideaali*, jos se ei ole minkään aidon ideaalin aito osajoukko.

Proposition 7.9 mukaan kunnan nollaideaali on maksimaalinen ideaali.

Propositio 7.29. *Kokonaislukurenkaan $\mathbb{Z}$ ideaali $q\mathbb{Z}$, $q \geq 2$, on maksimaalinen, jos ja vain jos q on alkuluku.*

Todistus. Jos q ei ole alkuluku, niin $q = ab$ joillakin $a, b \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Tällöin $q \in a\mathbb{Z}$ ja $a \notin q\mathbb{Z}$, joten ideaali $q\mathbb{Z}$ sisältyy aidosti aitoon ideaaliin $a\mathbb{Z}$ eikä $q\mathbb{Z}$ siis ole maksimaalinen.

Olkoon q alkuluku ja olkoon $r\mathbb{Z}$ ideaali, joka sisältää aidosti ideaalin $q\mathbb{Z}$. Siis $r \neq \pm q$. Erityisesti $q \in r\mathbb{Z}$. Koska q on alkuluku, sen tekijät ovat ± 1 ja $\pm q$, joten $r = \pm 1$. Siis $r\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. □

Lauseen 5.19 mukaan tekijärengas $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 0on kunta täsmälleen silloin, kun q on alkuluku. Proposition 7.29 mukaan tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $q\mathbb{Z}$ on kokonaislukurenkaan maksimaalinen ideaali. Seuraava tulos yleistää tämän havainnon.

Lause 7.30. *Olkoon $\mathscr{M}$ kommutatiivisen renkaan K maksimaalinen ideaali. Tällöin tekijärengas $K/\mathscr{M}$ on kunta.*

Todistus. Proposition 7.22 nojalla tekijärengas $K/\mathscr{M}$ on kommutatiivinen. Koska $\mathscr{M}$ on renkaan K aito osajoukko, niin tekijärenkaassa $K/\mathscr{M}$ on ainakin kaksi alkiota. Olkoon $a + \mathscr{M} \in K/\mathscr{M} - \{0 + \mathscr{M}\}$. Harjoitustehtävän 7.31 nojalla

$$\mathscr{N} = \{ak + m : k \in K, m \in \mathscr{M}\} = aK + \mathscr{M}$$

on renkaan K ideaali. Ideaali $\mathscr{N}$ sisältää aidosti ideaalin $\mathscr{M}$, koska $a \in \mathscr{N} - \mathscr{M}$. Koska $\mathscr{M}$ on maksimaalinen, pätee $\mathscr{N} = K$. Erityisesti $1 \in \mathscr{N}$, joten on $k \in K$ ja $m \in \mathscr{M}$ siten, että $ak + m = 1$. Mutta tästä saadaan

$$(a + \mathscr{M})(k + \mathscr{M}) = ak + \mathscr{M} = 1 - m + \mathscr{M} = 1 \in K/\mathscr{M}\,,$$

joten $a + \mathscr{M}$ on yksikkö. □

Seuraava tulos antaa keinon maksimaalisten ideaalien tunnistamiseen pääideaalialueissa.

Lause 7.31. *Olkoon K pääideaalialue ja olkoon $a \in K - \{0\}$. Tällöin pääideaali (a) on maksimaalinen ideaali, jos ja vain jos a on jaoton.*

Todistus. Olkoon a jaoton ja olkoon $\mathscr{N}$ ideaali, joka sisältää pääideaalin (a). Koska K on pääideaalialue, niin $\mathscr{N} = (b)$ jollain $b \in K$. Pätee siis $a = qb$ jollain $q \in K$. Koska a on jaoton, täytyy olla $q \in K^\times$ tai $b \in K^\times$. Jos q on yksikkö, niin Lemman 7.14 nojalla $\mathscr{N} = (b) = (qb) = (a)$. Jos taas b on yksikkö, niin Lemman 7.7 nojalla $\mathscr{N} = (b) = K$. Siis (a) on maksimaalinen.

Toinen suunta osoitetaan Harjoitustehtävässä 7.26. □

Proposition 7.29 toinen todistus. Proposition 7.16 nojalla $\mathbb{Z}$ on pääideaalialue. Renkaan $\mathbb{Z}$ jaottomat alkiot ovat $\pm p$ alkuluvuille $p \in \mathbb{N}$. Väite seuraa Lauseesta 7.31. □

7.6 Kuntalaajennukset polynomirenkaiden avulla

Seuraus 7.32. *Olkoon K kunta ja olkoon $P(X) \in K[X]$ jaoton. Tällöin $(P(X))$ on maksimaalinen ideaali.*

Todistus. Polynomirengas $K[X]$ on pääideaalialue Lauseen 7.17 nojalla, joten väite seuraa Lauseesta 7.31. □

Seuraus 7.33. *Olkoon K kunta ja olkoon $P(X) \in K[X]$ jaoton polynomi. Tällöin tekijärengas $K[X]/(P(X))$ on kunta.*

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 7.30 ja Seurauksesta 7.32. □

Esimerkki 7.34. Esimerkissä 6.18 osoitimme, että polynomi $P(X) = X^2 + X + 1$ on jaoton toisen asteen polynomi polynomirenkaassa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$. Seurauksen 7.33 ja Lauseen 7.27 nojalla $\mathbb{F}_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(P(X))$ on neljän alkion kunta. Totesimme saman laskutauluja tarkastelemalla Esimerkissä 7.28.

Esimerkin 7.28 lisäksi olemme tavanneet äärelliset kunnat $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, missä p on alkuluku. Erityisesti näiden kuntien alkioiden lukumäärä on alkuluku. Esimerkin 7.28 tulos yleistyy kaikille alkulukupotensseille p^q.

Lause 7.35. *Jokaiselle luonnolliselle luvulle $q \geq 1$ ja alkuluvulle p on äärellinen kunta, jossa on p^q alkiota. Toisaalta jokaisessa äärellisessä kunnassa on p^q alkiota joillain tällaisilla p ja q.*

Todistuksesta. Lauseen 7.26 mukaan äärellisessä kunnassa on p^q alkiota jollain alkuluvulla p ja jollain luonnollisella luvulla $q \geq 1$. Seurauksen 7.33 nojalla riittää osoittaa, että renkaassa $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ on jaoton polynomi, jonka aste on q. Tällä kurssilla emme todista tällaisen polynomin olemassaoloa yleisessä tapauksessa, Harjoitustehtävissä tehdään muutamia muita erikoistapauksia, katso myös Esimerkki 7.36.

Koko lauseen todistus on esimerkiksi kirjan [IR] luvussa 7.2. □

Esimerkki 7.36. Polynomi X^2+1 on jaoton polynomirenkaassa $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ kaikilla alkuluvuilla $p \equiv 3 \bmod 4$. Todistamme tämän kurssilla RYHMÄT ryhmäteorian Lagrangen lauseen avulla Lemmana 11.22. Kunnassa $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]/(X^2+1)$ on p^2 alkiota näillä alkuluvuilla p. Toisaalta X^2+1 ei ole jaoton, jos $p \equiv 1 \bmod 4$. Emme todista tätä väitettä mutta se on helppo tarkastaa esimerkiksi alkulukujen 5, 13 ja 17 tapauksissa. Aihetta käsitellään yksityiskohtaisesti esimerkiksi lähteessä [IR, Luku 5] ja kurssin Lukuteoria 2 materiaalissa [Par, Propositio 7.7] .

Seuraava tulos osoittaa, että kuntakertoimisesta polynomirenkaasta $K[X]$ saadaan jaottoman polynomin avulla muodostettua kerroinkunnan K kuntalaajennus k. Konstruktiossa käytetyllä polynomilla $P(X) \in K[X]$ ei ole juuria Proposition 6.16 nojalla. Kun polynomin $P(X)$ kertoimet ajatellaan uuden kunnan alkioiksi samastamalla K vakiopolynomien antaman alikunnan kanssa,[7] havaitaan, että polynomilla $P(X) \in k[X]$ on juuri.

Lause 7.37. *Olkoon K kunta ja olkoon $P(X) \in K[X]$ jaoton polynomi. Tällöin kunnalla $k = K[X]/(P(X))$ on alikunta, joka on isomorfinen kunnan K kanssa. Polynomilla $P(Y) \in k[Y]$ on juuri.*

Todistus. Olkoon $i\colon K \to K[X]$ homomorfismi $a \overset{i}{\mapsto} aX^0$ ja olkoon $\Phi\colon K[X] \to k$ luonnollinen homomorfismi $Q(X) \overset{\Phi}{\mapsto} Q(X) + (P(X))$. Kuvaus $\Phi \circ i$ on kuntahomomorfismi, joten ensimmäinen väite seuraa Propositiosta 4.7.

Olkoon

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in K[X]\,.$$

Osoitetaan, että polynomilla

$$P(Y) = \sum_{k=0}^{n} \big(b_k + (P(X)\big)\, Y^k \in k[Y]$$

on juuri. Olkoon

$$\alpha = \Phi(X) = X + (P(X)) \in k\,.$$

Tällöin pätee

$$\begin{aligned} P(\alpha) = P\big(X + (P(X))\big) &= \sum_{k=0}^{n} \big(b_k + (P(X)\big)\big(X + (P(X))\big)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \big(b_k + (P(X)\big)\big(X^k + (P(X))\big) = P(X) + (P(X)) = 0\,, \end{aligned}$$

joten α on polynomin $P(Y) \in k[Y]$ juuri. □

Esimerkki 7.38. Polynomi $X^2+1 \in \mathbb{R}[X]$ on jaoton, koska sillä ei ole juurta. Tekijärengas $k = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ on Seurauksen 7.33 nojalla kunta ja polynomilla $X^2+1 \in k[X]$ on juuri Lauseen 7.37 nojalla.

Reaalikertoimisten polynomien rengas $\mathbb{R}[X]$ on kompleksikertoimisten polynomien renkaan $\mathbb{C}[X]$ alirengas ja Seurauksen 6.24 nojalla reaalikertoimiset polynomit voidaan samastaa kompleksitasossa määriteltyjen reaalikertoimisten polynomifunktioiden renkaan kanssa.

[7] Katso Lemma 6.3.

Olkoon $E_i\colon \mathbb{C}^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ evaluaatiokuvaus[8] ja olkoon $\widetilde{E}_i = E_i \circ \mathrm{Fun}\colon \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$,

$$\widetilde{E}_i(P(X)) = P(i)\,.$$

Proposition 6.16 nojalla $\ker \widetilde{E}_i = (X - i)$. Rajoittumakuvaus $\widetilde{E}_i|_{\mathbb{R}[X]}\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ on surjektiivinen rengashomomorfismi, koska $E_i(bX + a) = a + ib$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$.

Harjoitustehtävän 6.11 mukaan $-i$ on jokaisen sellaisen polynomin $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ juuri, jonka kertoimet ovat reaalisia ja jonka yksi juuri on i. Siis jokainen homomorfismin $E_i|_{\mathbb{R}[X]}$ ytimeen kuuluva polynomi on jaollinen polynomilla $X^2+1 = (X-i)(X+i)$, joten $\ker E_i|_{\mathbb{R}[X]} = (X^2 + 1)$. Renkaiden isomorfismilauseen[9] mukaan kunta $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ on isomorfinen kompleksilukujen kunnan $\mathbb{C}$ kanssa.

Esimerkki 7.39. Polynomirenkaan $\mathbb{C}[X]$ maksimaaliset ideaalit ovat Seurauksen 7.32 mukaan jaottomien polynomien virittämät pääideaalit. Algebran peruslauseen nojalla $\mathbb{C}$ on algebrallisesti suljettu. Siis $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ on jaoton, jos ja vain jos $\deg P(X) = 1$. Jos $\deg P(X) = 1$, niin $P(X) = aX + b$ joillakin $a \in \mathbb{C}^\times$ ja $b \in \mathbb{C}$. Lemman 7.14 mukaan polynomirenkaan $\mathbb{C}[X]$ maksimaaliset ideaalit ovat pääideaalit $(X - c) = \ker E_c$, $c \in \mathbb{C}$. Evaluaatiokuvaus $E_c\colon \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ on surjektiivinen rengashomomorfismi, joten renkaiden isomorfismilauseen nojalla tekijärengas $\mathbb{C}[X]/(X - c)$ on isomorfinen kompleksilukujen kunnan $\mathbb{C}$ kanssa.

Harjoitustehtäviä

7.1. Todista Propositio 7.5.

7.2. Olkoon R rengas ja olkoon $\mathscr{I}$ renkaan R epätyhjä osajoukko. Osoita, että $\mathscr{I}$ on ideaali, jos ja vain jos $xa + x'a', ax + a'x' \in \mathscr{I}$ kaikilla $x, x' \in R$ ja $a, a' \in \mathscr{I}$.

7.3. Todista Propositio 7.11(1).

7.4. Anna esimerkki, joka osoittaa, että Proposition 7.11(1) tilanteessa $\psi(\mathscr{I})$ ei välttämättä ole renkaan S ideaali.

7.5. Olkoot $\mathscr{I}_i$, $i \in I$, renkaan R ideaaleja. Osoita, että $\bigcap_{i\in I} \mathscr{I}_i$ on renkaan R ideaali.

7.6. Olkoon K kommutatiivinen rengas. Olkoot $a_1, a_2, \ldots a_n \in K$. Osoita, että

$$Ka_1 + Ka_2 + \cdots + Ka_n = \{x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n : x_1, x_2, \ldots, x_n \in K\}$$

on renkaan K ideaali.

7.7. Osoita, että kommutatiivisen renkaan $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ideaali $2\,\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] + (1 + i\sqrt{5})\,\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ei ole pääideaali.[10]

7.8. Todista Lemma 7.14.

7.9. Todista Bézout'n yhtälö[11] Proposition 7.16 avulla.[12]

[8] Katso Esimerkki 3.21.
[9] Lause 7.23
[10] Lemma 5.9(1) auttaa.
[11] Propositio **??**
[12] Tarkastele ideaalia $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

7.10. Olkoon R rengas ja olkoon $\mathscr{I} \subset R$ ideaali. Asetetaan $x \sim y$, jos ja vain jos $x - y \in \mathscr{I}$. Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

7.11. Olkoon R rengas ja olkoon $\mathscr{I} \subset R$ ideaali. Osoita, että renkaan R yhteenlasku on yhteensopiva ideaalin $\mathscr{I}$ määräämän ekvivalenssirelaation kanssa.[13]

7.12. Todista Propositio 7.20.

7.13. Osoita, että $\mathscr{I} = \{0, 2 + 6\mathbb{Z}, 4 + 6\mathbb{Z}\}$ on renkaan $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ideaali. Osoita, että tekijärengas $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/\mathscr{I}$ on rengasisomorfinen renkaan $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kanssa.

7.14. Määritä tekijärenkaan $R = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^2 + 1)$ laskutaulut. Mitkä renkaan R alkiot ovat yksiköitä? Onko rengas R kunta?

7.15. Olkoon $P(X) = X^3+2X+1 \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$. Onko $P(X)$ jaoton polynomi? Onko tekijärengas $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(P(X))$ kunta? Montako alkiota tekijärenkaassa $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(P(X))$ on?

7.16. Olkoon K kommutatiivinen rengas ja olkoon Olkoon $P(X) = X^3 + 1 \in K[X]$. Osoita, että $X + (P(X)) \in K[X]/(P(X))$ on yksikkö.

7.17. Osoita, että polynomi $X^3 + X^2 + X + 2 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ on jaoton. Osoita tämän avulla, että on kunta, jossa on 27 alkiota.

7.18. Olkoon $P(X) = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 4X + 3 \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$. Esitä $P(X)$ jaottomien polynomien tulona. Anna esimerkki kunnasta, jossa on 343 alkiota.

Tehtävissä 7.19–7.21 ei riitä todeta, että tallainen kunta on Lauseen 7.35 nojalla.

7.19. Osoita, että on kunta, jossa on 9 alkiota.

7.20. Osoita, että on kunta, jossa on 16 alkiota. [14]

7.21. Osoita, että on kunta, jossa on 125 alkiota.

7.22. Olkoon $P(X) = X^4 - 4X^2 + 4 \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$. Esitä $P(X)$ jaottomien polynomien tulona. Anna esimerkki nollanjakajasta tekijärenkaassa $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(P(X))$. Määritä alkion $X + (P(X)) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(P(X))$ käänteisalkio kertolaskun suhteen.

7.23. Olkoon $P(X) = X^3 + 3X + 1 \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

(a) Esitä $P(X)$ jaottomien polynomien tulona.

(b) Anna esimerkki nollan jakajasta tekijärenkaassa $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]/(P(X))$.

(c) Osoita, että $X^2 + 3 + (P(X)) \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]/(P(X))$ on yksikkö.

7.24. Määritä tekijärenkaan $R = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^2)$ laskutaulut. Mitkä renkaan R alkiot ovat yksiköitä? Onko rengas R kunta?

7.25. Määritä tekijärenkaan $R = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^2 + X)$ laskutaulut. Mitkä renkaan R alkiot ovat yksiköitä? Onko rengas R kunta?

7.26. Olkoon K kokonaisalue ja olkoon $a \in K - \{0\}$ alkio, joka ei ole jaoton. Osoita, että (a) ei ole maksimaalinen ideaali.

[13] Katso Lemma 2.9.

[14] Muista Harjoitustehtävä 6.6 tai 6.16.

Kommutatiivisen renkaan K ideaali $\mathscr{P} \neq K$ on *alkuideaali*, jos sillä on seuraava ominaisuus: Jos $a, b \in K$ ja $ab \in \mathscr{P}$, niin $a \in \mathscr{P}$ tai $b \in \mathscr{P}$.

7.27. Mitkä kokonaislukujen renkaan ideaalit ovat alkuideaaleja?

7.28. Olkoon K kommutatiivinen rengas ja olkoon $\mathscr{I} \neq K$ sen ideaali. Osoita, että tekijärengas $K/\mathscr{I}$ on kokonaisalue, jos ja vain jos $\mathscr{I}$ on alkuideaali.

7.29. Osoita, että kommutatiivisen renkaan jokainen maksimaalinen ideaali on alkuideaali.

7.30. Osoita, esimerkillä, että että kommutatiivisen renkaan alkuideaali ei välttämättä ole maksimaalinen.

Olkoot L ja M kommutatiivisen renkaan K ideaaleja. Ideaalien L ja M *tulo* on

$$LM = \{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n : x_i \in L, y_i \in M, n \in \mathbb{N}\},$$

ja niiden *summa* on

$$L + M = \{x + y : x \in L, y \in M\}.$$

7.31. Olkoot L ja M kommutatiivisen renkaan K ideaaleja. Osoita, että LM ja $L + M$ ovat renkaan K ideaaleja.

7.32. Määritä renkaan $\mathbb{Z}$ ideaalien $4\,\mathbb{Z}$ ja $19\,\mathbb{Z}$ summa ja tulo. Anna vastaukset muodossa $m\,\mathbb{Z}$ sopivalla $m \in \mathbb{N}$.

Olkoon K kommutatiivinen rengas. Alkion $k \in K$ *annihilaattori* on

$$\mathrm{A}(k) = \{a \in K : ak = 0\}.$$

7.33. Olkoon K kommutatiivinen rengas ja olkoon $k \in K$. Osoita, että $\mathrm{A}(k)$ on ideaali.

Osa III

Ryhmät

Luku 8

Ryhmät

Tässä luvussa tarkastelemme laskutoimituksella varustettuja joukkoja, joiden laskutoimitukselta oletamme muutamia yksinkertaisia ominaisuuksia. Näin määriteltävä ryhmän käsite on tärkeä esimerkiksi geometriassa ja lukuteoriassa. Ryhmiä käsitellään lyhyesti myös kurssilla RENKAAT JA KUNNAT luvussa 3.1 koska kommutatiivisen ryhmän käsite esiintyy renkaan määritelmässä.

8.1 Ryhmä

Laskutoimituksella varustettu joukko[a] $(G, *)$ on *ryhmä*, jos

- laskutoimitus $*$ on assosiatiivinen,
- laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio,
- jokaisella $g \in (G, *)$ on käänteisalkio.

Ryhmän G alkioiden lukumäärä $\#G$ on ryhmän G *kertaluku*.

[a] Muista määritelmä luvusta 1.1.

Ryhmä on keskeinen algebran rakenne, joka esiintyy monilla matematiikan aloilla esimerkiksi lineaarialgebrassa, geometriassa ja lukuteoriassa. Tällä kurssilla käsittelemme esimerkkejä eri aloilta yleisen teorian tarkastelun lisäksi.

Esimerkki 8.1. Esimerkkien 1.8 ja 1.16 nojalla laskutoimituksella varustetut joukot $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, , +)$ $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, kongruenssiluokkien *additiivinen ryhmä* $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ kaikilla $q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$[1] ja *multiplikatiiviset ryhmät*

$$\mathbb{Z}^\times = (\{-1, 1\}, \cdot), \quad \mathbb{Q}^\times = (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot), \quad \mathbb{R}^\times = (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot) \text{ ja } \quad \mathbb{C}^\times = (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$$

ovat ryhmiä.

[1] Katso luvut 2.1 ja 2.4.

Kurssilla RENKAAT JA KUNNAT käsitellään näiden esimerkkien yleistyksiä, renkaan R additiivista ryhmää $(R,+)$ ja yksiköiden ryhmää eli multiplikatiivista ryhmää $R^\times$, jonka laskutoimitus on renkaan R kertolasku.

Ryhmän laskutoimitus jätetään usein mainitsematta ja puhutaan vain *ryhmästä* G. Tällöin laskutoimitus on kuitenkin kiinnitetty ja usein konkreettisessa tilanteessa se on ennalta tiedossa.

Esimerkki 8.2. Ryhmän $\mathbb{Z}$ laskutoimitus on yhteenlasku, ryhmän $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ laskutoimitus on kongruenssiluokkien yhteenlasku ja ryhmän $\mathbb{C}^\times$ laskutoimitus on kompleksilukujen kertolasku.

Puhuttaessa abstraktisti ryhmästä G merkitään laskutoimitusta usein kuten kertolaskua ja neutraalialkiolle käytetään merkintää e tai joskus myös merkintää 1. Tällöin ryhmää G kutsutaan *multiplikatiiviseksi ryhmäksi*.

Jos tarkastellaan useampia ryhmiä samalla kertaa voidaan niiden neutraalialkioille käyttää ryhmille käytettävien merkintöjen kanssa yhteensopivaa merkintää esimerkiksi niin, että esimerkiksi ryhmän G' neutraalialkiota merkitään e'.

Propositio 8.3. *Olkoon G ryhmä, jonka neutraalialkio on e. Tällöin*

(1) Neutraalialkio e on yksikäsitteinen.

(2) Jokaisen alkion käänteisalkio on yksikäsitteinen.

(3) Jos $\bar{a}a = e$, niin $\bar{a}$ on alkion a käänteisalkio.

(4) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ kaikilla $a, b \in G$.

Todistus. (1) Propositio 1.12.
(2) Katso Propositio 1.18 ja Harjoitustehtävä 1.15.
(3) Alkiolla a on käänteisalkio a^{-1}. Oletuksesta seuraa neutraalialkion ja käänteisalkion määritelmien ja assosiatiivisuuden nojalla

$$\bar{a} = \bar{a}e = \bar{a}(aa^{-1}) = (\bar{a}a)a^{-1} = a^{-1}\,.$$

(4) Assosiatiivisuuden, neutraalialkion määritelmän ja käänteisalkion määritemän nojalla

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}(ab)) = b^{-1}\big((a^{-1}a)b\big) = b^{-1}b = e,$$

joten väite seuraa kohdasta (3). □

Propositio 8.3(3) helpottaa käänteisalkion etsimistä ryhmässä: riittää tarkastaa, että alkio on vasen tai oikea käänteisalkio.

Supistussäännöt ovat voimassa laskutoimituksella varustetussa joukossa $(A,*)$, jos kaikilla $a, b, c \in A$ pätee

(1) Jos $a * b = a * c$, niin $b = c$.

(2) Jos $a * b = c * b$, niin $a = c$.

Propositio 8.4. *Supistussäännöt pätevät ryhmässä.*

Todistus. Olkoon G ryhmä ja olkoot $a, b, c \in G$ siten, että $ab = ac$. Siis

$$b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = c\,,$$

joten sääntö (1) pätee. Sääntö 2 todistetaan samaan tapaan. □

Propositio 8.5. *Olkoon A assosiatiivisella laskutoimituksella varustettu joukko, jossa on neutraalialkio. Tällöin A on ryhmä, jos ja vain jos yhtälöillä $ax = b$ ja $ya = b$ on ratkaisu joukossa A kaikilla $a, b \in A$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 8.5. □

Lemma 8.6. *Äärellisen ryhmän laskutaulussa*[2] *jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa esiintyvät kaikki ryhmän alkiot.*

Todistus. Harjoitustehtävä 8.6. □

Esimerkki 8.7. Neljän alkion ryhmän $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ laskutaulu on

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

.

Laskutaulussa käytetään kongruenssiluokan $k + 4\mathbb{Z}$ merkintänä edustajaa $k \in \mathbb{Z}$.

Ryhmä G on *kommutatiivinen ryhmä* eli *Abelin ryhmä*, jos sen laskutoimitus on kommutatiivinen.

Jos kommutatiivisen ryhmän G laskutoimituksen merkki on $+$, niin ryhmää $(G, +)$ kutsutaan *additiiviseksi ryhmäksi*. Additiivisen ryhmän neutraalialkiolle käytetään merkintää 0 tai esimerkiksi 0_G.

Merkintää $+$ käytetään ainoastaan kommutatiiviselle laskutoimitukselle.

Esimerkki 8.8. Ryhmät $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ja $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ovat kommutatiivisia.

Esimerkki 8.9. Olkoon $X \neq \emptyset$. Esimerkissä 1.10 havaitsimme, että joukon X^X laskutoimitus $\circ$ on assosiatiivinen ja että se ei ole kommutatiivinen, jos joukossa X on ainakin kaksi alkiota.

Osajoukko $\{f\colon X \to X \,:\, f \text{ on bijektio}\} \subset X^X$ on vakaa, koska tunnetusti kahden bijektion yhdistetty kuvaus on bijektio. Siis laskutoimitus $\circ$ määrää laskutoimituksen bijektioiden muodostamassa osajoukossa. Edellä tekemämme havainnot osoittavat, että joukon X bijektiot itselleen muodostavat ryhmän.

[2]Katso luku 1.1. Ryhmän laskutaulua kutsutaan usein kertotauluksi, jos laskutoimitus ei ole $+$.

Olkoon X epätyhjä joukko. Laskutoimituksella varustettu joukko

$$\mathrm{Perm}(X) = (\{f\colon X \to X : f \text{ on bijektio}\}, \circ)$$

on joukon X *permutaatioryhmä*.
Ryhmän $\mathrm{Perm}(X)$ alkiot ovat joukon X *permutaatioita*.

8.2 Ryhmien suora tulo

Luvussa 1.1 tutustuimme laskutoimistusten tulolaskutoimitukseen. Määrittelemme nyt ryhmien suoran tulon mahdollisesti äärettömän monelle ryhmälle.

Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot G_α ryhmiä kaikilla $\alpha \in A$. Ryhmien G_α, $\alpha \in A$, *suora tulo* $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ on joukko

$$\prod_{\alpha\in A} G_\alpha = \left\{(g_\alpha)_{\alpha\in A} : g_\alpha \in G_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in A\right\}$$

varustettuna *tulolaskutoimituksella*: Jos $g = (g_\alpha)_{\alpha\in A}$ ja $h = (h_\alpha)_{\alpha\in A}$, niin $g = ((gh)_\alpha)_{\alpha\in A}$, missä

$$(gh)_\alpha = g_\alpha h_\alpha$$

kaikilla $\alpha \in A$ kaikilla $g, h \in \prod_{\alpha\in A} G_\alpha$.

Propositio 8.10. *Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot G_α ryhmiä kaikilla $\alpha \in A$. Tällöin $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ on ryhmä. Jos kaikki ryhmät G_α, $\alpha \in A$, ovat kommutatiivisia, niin $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ on kommutatiivinen ryhmä.*

Todistus. Olkoot $g = (g_\alpha)_{\alpha\in A}, h = (h_\alpha)_{\alpha\in A}, k = (k_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} G_\alpha$. Ryhmän G_β laskutoimituksen assosiatiivisuuden nojalla

$$(g(hk))_\beta = g_\beta(h_\beta k_\beta) = (g_\beta h_\beta)k_\beta = ((gh)k)_\beta$$

kaikille $\beta \in A$. Siis tulojoukon laskutoimitus on assosiatiivinen. Jos $e_\alpha \in G_\alpha$ on neutraalialkio, niin $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ on neutraalialkio laskutoimituksella varustetussa joukossa $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$. Alkion $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ käänteisalkio on $(g_\alpha^{-1})_{\alpha\in A}$.

Oletetaan, että kaikki ryhmät G_α, $\alpha \in A$ ovat kommutatiivisia. Ryhmän G_β laskutoimituksen kommutatiivisuuden nojalla

$$(gh)_\beta = g_\beta h_\beta = (h_\beta g_\beta) = (hg)_\beta$$

kaikille $\beta \in A$. Siis tulojoukon laskutoimitus on kommutatiivinen. □

Äärellisen monen ryhmän suora tulo on helpompi hahmottaa kuin yleinen määritelmä.

Esimerkki 8.11. Jos G_1 ja G_2 ovat ryhmiä, niin

$$\prod_{\alpha\in\{1,2\}} G_\alpha = G_1 \times G_2$$

ja laskutoimitus on

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1h_1, g_2h_2)$$

kaikille $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$.

Seuraus 8.12. *Olkoot G_1 ja G_2 ryhmiä. Niiden tulo $G_1 \times G_2$ on ryhmä. Jos e_1 ja e_2 ovat ryhmien G_1 ja G_2 neutraalialkiot, niin (e_1, e_2) on ryhmän $G_1 \times G_2$ neutraalialkio. Alkion $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ käänteisalkio on (g_1^{-1}, g_2^{-1}).* □

Esimerkki 8.13. (a) Kommutatiivisen ryhmän $(\mathbb{R}, +)$ n-kertainen tulo

$$(\mathbb{R}^n, +) = (\mathbb{R}, +)^n$$

on kommutatiivinen ryhmä. Samoin $(\mathbb{Z}^n, +)$ on kommutatiivinen ryhmä.
(b) Jos $q, r \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, niin $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ on äärellinen kommutatiivinen ryhmä. Yleisemmin, jos $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja $q_i \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ kaikille $1 \le i \le n$, niin $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z}$ on äärellinen kommutatiivinen ryhmä.

Esimerkki 8.14. Neljästä alkiosta koostuvan *Kleinin neliryhmän*

$$K_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

laskutaulu on

$+$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

. (8.1)

Laskutaulussa käytetään kongruenssiluokan $k+2\mathbb{Z}$ merkintänä edustajaa $k \in \mathbb{Z}$. Erityisesti huomaamme, että jokaiselle $g \in K_4$ pätee $g + g = (0, 0)$.

8.3 Ryhmähomomorfismit

Laskutoimituksella varustettujen joukkojen homomorfismien perusasioita käsiteltiin luvussa 1.3. Tässä luvussa aloitamme ryhmien välisten homomorfismien tarkastelun.

Jos G ja G' ovat ryhmiä, niin homomorfismi $\phi\colon G \to G'$ on *ryhmähomomorfismi.*
Bijektiivinen ryhmähomomorfismi on *ryhmäisomorfismi.*
Isomorfismi $\alpha\colon G \to G$ on ryhmän G *ryhmäautomorfismi.*
Jos on isomorfismi $\phi\colon G \to G'$, niin ryhmät G ja G' ovat *isomorfisia*, $G \cong G'$.

Esimerkki 8.15. (a) Eksponenttikuvaus $\exp\colon (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}_+,\cdot)$, $\exp(x) = e^x$, on ryhmäisomorfismi Esimerkin 1.6 nojalla.

(b) Proposition 1.26(1) nojalla kompleksikonjugointi $\bar{\cdot}\colon (\mathbb{C},+) \to (\mathbb{C},+)$ on kompleksilukujen additiivisen ryhmän automorfismi. Saman tuloksen kohdan (2) nojalla kompleksikonjugoinnin rajoittuma $\bar{\cdot}\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ on kompleksilukujen multiplikatiivisen ryhmän automorfismi. Proposition 1.26(3) nojalla kompleksilukujen normi $\mathbf{n}\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}_+ = \big(]0,\infty[,\cdot\big)$ on surjektiivinen ryhmähomomorfismi.

Propositio 8.16. *(1) Ryhmähomomorfismien yhdistetty kuvaus on ryhmähomomorfismi.*

(2) Isomorfismin käänteiskuvaus isomorfismi.

(3) Jos $G \cong G'$ ja $G' \cong G''$, niin $G \cong G''$.

(4) Jos G on kommutatiivinen ryhmä ja ryhmä G' ei ole kommutatiivinen, niin G ja G' eivät ole isomorfisia.

Todistus. Kohdat (1)–(3) seuraavat Propositiosta 1.7 ja kohta (4) Propositiosta 1.9(1). □

Propositio 8.17. *Ryhmähomomorfismi $\phi\colon G \to G'$ kuvaa ryhmän G neutraalialkion ryhmän G' neutraalialkioksi ja jokaiselle $g \in G$ pätee $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$.*

Todistus. Olkoon $\phi\colon G \to G'$ homomorfismi. Tällöin

$$e'\phi(e) = \phi(e) = \phi(ee) = \phi(e)\phi(e)\,,$$

mistä ensimmäinen väite seuraa supistussäännöllä.

Olkoon $g \in G$. Tällöin

$$\phi(g^{-1})\phi(g) = \phi(g^{-1}g) = \phi(e) = e'\,,$$

joten Proposition 8.3(3) nojalla $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$. □

Proposition 1.14 nojalla laskutoimituksella varustettujen joukkojen välinen surjektiivinen homomorfismi $h\colon (E,*) \to (E',\circledast)$ kuvaa laskutoimituksen $*$ neutraalialkion laskutoimituksen $\circledast$ neutraalialkioksi. Proposition 8.17 nojalla ryhmähomomorfismin tapauksessa ei tarvita surjektiivisuutta.

Jos ryhmät G_1 ja G_2 ovat isomorfisia, niin ryhmäteorian kannalta voidaan ajatella, että pohjimmiltaan on kyse samasta abstraktista ryhmästä.

Jatkossa merkintä K_4 tarkoittaa ryhmää, joka on isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ kanssa. Kutsumme tällaista ryhmää Kleinin neliryhmäksi.

Esimerkki 8.18. Neljän alkion kommutatiiviset ryhmät $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ja K_4 eivät ole isomorfisia. Kaikille $(a+2\mathbb{Z}, b+2\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pätee

$$(a+2\mathbb{Z}, b+2\mathbb{Z}) + (a+2\mathbb{Z}, b+2\mathbb{Z}) = (2a+2\mathbb{Z}, 2b+2\mathbb{Z}) = (0+2\mathbb{Z}, 0+2\mathbb{Z}).$$

Jos $\phi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ on homomorfismi ja $(a+2\mathbb{Z}, b+2\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, niin Proposition 8.17, edellisen huomion ja homomorfismin määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} 0+4\mathbb{Z} &= \phi(0+2\mathbb{Z}, 0+2\mathbb{Z}) = \phi((a+2\mathbb{Z}, b+2\mathbb{Z}) + (a+2\mathbb{Z}, b+2\mathbb{Z})) \\ &= \phi(a+2\mathbb{Z}, b+2\mathbb{Z}) + \phi(a+2\mathbb{Z}, b+2\mathbb{Z})\,. \end{aligned}$$

Jos ϕ olisi surjektio, niin kaikille $c+4\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ pätisi siis $(c+4\mathbb{Z})+(c+4\mathbb{Z}) = 0+4\mathbb{Z}$, mutta tämä ei päde, jos $c = \pm 1$.

Homomorfismit sopivat hyvin yhteen ryhmien tulon kanssa:

Propositio 8.19. *Jos $G_1 \cong H_1$ ja $G_2 \cong H_2$, niin $G_1 \times G_2 \cong H_1 \times H_2$.*

Todistus. Olkoot $\phi_1 \colon G_1 \to H_1$ ja $\phi_2 \colon G_2 \to H_2$ isomorfismeja. Määritellään isomorfismien ϕ_1 ja ϕ_2 tulo $\Phi \colon G_1 \times G_2 \to H_1 \times H_2$ asettamalla

$$\Phi(g_1, g_2) = \big(\phi_1(g_1), \phi_2(g_2)\big)$$

kaikille $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$.

On helppo tarkastaa, että Φ on bijektio ja sen käänteiskuvauksen lauseke on

$$\Phi^{-1}(h_1, h_2) = \big(\phi_1^{-1}(h_1), \phi_2^{-1}(h_2)\big)\,.$$

Riittää siis osoittaa, että Φ on homomorfismi. Olkoot $(g_1, g_2), (g_1', g_2') \in G_1 \times G_2$. Tällöin

$$\begin{aligned}\Phi((g_1, g_2)(g_1', g_2')) &= \Phi(g_1 g_1', g_2 g_2') = \big(\phi_1(g_1 g_1'), \phi_2(g_2 g_2')\big) \\ &= \big(\phi_1(g_1)\phi_1(g_1'), \phi_2(g_2)\phi_2(g_2')\big) \\ &= \Phi(g_1, g_2)\ \Phi(g_1', g_2')\,.\end{aligned}$$

□

8.4 Jäännösluokkien multiplikatiiviset ryhmät

Tässä luvussa tutustumme tärkeään kommutatiivisten ryhmien luokkaan.[3] Tässä luvussa tarvittavat lukuteorian määritelmät ja tulokset on esitetty liitteessä **??**.

Propositio 8.20. *Olkoon $q \geq 2$. Tällöin alkiolla $a+q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on käänteisalkio, jos ja vain jos* $\operatorname{syt}(a, q) = 1$. *Jos p on alkuluku ja $a \not\equiv 0 \bmod p$, niin alkiolla $a+p\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ on käänteisalkio.*

Todistus. Jäännösluokalla $a+q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on käänteisalkio, jos ja vain jos on $b \in \mathbb{Z}$, jolle

$$1+q\mathbb{Z} = (a+q\mathbb{Z})(b+q\mathbb{Z}) = ab+q\mathbb{Z}\,.$$

Tämä pätee, jos ja vain jos on $c \in \mathbb{Z}$, jolle $ab = 1+cq$. Tämä on Bézout'n yhtälön[4] nojalla yhtäpitävää sen kanssa, että $\operatorname{syt}(a, q) = 1$. □

Propositio 8.21. *Joukko $\{a+q\mathbb{Z} : \operatorname{syt}(a, q) = 1\}$ on laskutoimituksella varustetun joukon $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)$ vakaa osajoukko.*

Todistus. Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ siten, että $\operatorname{syt}(a, q) = \operatorname{syt}(b, q) = 1$. Proposition 8.20 nojalla on $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{Z}$ siten, että $\operatorname{syt}(\underline{a}, q) = \operatorname{syt}(\underline{b}, q) = 1$ ja

$$(a+q\mathbb{Z})(\underline{a}+q\mathbb{Z}) = 1+q\mathbb{Z} = (b+q\mathbb{Z})(\underline{b}+q\mathbb{Z})\,.$$

Kongruenssiluokkien kertolaskun assosiatiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\big((a+q\mathbb{Z})(b+q\mathbb{Z})\big)\big((\underline{b}+q\mathbb{Z})(\underline{a}+q\mathbb{Z})\big) &= (a+q\mathbb{Z})\big((b+q\mathbb{Z})(\underline{b}+q\mathbb{Z})\big)(\underline{a}+q\mathbb{Z}) \\ &= (a+q\mathbb{Z})(\underline{a}+q\mathbb{Z}) = 1+q\mathbb{Z}\,,\end{aligned}$$

joten Proposition 8.20 nojalla joukko $\{a+q\mathbb{Z} : \operatorname{syt}(a, q) = 1\}$ on vakaa. □

[3] Nyt määriteltävä ryhmä on *renkaan $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ yksiköiden ryhmä*. Katso luku 5.3.

[4] Propositio **??**

Seuraus 8.22. $\big(\{a+q\mathbb{Z} : \mathrm{syt}(a,q)=1\},\cdot\big)$ *on ryhmä.*

Todistus. Seuraa Propositioista 2.10 ja 8.21. □

Olkoon $q \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Laskutoimituksella varustettu joukko

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times = \big(\{a+q\mathbb{Z} : \mathrm{syt}(a,q)=1\},\cdot\big)$$

on *jäännösluokkien* mod q *multiplikatiivinen ryhmä.*

Esimerkki 8.23. $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = (\{1+8\mathbb{Z}, 3+8\mathbb{Z}, 5+8\mathbb{Z}, 7+8\mathbb{Z}\},\cdot)$. Ryhmän $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ laskutaulu on

$\cdot$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

, (8.2)

kun merkitsemme kongruenssiluokkaa $k+8\mathbb{Z}$ edustajallaan $k \in \{1,3,5,7\}$.

Esimerkki 8.24. Vertailemalla laskutauluja (8.1) ja (8.2) huomaamme, että kuvaus

$$\begin{aligned} 1+8\mathbb{Z} &\mapsto (0+2\mathbb{Z}, 0+2\mathbb{Z}), \\ 3+8\mathbb{Z} &\mapsto (1+2\mathbb{Z}, 0+2\mathbb{Z}), \\ 5+8\mathbb{Z} &\mapsto (0+2\mathbb{Z}, 1+2\mathbb{Z}), \\ 7+8\mathbb{Z} &\mapsto (1+2\mathbb{Z}, 1+2\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

on ryhmäisomorfismi ryhmien $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ ja $K_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ välillä.

8.5 Lineaarialgebrasta

Reaalinen[5] vektoriavaruus (eli $\mathbb{R}$-vektoriavaruus) muodostuu kommutatiivisesta ryhmästä $(V,+)$, jossa on määritelty alkioiden yhteenlaskun kanssa yhteensopiva kertominen reaaliluvulla. Reaaliluvulla kertominen tarkoittaa kuvausta $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$. Laskutoimitukselta ja reaaliluvulla kertomiselta oletetaan

(1) $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$ kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $v, w \in V$,

(2) $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$ kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja $v \in V$,

(3) $\mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v$ kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja $v \in V$ ja

(4) $1\,v = v$ kaikille $v \in V$.

Jos V ja W ovat $\mathbb{R}$-vektoriavaruuksia, niin kuvaus $L\colon V \to W$ on ($\mathbb{R}$-)lineaarikuvaus, jos se on homomorfismi kommutatiivisesta ryhmästä $(V,+)$ kommutatiiviseen ryhmään $(W,+)$, joka on lisäksi yhteensopiva reaaliluvulla kertomisen kanssa: Kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $v \in V$ pätee $L(\lambda v) = \lambda L(v)$.

Sen todistaminen, että kaikki homomorfismit reaalilukujen additiiviselta ryhmältä itselleen eivät ole $\mathbb{R}$-lineaarikuvauksia, on monimutkaisempaa. G. Hamel [Ham] todisti tämän tuloksen valinta-aksiooman avulla vuonna 1905.

[5] Tämä esimerkki pätee yleisessä kuntakertoimisessa vektoriavaruudessa, katso luku 4.5.

Harjoitustehtäviä

8.1. Osoita, että matriisien kertolaskulla varustetun joukon $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ osajoukko

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$$

on vakaa.[6] Osoita, että $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ varustettuna indusoidulla laskutoimituksella on ryhmä. Onko se kommutatiivinen ryhmä?

Olkoon X joukko. Joukkojen $A, B \in \mathscr{P}(X)$ *symmetrinen erotus* on

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)\,.$$

8.2. Olkoon $X \neq \emptyset$. Osoita, että $(\mathscr{P}(X), \triangle)$ on ryhmä.

8.3. Olkoon $X = \{1, 2, 3\}$. Muodosta ryhmän $(\mathscr{P}(X), \Delta)$ laskutaulu.

8.4. Olkoon $(G, *)$ ryhmä. Määritellään uusi laskutoimitus $\circledast$ joukossa G asettamalla

$$a \circledast b = b * a$$

kaikille $a, b \in G$. Osoita, että $(G, \circledast)$ on ryhmä.

8.5. Todista Propositio 8.5.

8.6. Todista Lemma 8.6.

8.7. Olkoon G ryhmä ja olkoon $e \in G$ neutraalialkio. Oletetaan, että jokaiselle $g \in G$ pätee $g^2 = e$. Osoita, että G on kommutatiivinen ryhmä.

8.8. Olkoon $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ äärellinen kommutatiivinen ryhmä. Olkoon $e = f_1$ ryhmän F neutraalialkio. Olkoon $a = f_1 f_2 \cdots f_n$ kaikkien ryhmän F alkioiden tulo. Osoita, että $a^2 = e$. Keksi esimerkki, jossa $a = e$ ja toinen esimerkki, jossa $a \neq e$.[7]

8.9. Varustetaan joukko $A = \{a, b, c, d, e\}$ laskutoimituksella $*$, jonka laskutaulu on

$*$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	e	d	b
b	b	d	c	a	e
c	c	e	d	b	a
d	d	b	a	e	c

Pätevätkö supistussäännöt laskutoimituksella varustetussa joukossa $(A, *)$? Onko $(A, *)$ ryhmä?

[6] Katso luku 1.2.

[7] Tässä tehtävässä käytetään multiplikatiivista merkintää mutta esimerkissä laskutoimitus voi olla myös $+$. Tällöin tarkastellaan siis kommutatiivisen ryhmän kaikkien alkioiden summaa.

8.10. Monellako eri tavalla voit täydentää taulukon

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

niin, että tuloksena on ryhmän laskutaulu? Mitä voit päätellä tästä havainnosta?

8.11. Olkoon G ryhmä ja olkoon $(A, *)$ laskutoimituksella varustettu joukko. Olkoon $\phi\colon G \to (A, *)$ homomorfismi. Osoita, että $\phi(G)$ on laskutoimituksella varustetun joukon $(A, *)$ vakaa osajoukko, joka on ryhmä indusoidulla laskutoimituksella.[8]

8.12. Määritellään reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ laskutoimitus $*$ asettamalla

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}\,.$$

Osoita, että $(\mathbb{R}, *)$ on ryhmä, joka on isomorfinen ryhmän $(\mathbb{R}, +)$ kanssa.

8.13. Olkoon G kommutatiivinen ryhmä. Osoita, että kuvaus $\psi\colon G \times G \to G$,

$$\psi\big((g, h)\big) = gh^{-1}$$

on homomorfismi.

8.14. Olkoon G ryhmä ja olkoon $a \in G$. Olkoon $\phi_a\colon G \to G$,

$$\phi_a(g) = aga^{-1}\,.$$

Osoita, että ϕ_a on ryhmän G automorfismi.

8.15. Minkä kurssilla käsitellyn ryhmän kanssa ryhmä $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ on isomorfinen?

8.16. Olkoon $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja olkoon $\mathscr{R}_n$ niiden laskutoimitusten $*$ joukko, joille laskutoimituksella varustettu joukko $(\{1, 2, \ldots, n\}, *)$ on ryhmä. Määritellään joukossa $\mathscr{R}_n$ relaatio $\sim$ asettamalla $* \sim \circ$, jos ja vain jos ryhmät $(\{1, 2, \ldots, n\}, *)$ ja $(\{1, 2, \ldots, n\}, \circ)$ ovat isomorfisia. Osoita, että relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.[9]

***8.17.** Olkoon $p > 3$ alkuluku. Osoita, että $1 + p\mathbb{Z}$ ja $-1 + p\mathbb{Z}$ ovat ainoat ryhmän $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ alkiot, jotka ovat omat käänteisalkionsa.[10] Osoita, että

$$(2 + p\mathbb{Z})(3 + p\mathbb{Z}) \cdots (p - 2 + p\mathbb{Z}) = 1 + p\mathbb{Z}\,.$$

***8.18.** Osoita, että

$$(p - 1)! \equiv -1 \mod p\,,$$

jos p on alkuluku.

8.19. Osoita, että

$$(q - 1)! \equiv 0 \mod q$$

jos $q \geq 6$ ei ole alkuluku.

[8] Luvuissa 1.4 ja 1.5 on hyödyllisiä tuloksia.

[9] Katso ekvivalenssirelaation määritelmä luvusta 2.1.

[10] Tämä tehtävä liittyy kurssin RENKAAT JA KUNNAT sisältöön eikä tehtävää ole mielekästä ratkaista pelkästään kurssin RYHMÄT tiedoilla. Katso Lause 6.20.

***8.20.** Olkoon p pariton alkuluku ja olkoon $k = \frac{p-1}{2}$. Osoita, että

$$(p-1)! \equiv (-1)^k (k!)^2 \mod p\,.$$

Osoita, että polynomi $X^2 + 1 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ ei ole jaoton, jos $p \equiv 1 \bmod 4$.[11]

Hamiltonin kvaterniot on joukko

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

varustettuna renkaasta $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ indusoiduilla laskutoimituksilla.
Hamiltonin kvaternioiden multiplikatiivinen ryhmä on

$$\mathbb{H}^\times = \left(\mathbb{H} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \cdot \right),$$

laskutoimituksena matriisien kertolasku.[a]

[a] Katso luku 4.4.

8.21. Osoita, että $\mathbb{H}^\times$ on ryhmä.

[11] Tämä tehtävä liittyy kurssin RENKAAT JA KUNNAT sisältöön eikä tehtävää voi ratkaista pelkästään kurssin RYHMÄT tiedoilla. Katso luku 6.6.

Luku 9

Aliryhmät

Tässä luvussa tarkastelemme jonkin ryhmän G osajoukkoja, jotka ovat itsekin ryhmiä ryhmän G laskutoimituksella. Näemme esimerkkejä siitä, miten nämä aliryhmät esiintyvät luonnollisella tavalla muun muassa homomorfismien ytiminä ja tarkastelemme ryhmän osajoukkojen virittämiä aliryhmiä.

9.1 Aliryhmät

Olkoon G ryhmä. Olkoon $B \subset G$, $B \neq \emptyset$, vakaa osajoukko.[a] Jos indusoidulla laskutoimituksella varustettu joukko B on ryhmä, niin se on ryhmän G *aliryhmä*. Jos $H \subset G$ on ryhmän G aliryhmä, käytämme merkintää $H \leq G$.

Jos aliryhmä H on ryhmän G aito osajoukko, se on ryhmän G *aito aliryhmä*. Tällöin käytämme merkintää $H < G$.

[a] Katso luku 1.2.

Merkinnät $H \leq G$ ja $H' < G$ sisältävät tietojen $H, H' \subset G$ ja $H' \neq G$ lisäksi siis sen, että H ja H' ovat ryhmiä, joiden laskutoimitus on ryhmän G laskutoimituksen indusoima.

Propositio 9.1. *Jos $G_1 \leq G_2$ ja $G_2 \leq G_3$, niin $G_1 \leq G_3$.*

Todistus. Oletuksen nojalla $G_1 \neq \emptyset$. Jos $g, h \in G_1$, niin $gh \in G_1$, koska $G_1 \leq G_2$. Siis G_1 on vakaa ryhmässä G_3. Ryhmän G_2 laskutoimitus indusoi joukkoon G_1 saman laskutoimituksen kuin ryhmän G_3 laskutoimitus. Koska G_1 on ryhmä tällä laskutoimituksella, niin se on ryhmän G_3 aliryhmä. □

Esimerkki 9.2. (a) Olkoon $a \in \mathbb{Z}$. Tällöin $a\mathbb{Z} = \{ak : k \in \mathbb{Z}\}$ on kokonaislukujen ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmä.

(b) Positiivisten reaalilukujen multiplikatiivinen ryhmä $\mathbb{R}_+ = \big(]0, \infty[, \cdot\big)$ on ryhmän $\mathbb{R}^\times$ aito aliryhmä.

Lemma 9.3. *Olkoon G ryhmä. Jokaisen aliryhmän $H \leq G$ neutraalialkio on ryhmän G neutraalialkio.*

Todistus. Jos joillekin $a, b \in H \leq G$ pätee $ab = b$, niin ryhmän G supistussäännön nojalla a on ryhmän G neutraalialkio. □

Kaikki ryhmän vakaat osajoukot eivät ole ryhmiä, esimerkiksi ryhmän $\mathbb{Z}$ vakaa osajoukko $\mathbb{N}$ ei ole ryhmä. Seuraava tulos antaa keinon tarkastaa, onko jokin ryhmän osajoukko aliryhmä:

Propositio 9.4 (Aliryhmätesti)**.** *Ryhmän G osajoukko $H \neq \emptyset$ on aliryhmä, jos*

(1) kaikilla $x, y \in H$ pätee $xy^{-1} \in H$, tai

(2) kaikilla $x, y \in H$ pätee $xy \in H$ ja $y^{-1} \in H$.

Todistus. Olkoon $e \in G$ neutraalialkio. Tarkastellaan ehtoa (1): Olkoon $h \in H$. Oletuksen mukaan $hh^{-1} \in H$, joten $e \in H$. Samoin $y^{-1} = ey^{-1} \in H$ kaikilla $y \in H$. Kaikki on siis kunnossa, jos H on vakaa osajoukko. Edellisen nojalla kaikille $x, y \in H$ pätee $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$, joten H on vakaa.
Ehdosta (2) seuraa ehto (1), joten väite seuraa kohdasta (1). □

Propositio 9.5. *Olkoon G ryhmä, olkoon $I \neq \emptyset$ jokin indeksijoukko ja olkoot $H_i \leq G$ kaikilla $i \in I$. Tällöin*

$$\bigcap_{i \in I} H_i \leq G.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 9.9.[1] □

Seuraus 9.6. *Olkoon G ryhmä, olkoot $H_1, H_2 \leq G$. Tällöin $H_1 \cap H_2 \leq G$.* □

Esimerkki 9.7. (a) Jokaisella ryhmällä on aliryhmiä: ryhmä itse ja neutraalialkion muodostama yhden alkion ryhmä.
(b) $(\{0\}, +) < (\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{Q}, +) < (\mathbb{R}, +) < (\mathbb{C}, +)$.
(c) $\{1\} < \{-1, 1\} < \mathbb{Q}^\times < \mathbb{R}^\times < \mathbb{C}^\times$.
(d) Olkoot G ja G' ryhmiä ja olkoot $e \in G$ ja $e' \in G'$ niiden neutraalialkiot. Tällöin $G \times \{e'\} \leq G \times G'$ ja $\{e\} \times G' \leq G \times G'$. Tarkastetaan ensimmäinen väite: Jos $g, h \in G \times \{e'\}$, niin $g = (g_0, e')$ ja $h = (h_0, e')$ joillain $g_0, h_0 \in G$. Tällöin $g^{-1} = (g_0^{-1}, e') \in G \times \{e'\}$ ja $gh = (g_0, e')(h_0, e') = (g_0 h_0, e') \in G \times \{e'\}$. Väite seuraa Aliryhmätestistä.[2]

Esimerkki 9.8. Määritelmän mukaan reaalisen vektoriavaruuden V aliavaruus on osajoukko $H \subset V$, joka on vakaa vektoriavaruuden V yhteenlaskun ja reaaliluvulla kertomisen suhteen ja on näillä operaatioilla varustettuna reaalinen vektoriavaruus. Erityisesti $(H, +)$ on additiivisen ryhmän $(V, +)$ aliryhmä.

Kaikki additiivisen ryhmän $(V, +)$ aliryhmät eivät ole $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden V vektorialiavaruuksia. Esimerkiksi $\mathbb{R}$-vektoriavaruudella $\mathbb{R}$ on vain kaksi aliavaruutta $\{0\}$ ja $\mathbb{R}$ mutta reaalilukujen additiivisella ryhmällä on paljon enemmän aliryhmiä: Esimerkiksi joukot

$$\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha\, k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$$

[1] Katso yleisen leikkauksen määritelmä sivulta vii.
[2] Propositio 9.4(2)

ja

$$\alpha\mathbb{Q} = \{\alpha\, q : q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

ovat ryhmän $(\mathbb{R}, +)$ vakaita osajoukkoja kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$ ja on helppo tarkastaa, että

$$\{0\} < (\alpha\mathbb{Z}, +) < (\alpha\mathbb{Q}, +) < (\mathbb{R}, +)$$

kaikilla $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

9.2 Aliryhmäkaavio

Monissa tapauksissa ryhmän rakennetta voi havainnollistaa aliryhmäkaaviolla.

Aliryhmäkaaviossa tarkasteltavan ryhmän aliryhmät asetellaan päällekäisille tasoille. Aliryhmä H yhdistetään janalla ylemmällä tasolla olevan aliryhmän K kanssa, jos $H < K$ eikä ole aliryhmää L, jolle pätee $H < L < K$.

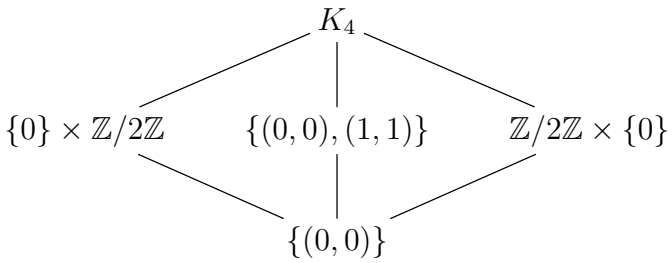
Äärellisen ryhmän aliryhmäkaaviossa esiintyvät aliryhmät voidaan esimerkiksi jaotella niiden kertaluvun mukaan siten, että kertaluvultaan suuremmat ryhmät ovat ylemmillä tasoilla.

Esimerkki 9.9 (Kleinin neliryhmän aliryhmäkaavio)**.** Jokaisella ryhmällä on aliryhmä, joka koostuu neutraalialkiosta, siis $\{0\} = \{(0 + 2\mathbb{Z}, 0 + 2\mathbb{Z})\} < K_4$. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi merkitsemme seuraavassa ryhmän $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ alkiota $a + 2\mathbb{Z}$ edustajalla $a \in \{0, 1\}$. Jos $H \leq K_4$, niin Lemman 9.3 nojalla $(0, 0) \in H$. Siis ryhmällä K_4 on kolme kahden alkion osajoukkoa, jotka voivat olla aliryhmiä: $\{(0, 0), (0, 1)\} = \{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\{(0, 0), (1, 0)\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\}$ ja $\{(0, 0), (1, 1)\}$. Esimerkin 8.14 ja aliryhmätestin nojalla nämä ovat kaikki aliryhmiä. Itse asiassa $\{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} < K_4$ ja $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\} < K_4$ myös Esimerkin 9.7(d) nojalla.

Olkoon $H \leq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 = K_4$ siten, että $\#H \geq 3$. Jos $(1, 0), (0, 1) \in H$, niin

$$(1 + 2\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z}) = (1 + 2\mathbb{Z}, 0 + 2\mathbb{Z}) + (0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z}) \in H\,,$$

joten $H = K_4$. Vastaavasti nähdään, että ehdoista $(1, 0), (1, 1) \in H$ ja $(0, 1), (1, 1) \in H$ seuraa $H = K_4$. Siis ryhmällä K_4 ei ole kolmen alkion aliryhmiä, joten Kleinin 4-ryhmän $K_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ aliryhmäkaavio on



Tarkastelemme aliryhmäkaavion muodostamista uudelleen luvussa 11.3, jossa todistettava Lagrangen lause[3] sulkee joitain äärellisen ryhmän aliryhmän kertalukuja pois. Lagrangen lauseen nojalla Esimerkissä 9.9 tarkastellulla Kleinin neliryhmällä ei ole kolmen alkion aliryhmiä. Koska tämä tulos ei vielä ole käytettävissä, tarkastelimme nyt kaikki mahdollisuudet erikseen.

[3]Lause 11.10

9.3 Lineaariset ryhmät

Matematiikan eri aloilla joukkoihin voidaan liittää erilaisia lisärakenteita kuten vektoriavaruusrakenne, sisätulo, laskutoimitus tai etäisyysfunktio. Tällaisten joukkojen permutaatioryhmien[4] osajoukot, jotka säilyttävät valitun rakenteen tai ovat sen kanssa yhteensopivia, ovat usein ryhmiä.

Esimerkki 9.10. Lineaarialgebrassa osoitetaan, että lineaarikuvausten yhdistetty kuvaus on lineaarikuvaus ja että lineaarisen bijektion käänteiskuvaus on lineaarikuvaus. Aliryhmätestin nojalla $\{L \in \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n) : L \text{ on lineaarikuvaus}\} \leq \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$. Lisäksi jokaisella $n \geq 1$ on helppo keksiä joukon $\mathbb{R}^n$ permutaatioita, jotka eivät ole lineaarikuvauksia. Siis lineaarikuvaukset muodostavat permutaatioryhmän aidon aliryhmän.

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ *yleinen lineaarinen ryhmä* on

$$\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) = \{L \in \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n) : L \text{ on lineaarikuvaus}\}.$$

Propositio 9.11. *Olkoon* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$[5] *ja olkoon* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. *Matriisien kertolaskulla varustettu joukko* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : \det A \neq 0\}$ *on ryhmä.*

Todistus. Esimerkin 1.5(1) nojalla $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on matriisien kertolaskulla varustetun joukon $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ vakaa osajoukko. Siis matriisien kertolasku indusoi tähän joukkoon laskutoimituksen, joka on lineaarialgebran tietojen nojalla assosiatiivinen.[6] Identtinen matriisi $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on tämän laskutoimituksen neutraalialkio.

Jos $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,niin jokaisella matriisilla $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, jonka determinantti ei ole 0, on käänteismatriisi $A^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, jonka determinantti on $1/\det A \neq 0$. Käänteismatriisi A^{-1} on alkion A käänteisalkio matriisien kertolaskulla varustetussa joukossa $\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : \det A \neq 0\}$, joka on siis ryhmä. □

Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.[5] Matriisien kertolaskulla varustettu joukko

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : \det A \neq 0\}$$

on $\mathbb{K}$-kertoiminen *yleinen lineaarinen ryhmä.*

Propositio 9.12. $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Todistus. Olkoon $\mathrm{Mat}\colon \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ kuvaus, joka liittää lineaariseen bijektioon $L \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ sen matriisin standardikannan $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ suhteen:

$$\mathrm{Mat}(L)_{ij} = (\mathbf{e}_i \mid L\mathbf{e}_j)$$

kaikille $1 \leq i, j \leq n$. Lineaarialgebran kurssilla osoitetaan, että kaikille $L_1, L_2 \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ pätee

$$\mathrm{Mat}(L_1 L_2) = \mathrm{Mat}(L_1)\,\mathrm{Mat}(L_2).$$

[4] Permutaatioryhmät määriteltiin luvun 8.1 lopussa.
[5] Riittää, että $\mathbb{K}$ on kunta. Kuntia käsitellään kurssilla Renkaat ja kunnat, katso luku 4.
[6] Katso Esimerkki 1.5.

Lisäksi on helppo tarkastaa, että jokainen matriisi $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ määrää lineaarikuvauksen $L_A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ asettamalla $L_A(x) = Ax$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ ja että $\mathrm{Mat}(L_A) = A$ kaikille $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. □

Olkoon G ryhmä ja olkoon $X \neq \emptyset$. Ryhmän G *toiminta joukolla* X on homomorfismi $\rho\colon G \to \mathrm{Perm}(X)$.

Jos toiminta on injektio, se on *uskollinen toiminta*.

Esimerkki 9.13. Isomorfismi Mat^{-1} on ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ uskollinen toiminta joukolla $\mathbb{R}^n$.

Olkoon $\rho\colon G \to \mathrm{Perm}(X)$ ryhmän G toiminta joukolla X. Usein homomorfismi ρ jätetään merkitsemättä ja kuvausta $\rho(g)\colon X \to X$ merkitään alkiolla $g \in G$. Merkintä $g(x)$ tarkoittaa tällaisessa yhteydessä samaa kuin merkintä $(\rho(g))(x)$. Usein toiminnalle käytetään merkintää $g \cdot x = (\rho(g))(x)$.

Jatkossa samastamme matriisin ja sen standardikannassa määräämän lineaarikuvauksen. Matriisin A määräämää lineaarikuvausta kutsutaan usein lineaarikuvaukseksi A.

Matriisien kertolaskulla varustettu joukko $\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) : \det A \neq 0\}$ on yleisen lineaarisen ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ vakaa osajoukko mutta se ei ole aliryhmä: Diagonaalimatriisin $D = \mathrm{diag}(2, 2, \ldots, 2)$ determinantti on $2^n \neq 0$, joten matriisilla D on rationaalisessa yleisessä lineaarisessa ryhmässä käänteismatriisi

$$D^{-1} = \mathrm{diag}(1/2, 1/2, \ldots, 1/2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\,.$$

Matriisien kertolasku on assosiatiivinen, joten käänteismatriisi on yksikäsitteinen Proposition 1.18 nojalla. Siis matriisilla D ei ole käänteismatriisia laskutoimituksella varustetussa joukossa $\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) : \det A \neq 0\}$.

Propositio 9.14. *Jokaisella $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ pätee*

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) : \det A = 1\} < \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 9.10. □

Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. [a] Matriisien kertolaskulla varustettu joukko

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : \det A = 1\}$$

on $\mathbb{K}$-kertoiminen *erityinen lineaarinen ryhmä*.

[a] Riittää, että $\mathbb{K}$ on kommutatiivinen rengas, katso luku 3.

Esimerkki 9.15. Ryhmät $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ja $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eivät ole kommutatiivisia, kun $n \geq 2$. Katso Esimerkki 1.8.

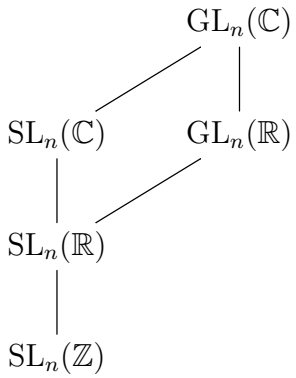
Esimerkki 9.16. Kaikilla $n \geq 2$ pätee esimerkiksi

$$\{I_n\} < \{-I_n, I_n\} < \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\,.$$

Kun n on parillinen,[7] niin pätee

$$\{I_n\} < \{-I_n, I_n\} < \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) < \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}) < \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\,.$$

Yleisten ja erityisten lineaaristen ryhmien suhteita voi myös havainnollistaa aliryhmäkaaviolla.



9.4 Homomorfismit ja aliryhmät

Seuraava tulos osoittaa, että homomorfismit sopivat aliryhmien kanssa hyvin yhteen.

Propositio 9.17. *Olkoon $\phi\colon G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Tällöin*
(1) $\phi(H) \leq G'$ kaikilla $H \leq G$.
(2) $\phi^{-1}(H') \leq G$ kaikilla $H' \leq G'$.

Todistus. (1) Koska H on ryhmä, se sisältää ainakin yhden alkion, joten $\phi(H)$ ei ole tyhjä joukko. Olkoot $\phi(g), \phi(h) \in \phi(H)$. Proposition 8.17 nojalla

$$\phi(g)(\phi(h))^{-1} = \phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(gh^{-1}) \in \phi(H),$$

koska $gh^{-1} \in H$. Siis $\phi(H) \leq G'$ Proposition 9.4(1) nojalla.
(2) Harjoitustehtävä 9.13. □

Olkoot G ja G' ryhmiä ja olkoon e' ryhmän G' neutraalialkio. Ryhmähomomorfismin $\phi\colon G \to G'$ *ydin* on

$$\ker \phi = \phi^{-1}(e')$$

ja sen *kuva* on

$$\mathrm{Im}\, \phi = \phi(G)\,.$$

Seuraus 9.18. *Jos $\phi\colon G \to G'$ on ryhmähomomorfismi, niin* $\mathrm{Im}\, \phi \leq G'$ *ja* $\ker \phi \leq G$. □

[7] Huomaa, että $\det(-I_3) = -1$.

Esimerkki 9.19. (a) Tekijähomomorfismin $\pi_q\colon (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z},+)$, $\pi_q(k) = k + q\mathbb{Z}$, ydin on $q\mathbb{Z}$.
(b) Determinantti määrää ryhmähomomorfismin $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$, jonka ydin on $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Samoin ryhmähomomorfismin $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ ydin on $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Tarkastelemme ryhmähomomorfismin ydintä ja kuvaa lähemmin luvussa 12. Seuraava ytimen ominaisuus on hyvä todeta jo tässä vaiheessa:

Propositio 9.20. *Ryhmähomomorfismi on injektio, jos ja vain jos sen ydin on neutraalialkion muodostama ryhmä.*

Todistus. Olkoon $\phi\colon G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Proposition 8.17 nojalla ryhmän G neutraalialkio e kuvautuu ryhmän G' neutraalialkioksi e', joten jos ϕ on injektio, sen ydin on $\{e\}$.

Oletetaan, että $\ker\phi = \{e\}$. Olkoot $x, y \in G$ siten, että $\phi(x) = \phi(y)$. Proposition 8.17 nojalla

$$\phi(xy^{-1}) = \phi(x)(\phi(y))^{-1} = e'\,.$$

Oletuksen nojalla $xy^{-1} = e$, joten $x = y$. □

Proposition 9.20 mukaan ryhmähomomorfismin injektiivisyyden toteamiseksi riittää tarkastella neutraalialkion alkukuvaa.

9.5 Osajoukon virittämä aliryhmä

Olkoon G ryhmä ja olkoon $B \subset G$, $B \neq \emptyset$. Joukon B *virittämä aliryhmä* $\langle B\rangle$ on

$$\langle B\rangle = \bigcap\{H \leq G : B \subset H\} \leq G\,.$$

Joukko B on aliryhmän $\langle B\rangle$ *virittäjäjoukko* ja joukon B alkiot ovat ryhmän $\langle B\rangle$ *virittäjiä*. Jos $\langle B\rangle = G$, niin joukko B *virittää* ryhmän G.

Proposition 9.5 nojalla osajoukon $B \subset G$ virittämä aliryhmä on ryhmän G aliryhmä. Se on pienin joukon B sisältävä aliryhmä. Erityisesti, jos $H \leq G$, niin $\langle H\rangle = H$. Seuraava tulos kertoo, miten aliryhmä $\langle B\rangle$ voidaan esittää konkreettisesti virittäjiensä avulla:

Propositio 9.21. *Olkoon G ryhmä ja olkoon $e \in G$ neutraalialkio. Olkoon $B \subset G$, $B \neq \emptyset$. Olkoon $B^{-1} = \{b^{-1} : b \in B\}$. Joukon B virittämä aliryhmä on*

$$\begin{aligned}&\left\{b_1^{\pm1}b_2^{\pm1}\cdots b_k^{\pm1} : b_1, b_2, \ldots, b_k \in B, k \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}\\ &= \left\{a_1a_2\cdots a_k : a_1, a_2, \ldots, a_k \in B \cup B^{-1}, k \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}. \qquad (9.1)\end{aligned}$$

Todistus. Lausekkeen (9.1) antama osajoukko $\widetilde{B}$ on ryhmän G aliryhmä Proposition 8.3(4) ja aliryhmätestin[8] nojalla. Se sisältää joukon B, joten $\langle B\rangle \leq \widetilde{B}$.

Proposition 9.5 nojalla $\langle B\rangle$ on ryhmän G aliryhmä, joten erityisesti se on vakaa osajoukko. Koska $B \subset \langle B\rangle$, niin jokaisen alkion $b \in B$ käänteisalkio b^{-1} kuuluu ryhmään $\langle B\rangle$. Vakaudesta seuraa, että $\langle B\rangle$ sisältää kaikki muotoa $b_1^{\pm1}b_2^{\pm1}\cdots\cdots b_k^{\pm1}$ olevat alkiot. Siis $\widetilde{B} \leq \langle B\rangle$. □

[8] Propositio 9.4

Proposition 9.21 nojalla ryhmän G osajoukon B virittämä aliryhmä koostuu kaikista niistä ryhmän G alkioista, jotka voidaan esittää sanoina joukon B alkioista ja niiden käänteisalkioista.

Esimerkki 9.22. (a) $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$ ja kaikilla $q \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}$ pätee $\langle q \rangle < \mathbb{Z}$. Toisaalta $\mathbb{Z} = \langle 2, 3 \rangle = \langle 6, 10, 15 \rangle$, koska $1 = 3 - 2 = 6 + 10 - 15$, mutta aliryhmät $\langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 6, 10 \rangle = \langle 2 \rangle$, $\langle 6, 15 \rangle = \langle 3 \rangle$ ja $\langle 10, 15 \rangle = \langle 5 \rangle$ ovat ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aitoja aliryhmiä.
(b) Kokeilemalla kaikki tapaukset on helppo nähdä, että jokainen nollasta poikkeava alkio virittää ryhmän $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \langle 1 + 5\mathbb{Z} \rangle = \langle 2 + 5\mathbb{Z} \rangle = \langle 3 + 5\mathbb{Z} \rangle = \langle 4 + 5\mathbb{Z} \rangle .$$

Toisaalta $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle 1 + 4\mathbb{Z} \rangle = \langle 3 + 4\mathbb{Z} \rangle$ mutta $\langle 2 + 4\mathbb{Z} \rangle = \{0 + 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}\} < \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
(c) Jos G on ryhmä, $B \subset G$ ja $b \in B$, niin ryhmän G neutraalialkio e voidaan esittää äärettömän monen sanan avulla $e = bb^{-1} = b^{-1}b = bbb^{-1}b^{-1} = \cdots$. Tästä seuraa, että jokainen aliryhmän $\langle B \rangle$ alkio voidaan esittää äärettömän monella eri tavalla sanana joukon $B \cup B^{-1}$ alkioista.

Seuraava tulos osoittaa, että ryhmässä G määritelty ryhmähomomorfismi määräytyy yksikäsitteisesti, jos sen arvot tunnetaan virittäjäjoukossa.

Propositio 9.23. *Olkoon $G = \langle S \rangle$ ryhmä. Olkoot $\phi, \psi \colon G \to H$ ryhmähomomorfismeja, joille pätee $\phi|_S = \psi|_S$. Tällöin $\phi = \psi$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 9.15. □

9.6 Syklinen ryhmä

Tässä luvussa tarkastelemme yhden alkion virittämiä ryhmiä.

Ryhmä Z on *syklinen ryhmä*, jos on $a \in Z$ siten, että $Z = \langle a \rangle$.

Lemma 9.24. *Syklinen ryhmä on kommutatiivinen.*

Todistus. Olkoon $Z = \langle a \rangle$. Jos $g, h \in Z$, niin $g = a^k$ ja $h = a^\ell$ joillain $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Lemman 1.27 nojalla

$$gh = a^k a^\ell = a^{k+\ell} = a^{\ell+k} = a^\ell a^k = hg .$$ □

Esimerkki 9.25. (a) Olkoon G multiplikatiivinen ryhmä ja olkoon H additiivinen ryhmä. Aliryhmät

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} \leq G$$

ja

$$\langle b \rangle = \{n\, b : n \in \mathbb{Z}\} \leq H$$

ovat alkioiden $a \in G$ ja $b \in H$ virittämät sykliset aliryhmät.[9]
(b) Edellä käsitellyistä esimerkeistä muun muassa ryhmät $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ ja $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \langle 1 + q\mathbb{Z} \rangle$, $q \geq 2$, ovat syklisiä.

[9] Katso potenssin ja monikerran määritelmät luvusta 1.9.

(c) Ryhmän $(\mathbb{R}^2, +)$ alkiot $(0,1)$ ja $(1,0)$ virittävät aliryhmän

$$\langle (0,1), (1,0) \rangle = (\mathbb{Z}^2, +) < (\mathbb{R}^2, +).$$

$(\mathbb{Z}^2, +)$ ei ole syklinen ryhmä: Jos $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, niin $(-a, b) \notin \langle (a,b) \rangle$. Lisäksi alkioiden $(a,0)$ ja $(0,a)$ virittämät sykliset ryhmät sisältyvät ryhmän $(\mathbb{Z}^2, +)$ aitoihin aliryhmiin $\mathbb{Z} \times \{0\}$ ja $\{0\} \times \mathbb{Z}$, joten myöskään tätä muotoa olevat alkiot eivät voi yksinään virittää ryhmää $(\mathbb{Z}^2, +)$.

(d) Kleinin neliryhmä K_4 ei ole syklinen, koska jokaisen neutraalialkiosta poikkeavan alkion virittämä syklinen ryhmä on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kanssa.

Ryhmän G alkion g *kertaluku* $\operatorname{ord} g$ on sen virittämän syklisen aliryhmän kertaluku,

$$\operatorname{ord} g = \#\langle g \rangle .$$

Lemma 9.26. *Olkoon G ryhmä, jonka neutraalialkio on e. Jos jollain $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ pätee $g^k = e$, niin*

$$\operatorname{ord} g = \min\{k \geq 1 : g^k = e\}.$$

Lisäksi

$$\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \ldots, g^{\operatorname{ord} g - 1}\} .$$

Todistus. Harjoitustehtävä 9.20. □

Esimerkki 9.27. (a) Ryhmän K_4 kertaluku on 4 ja sen jokaisen neutraalialkiosta poikkeavan alkion kertaluku on 2.

(b) Ryhmän $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ kertaluku on 4 ja sen alkioiden $1 + 4\mathbb{Z}$ ja $3 + 4\mathbb{Z}$ kertaluku on 4. Tämä on helppo tarkastaa vaikka alkiolle $3 + 4\mathbb{Z}$:

$$2(3 + 4\mathbb{Z}) = (3 + 4\mathbb{Z}) + (3 + 4\mathbb{Z}) = 6 + 4\mathbb{Z} = 2 + 4\mathbb{Z},$$

$$3(3 + 4\mathbb{Z}) = (2 + 4\mathbb{Z}) + (3 + 4\mathbb{Z}) = 5 + 4\mathbb{Z} = 1 + 4\mathbb{Z}$$

ja

$$4(3 + 4\mathbb{Z}) = (1 + 4\mathbb{Z}) + (3 + 4\mathbb{Z}) = (4 + 4\mathbb{Z}) = 0 .$$

Kokonaislukujen additiivisella ryhmällä on sykliset aliryhmät

$$n\mathbb{Z} = \langle n \rangle = \{kn : k \in \mathbb{Z}\},$$

$n \in \mathbb{N}$. Itse asiassa ryhmällä $(\mathbb{Z}, +)$ ei ole mitään muita aliryhmiä:

Propositio 9.28. *Kokonaislukujen ryhmän $\mathbb{Z}$ kaikki aliryhmät ovat syklisiä.*

Todistus. Huomataan ensin, että $\{0\} = 0\,\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z} = 1\,\mathbb{Z}$. Olkoon $H < \mathbb{Z}$, $H \neq \{0\}$ jokin aliryhmä. Tällöin $H \cap (\mathbb{N} - \{0\})$ ei ole tyhjä ja tässä joukossa on pienin positiivinen kokonaisluku $q \in H$. Erityisesti $q\mathbb{Z} < H$.

Osoitamme, että $H = q\mathbb{Z}$. Jos on $m \in H - q\mathbb{Z}$, niin kokonaislukujen jakoyhtälön[10] nojalla $m = aq + b$ joillakin $a, b \in \mathbb{Z}$ siten, että $1 \leq b < q$. Nyt $b \in H$, joten q ei olekaan pienin positiivinen kokonaisluku ryhmässä H, mikä on ristiriita. Siis $H = q\mathbb{Z}$. □

[10] Propositio **??**

Lause 9.29. *(1) Syklinen ryhmä, jossa on vähintään kaksi alkiota, on isomorfinen joko ryhmän $\mathbb{Z}$ tai jonkin ryhmän $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $q \geq 2$ kanssa.*

(2) Syklisen ryhmän kuva ryhmähomomorfismissa on syklinen.

(3) Jokainen syklisen ryhmän aliryhmä on syklinen.

Todistus. (1) Olkoon $C = \langle g \rangle$ syklinen ryhmä ja olkoon $\phi\colon \mathbb{Z} \to C$, $\phi(n) = g^n$. Lemman 1.27 nojalla ϕ on homomorfismi ja ryhmän C määritelmän nojalla se on surjektio. Jos ϕ on injektio, niin se on isomorfismi Proposition 9.20 nojalla.

Jos ϕ ei ole injektio, niin Propositioiden 9.17, 9.20 ja 9.28 nojalla $\ker \phi = q\mathbb{Z}$ jollain $q \geq 2$. Olkoon $\psi\colon (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +) \to C$,

$$\psi(k + q\mathbb{Z}) = \phi(k) = g^k\,.$$

Kuvaus ψ on hyvin määritelty: jos $k \equiv k' \mod q$, niin $k - k' \in q\mathbb{Z} = \ker \phi$, joten

$$g^{k'} = \phi(k') = \phi(k')\phi(k - k') = \phi(k) = g^k\,,$$

koska ϕ on homomorfismi. Kuvaus ψ on homomorfismi:

$$\begin{aligned}\psi(n + q\mathbb{Z})\,\psi(m + q\mathbb{Z}) &= g^n g^m = g^{n+m} = \psi((n + m) + q\mathbb{Z}) \\ &= \psi((n + q\mathbb{Z}) + (m + q\mathbb{Z})).\end{aligned}$$

Homomorfismi ψ on surjektio, koska ϕ on surjektio. Proposition 9.20 nojalla injektiivisyyden todistamiseen riittää osoittaa, että $\ker \psi = \{0\}$. Oletetaan, että $\psi(k+q\mathbb{Z}) = e \in G$. Tällöin $\phi(k) = e$, joten $k \in q\mathbb{Z}$ ja $k+q\mathbb{Z} = q\mathbb{Z} = 0$. Siis C on isomorfinen äärellisen syklisen ryhmän $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ kanssa.

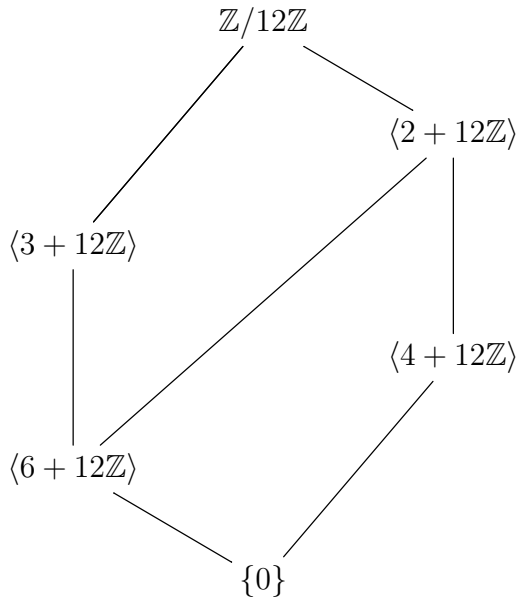
(2) Harjoitustehtävä 9.25.

(3) Väite todistettiin sykliselle ryhmälle $\mathbb{Z}$ Propositiossa 9.28. Olkoon $C = \langle g \rangle$ syklinen ryhmä ja olkoon $H < C$. Olkoon $\phi\colon \mathbb{Z} \to C$ (surjektiivinen) homomorfismi $\phi(n) = g^n$ kuten kohdan (1) todistuksessa. Proposition 9.17 nojalla $\phi^{-1}(H) \leq \mathbb{Z}$, joten Proposition 9.28 nojalla $\phi^{-1}(H) = N\mathbb{Z}$ jollain $N \in \mathbb{Z}$. Erityisesti $\phi^{-1}(H)$ on syklinen ryhmä. Koska $H = \phi(\phi^{-1}(H))$, väite seuraa kohdasta (2). □

Seuraus 9.30. *Jos G_1 ja G_2 ovat syklisiä ryhmiä ja $\#G_1 = \#G_2$, niin $G_1 \cong G_2$.* □

Esimerkki 9.31. Syklisen ryhmän $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ kaikki aliryhmät ovat syklisiä. Sen aliryh-

mäkaavio on



Tämä on helppo tarkastaa, sillä $\langle 1+12\mathbb{Z}\rangle = \langle 5+12\mathbb{Z}\rangle = \langle 7+12\mathbb{Z}\rangle = \langle 11+12\mathbb{Z}\rangle$, $\langle 2+12\mathbb{Z}\rangle = \langle 10+12\mathbb{Z}\rangle$, $\langle 3+12\mathbb{Z}\rangle = \langle 9+12\mathbb{Z}\rangle$

Esimerkki 9.32. Ryhmät $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ eivät ole syklisiä. Reaaliluvuille tämä on selvää, koska syklinen ryhmä on Lauseen 9.29 seurauksena aina numeroituva. Rationaalilukujen tapaus käsitellään harjoitustehtävässä 9.22.

Koska Lauseen 9.29 mukaan kaikki keskenään yhtä mahtavat sykliset ryhmät ovat isomorfisia keskenään, voimme puhua abstraktista *n alkion syklisestä ryhmästä* C_n ja *ääretömästä syklisestä ryhmästä* C_∞. [a]

[a] Toisinaan syklisille ryhmille käytetään merkintöjä Z_n ja Z_∞.

9.7 Ryhmien sisäinen suora tulo

Tässä luvussa tarkastelemme tilannetta, jossa voidaan osoittaa, että jokin ryhmä on isomorfinen kahden aliryhmänsä suoran tulon kanssa.[11] Tämä tieto helpottaa tarkasteltavan ryhmän rakenteen hahmottamisessa. Sovellamme tätä menetelmää Esimerkissä 9.36 ja tunnistamme, että $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \cong K_4$.

Olkoon G ryhmä ja olkoot $S, T \leq G$. Olkoon

$$ST = \{st : s \in S,\ t \in T\}.$$

Proposition 9.21 nojalla

$$S \cup T \subset ST \subset \langle S \cup T\rangle.$$

Jos ST on ryhmä, niin se sisältää joukon $S \cup T$ ja sisältyy joukon $S \cup T$ virittämään aliryhmään, joten tällöin $ST = \langle S \cup T\rangle$.

Lemma 9.33. *Jos G on kommutatiivinen ryhmä ja $S, T \leq G$, niin $ST = \langle S \cup T\rangle$.*

[11] Suoraa tuloa käsiteltiin luvussa 8.2.

Todistus. Harjoitustehtävä 9.33. □

Myöhemmin todistettava Propositio 12.22 yleistää Lemman 9.33 ryhmille, jotka eivät ole välttämättä kommutatiivisia ja antaa yleisemmän ehdon sille, että $ST = \langle S \cup T \rangle$. Seuraava esimerkki osoittaa, että ST ei välttämättä ole ryhmä.

Esimerkki 9.34. Olkoot

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \; L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,.$$

Tällöin

$$UL = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+mn & m \\ n & 1 \end{pmatrix} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Jos $m, n \neq 0$, niin

$$\begin{pmatrix} 1+mn & m \\ n & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ -n & 1+mn \end{pmatrix}$$

ei ole joukossa UL, joten UL ei ole ryhmän $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ aliryhmä. Vastaavalla tavalla nähdään, että LU ei ole ryhmä.

Olkoon G ryhmä, jonka neutraalialkio on e, ja olkoot $H, J \leq G$ aliryhmiä. Jos $HJ = G$, $H \cap J = \{e\}$ ja $hj = jh$ kaikille $h \in H$ ja $j \in J$, niin G on aliryhmien H ja J *sisäinen suora tulo*.

Sisäisen suoran tulon määritelmässä edellytetään, että aliryhmien H ja J alkioille pätee $hj = jh$ kaikille $h \in H$ ja $j \in J$. Tämä ehto on usein kätevä ilmaista sanallisesti, seuraava määritelmä antaa sanastoa:

Olkoon $(A, *)$ laskutoimituksella varustettu joukko. Jos $g, h \in A$ ja $g * h = h * g$, niin g ja h *kommutoivat*.

Propositio 9.35. *Olkoon G aliryhmien H ja J sisäinen suora tulo. Tällöin $G \cong H \times J$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 9.34. □

Esimerkki 9.36. (1) Esimerkissä 8.23 tarkasteltu ryhmä $G = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ on aliryhmiensä $H = \langle 3 + 8\mathbb{Z} \rangle$ ja $J = \langle 5 + 8\mathbb{Z} \rangle$ sisäinen suora tulo:

$$(3+8\mathbb{Z})^2 = (5+8\mathbb{Z})^2 = 1 + 8\mathbb{Z} \quad \text{ja} \quad (3+8\mathbb{Z})(5+8\mathbb{Z}) = 7 + 8\mathbb{Z} \,,$$

joten

$$HJ = \langle 3+8\mathbb{Z} \rangle \langle 5+8\mathbb{Z} \rangle = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = G \,.$$

Lisäksi $\langle 3 + 8\mathbb{Z} \rangle \cap \langle 5 + 8\mathbb{Z} \rangle = \{1 + 8\mathbb{Z}\}$ ja sisäisen suoran tulon kommutoimisehto pätee, koska $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ on kommutatiivinen.

Proposition 9.35 nojalla $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ on siis isomorfinen suoran tulon $\langle 3+8\mathbb{Z} \rangle \times \langle 5+8\mathbb{Z} \rangle$ kanssa. Huomaa, että aliryhmät $\langle 3+8\mathbb{Z} \rangle$ ja $\langle 5+8\mathbb{Z} \rangle$ ovat kahden alkion syklisiä ryhmiä Lemman 9.26 nojalla. Siis Proposition 8.19 nojalla $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ on Kleinin neliryhmä.

(2) Olkoon G on kommutatiivinen ryhmä ja olkoot $H, J \leq G$ aliryhmiä, joille pätee $H \cap J = \{e\}$ ja $hj = jh$ kaikille $h \in H$ ja $j \in J$. Lemman 9.33 nojalla $HJ = \cup J\rangle$. Proposition 9.35 nojalla ryhmät H ja J virittävät ryhmän G aliryhmän, joka on isomorfinen tuloryhmän $H \times J$ kanssa. Jos H ja J ovat äärellisiä aliryhmiä, niin

$$\#HJ = \#(H \times J) = \#H \; \#J \,.$$

9.8 Lukuteorian ryhmiä

Seuraava pieni havainto antaa ryhmäteoreettisen näkökulman Bézoutin yhtälöön[12] ja suurimpaan yhteiseen tekijään. Kahden kokonaisluvun suurin yhteinen tekijä määritellään liitteessä **??**.

Propositio 9.37. *Olkoot $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Jos $\langle m, n\rangle = \langle d\rangle$, niin $d = \pm\,\mathrm{syt}(m, n)$.*

Todistus. Luku d on lukujen m ja n yhteinen tekijä, koska $m, n \in \langle d\rangle$. Olkoon $e \neq 0$ lukujen m ja n yhteinen tekijä. Koska $d \in \langle m, n\rangle$, on luvut $r, s, m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$d = rm + sn = r(m_1 e) + s(n_1 e) = (rm_1 + sn_2)e\,,$$

joten e jakaa luvun d. Siis d on lukujen m ja n suurin yhteinen tekijä. □

Seuraus 9.38. *Nollasta poikkeavilla kokonaisluvuilla on suurin yhteinen tekijä.*

Todistus. Olkoot $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Proposition 9.28 mukaan kaikki kokonaislukujen additiivisen ryhmän aliryhmät ovat syklisiä, joten on $d \in \mathbb{N}$ siten, että $\langle d\rangle = \langle m, n\rangle$. Väite seuraa siis Propositiosta 9.37. □

Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$. Lukujen a ja b *pienin yhteinen jaettava* on

$$\mathrm{pyj}(a, b) = \min\{c \in \mathbb{N} - \{0\} : a \text{ ja } b \text{ ovat luvun } c \text{ tekijöitä}\}\,.$$

Seuraava helppo Lemma kuvailee pienimmän yhteisen tekijän ryhmäteoreettisesti.

Lemma 9.39. *Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$. Tällöin*

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mathrm{pyj}(a, b)\mathbb{Z}\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 9.36. □

Seuraava tulos yleistää Esimerkissä 9.22(b) tehdyn havainnon.

Propositio 9.40. *Olkoon $q \geq 2$. Tällöin $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \langle a + q\mathbb{Z}\rangle$, jos ja vain jos $\mathrm{syt}(a, q) = 1$.*

Todistus. Jos $\mathrm{syt}(a, q) = s \geq 2$, niin $q = ks$ ja $a = \ell s$ joillain $k, \ell \in \mathbb{N}$. Siis

$$ka = k\ell s = \ell q \in q\mathbb{Z}\,,$$

joten ryhmässä $\langle a + q\mathbb{Z}\rangle$ on korkeintaan $k < q$ alkiota. Siis $\langle a + q\mathbb{Z}\rangle < \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Oletetaan sitten, että $\mathrm{syt}(a, q) = 1$. Kaikki ryhmän $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ alkiot ovat alkion $1 + q\mathbb{Z}$ monikertoja, joten $a + q\mathbb{Z}$ on virittäjä, jos $1 + q\mathbb{Z} \in \langle a + q\mathbb{Z}\rangle$. Bézout'n yhtälön[13] nojalla on $x, y \in \mathbb{Z}$ siten, että $ax + qy = 1$ mutta tämähän tarkoittaa, että

$$x(a + q\mathbb{Z}) = 1 - yq + q\mathbb{Z} = 1 + q\mathbb{Z}\,.$$ □

Jos p on alkuluku, niin Propositiosta 9.40 seuraa, että $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle k + p\mathbb{Z}\rangle$ jokaisella $k \not\equiv 0 \mod p$.

[12] Propositio **??**
[13] Propositio **??**

Harjoitustehtäviä

9.1. Osoita, että

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos(t) + i\sin(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

on ryhmän $\mathbb{C}^\times$ aliryhmä.[14]

9.2. Anna esimerkki surjektiivisesta homomorfismista $f\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$.[15]

9.3. Olkoon $q \in \mathbb{N} - \{0\}$. Osoita, että joukko

$$J_q = \{w \in \mathbb{C} : w^q = 1\}$$

on ryhmän $\mathbb{C}^\times$ aliryhmä.

Kvaternioita käsitellessä on tapana käyttää esimerkiksi merkintöjä

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1} \tag{9.2}$$

ja

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}. \tag{9.3}$$

Ryhmä

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\} \leq \mathbb{H}^\times$$

on *kvaterniooryhmä* Q_8.

9.4. Osoita, että $Q_8 < \mathbb{H}^\times$.

Kolmeulotteinen *Heisenbergin ryhmä* on joukko

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

varustettuna matriisien kertolaskulla.

9.5. Osoita, että H_3 on ryhmä.

9.6. Osoita, että ryhmä H_3 ei ole isomorfinen ryhmän $(\mathbb{R}^3, +)$ kanssa.[16]

Ryhmän G *keskus* on

$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz \text{ kaikilla } g \in G\}.$$

[14] Opiskele tarvittaessa kompleksiluvuista luvusta 1.8, jonka tuloksia voi käyttää.
[15] Joukon $\mathbb{S}^1$ jälkimmäinen esitysmuoto Harjoitustehtävässä 9.1 saattaa auttaa.
[16] Propositio 8.16.

9.7. Olkoon G ryhmä. Osoita, että $Z(G) \leq G$.

9.8. Olkoon X joukko ja olkoon $x_0 \in X$. Olkoon

$$F = \{f \in \mathrm{Perm}(X) : f(x_0) = x_0\}$$

Osoita, että $F \leq \mathrm{Perm}(X)$.

9.9. Todista Propositio 9.5.

9.10. Todista Propositio 9.14.[17]

9.11. Olkoon $T\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $T(B) = {}^{\top}B$, kuvaus, joka liittää matriisiin B sen transpoosin. Olkoon $\mathrm{inv}\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ kuvaus $\mathrm{inv}(B) = B^{-1}$. Mitkä kuvauksista T, inv, $T \circ \mathrm{inv}$ ja $\mathrm{inv} \circ T$ ovat homomorfismeja?[18]

9.12. Olkoon

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\} .$$

Olkoon $\phi\colon B \to \mathbb{C}^{\times}$,

$$\phi\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \Big) = a^2 .$$

Osoita, että $B \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ja että kuvaus ϕ on homomorfismi. Määritä homomorfismin ϕ ydin ja kuvajoukko.

9.13. Todista Propositio 9.17(2).

Olkoon $n \geq 2$. Kertaluvun $4n$ *disyklinen ryhmä* on

$$\mathrm{Dic}_n = \left\langle \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{n}i} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi}{n}i} \end{pmatrix} = \mathbf{1}\cos\frac{\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{n} \, , \, \mathbf{j} \right\rangle < \mathbb{H}^{\times} .$$

9.14. Osoita, että $\#\,\mathrm{Dic}_n = 4n$. Osoita, että $\mathrm{Dic}_2 = Q_8$.

9.15. Todista Propositio 9.23.[19]

9.16. Olkoon G ryhmä ja olkoon $H < G$. Osoita, että $\langle G - H \rangle = G$.

9.17. Osoita, että ryhmät $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ovat isomorfisia. [20]

9.18. Osoita, että $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^{\times}$ ja $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^{\times}$ ovat syklisiä ryhmiä.

9.19. Osoita, että ryhmät $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^{\times}$ ja $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ ovat isomorfisia.

9.20. Todista Lemma 9.26.

9.21. Määritä luvun $\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}^{\times}$ kertaluku. Mitkä kompleksiluvut muodostavat aliryhmän $\langle\omega\rangle$?

9.22. Osoita, että rationaalilukujen additiivinen ryhmä ei ole syklinen.[21]

[17] Kertaa lineaarialgebraa! Cramerin sääntö/kofaktorimatriisi.
[18] Kertaa lineaarialgebraa!
[19] Propositio 9.21 auttaa.
[20] Osoita, että $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ on syklinen ryhmä.
[21] Jos se olisi syklinen, niin ....

9.23. Olkoon $S \subset (\mathbb{Q}, +)$ äärellinen joukko. Osoita, että joukon S virittämä aliryhmä on syklinen ja että se on ryhmän $(\mathbb{Q}, +)$ aito aliryhmä.

9.24. Osoita, että rationaalilukujen multiplikatiivinen ryhmä $\mathbb{Q}^\times$ ei ole syklinen. [22]

9.25. Todista Lause 9.29(2).

9.26. Määritä $\langle 30, 42, 70, 105\rangle \leq (\mathbb{Z}, +)$.

9.27. Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \subset G$ äärellinen vakaa osajoukko, jossa on ainakin yksi alkio.[23] Osoita, että $H \leq G$.

9.28. Olkoon G äärellinen ryhmä, jonka kertaluku on parillinen. Osoita, että ryhmässä G on alkio, jonka kertaluku on 2.[24]

9.29. Monellako eri tavalla voit täydentää taulukon

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b			
c	c			

niin, että tuloksena on ryhmän laskutaulu? Mitä voit päätellä tästä havainnosta?

Kommutatiivisen ryhmän G *torsioaliryhmä* on

$$\operatorname{Tor} G = \{g \in G : \operatorname{ord} g < \infty\}.$$

9.30. Osoita, että $\operatorname{Tor} G$ on kommutatiivisen ryhmän G aliryhmä.

9.31. Määritä $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}))$.

9.32. Määritä matriisien $A, B, C \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ kertaluvut, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osoita, että joukko

$$\{F \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \operatorname{ord} F < \infty\}$$

ei ole ryhmän $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ aliryhmä.

9.33. Todista Lemma 9.33.[25]

9.34. Todista Propositio 9.35.

9.35. Minkä kurssilla käsitellyn ryhmän kanssa ryhmä $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times$ on isomorfinen?

9.36. Todista Lemma 9.39.

[22] Aritmetiikan peruslause (Lause **??**) auttaa.

[23] Miten sykliset ryhmät liittyvät tähän?

[24] Jos $e \in G$ on neutraalialkio, niin alkion $g \in G$ kertaluku on 2, jos $g \neq e$ ja $g^2 = e$. Tarkastele joukkoa $P = \{g \in G : g^{-1} \neq g\}$.

[25] Miksi riittää osoittaa, että ST on ryhmä?

Luku 10

Symmetriset ryhmät

Tässä luvussa tarkastelemme äärellisten joukkojen permutaatioryhmiä, joita kutsutaan symmetrisiksi ryhmiksi. Symmetriset ryhmät antavat meille esimerkkejä äärellisistä ryhmistä, jotka eivät ole kommutatiivisia. Niillä on paljon sovelluksia esimerkiksi geometriassa ja kombinatoriikassa.

10.1 Symmetrinen ryhmä S_n

Harjoitustehtävän 10.1 nojalla kaikkien n alkion joukkojen permutaatioryhmät[1] ovat isomorfisia keskenään.

Äärellisen, n alkiosta koostuvan joukon permutaatioryhmä on *symmetrinen ryhmä* S_n.

Jokaisen n alkiosta koostuvan joukon permutaatioryhmää sanotaan Harjoitustehtävän 10.1 nojalla ryhmäksi S_n vastaavalla tavalla kuin voidaan puhua abstrakteista syklisistä ryhmistä C_n ja C_∞. Kun todistetaan väitteitä symmetriselle ryhmälle S_n, voidaan todistuksessa tarkastella esimerkiksi joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatioita.

Symmetriset ryhmät ovat tärkeitä matematiikan eri aloilla, esimerkiksi Galois'n teoriassa, joka käsittelee muun muassa polynomien algebrallista ratkeavuutta. Symmetriset ryhmät tulevat vastaan geometriassa tarkasteltaessa esimerkiksi säännöllisten monikulmioiden ja monitahokkaiden symmetriaryhmiä. Tästä saamme hieman esimakua luvussa 13.3.

Propositio 10.1. *(1) Symmetrisen ryhmän S_n kertaluku on $n!$.*
(2) Jos $n \geq 3$, niin S_n ei ole kommutatiivinen.

Todistus. (1) Harjoitustehtävä.

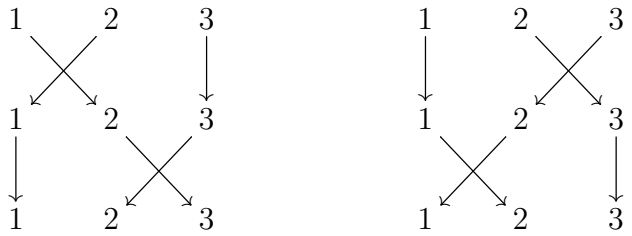
(2) Tarkastellaan ensin tapaus $n = 3$, jonka avulla päättelemme yleisen tapauksen. Olkoon $\sigma \in S_3$, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$ ja olkoon $\tau \in S_3$, $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = 3$, $\tau(3) = 2$. Tällöin $\tau \circ \sigma(1) = \tau(2) = 3$ ja $\sigma \circ \tau(1) = \sigma(1) = 2$, joten $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

[1] Katso määritelmä Esimerkin 8.9 jälkeen.

Edellä määritellyt permutaatiot on helppo laajentaa n alkion permutaatioiksi määrittelemällä kaikille $n \geq 4$ permutaatiot $\bar{\sigma}, \bar{\tau} \in S_n$, joille $\bar{\sigma}|_{\{1,2,3\}} = \sigma$, $\bar{\tau}|_{\{1,2,3\}} = \tau$, ja $\bar{\sigma}(k) = k = \bar{\tau}(k)$ kaikille $4 \leq k \leq n$. Näille permutaatioille pätee $\bar{\sigma} \circ \bar{\tau} \neq \bar{\tau} \circ \bar{\sigma}$ kuten tapauksessa $n = 3$. □

Myöhemmin Harjoitustehtävässä 11.11 osoitetaan, että ryhmät, joissa on korkeintaan 5 alkiota, ovat kommutatiivisia. Siis S_3 on pienin ryhmä, joka ei ole kommutatiivinen.

Permutaatioilla operointia voi havainnollistaa monilla eri tavoilla. Proposition 10.1 todistuksessa käyttämämme tapa antaa permutaatio luettelemalla kaikkien alkioiden kuvautuminen ei ole kovin kätevää. Seuraavat kaaviot havainnollistavat Proposition 10.1 todistuksessa esiintyvien permutaatioiden σ ja τ yhdistettyjä kuvauksia $\tau \circ \sigma$ ja $\sigma \circ \tau$:



Yksinkertaistamista varten otamme käyttöön tiiviimmän merkintätavan:

Olkoon $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ m alkion osajoukko, $m \geq 2$.

Sykli $(a_1 a_2 \cdots a_m) \in S_n$ kuvaa alkion a_i alkioksi a_{i+1} kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, alkion a_m alkioksi a_1 ja on identtinen kuvaus osajoukon $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ komplementissa.

Syklin $(a_1 a_2 \cdots a_m)$ *pituus* on m.

Jos syklin pituus on m, se on *m-sykli*.

Jos syklin pituus on 2, niin se on *vaihto* eli *transpositio* ja 2-sykli $(i\ i+1)$ on *alkeisvaihto* eli *alkeistranspositio*.

Syklien $\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_m)$ ja $\tau = (b_1 b_2 \cdots b_k)$, yhdistetty kuvaus on niiden *tulo*. Syklien yhdistettyä kuvausta merkitään

$$\sigma \circ \tau = (a_1 a_2 \cdots a_m)(b_1 b_2 \cdots b_k).$$

Syklit $(a_1 a_2 \cdots a_m)$ ja $(b_1 b_2 \cdots b_k)$ ovat *erilliset*, jos

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \cap \{b_1, b_2, \ldots, b_k\} = \emptyset.$$

Esimerkki 10.2. (a) Sama n-sykli on mahdollista kirjoittaa n eri tavalla, kun valitaan, mikä syklissä esiintyvistä alkioista merkitään syklimerkinnän ensimmäiselle paikalle. Esimerkiksi $(1234) = (2341) = (3412) = (4123)$.

(b) Syklien tulon laskeminen on hyvin mekaanista. Lasku aloitetaan oikeassa reunassa olevasta syklistä ja selvitetään, miten siinä esiintyvät alkiot kuvautuvat tulossa esiintyvillä sykleillä oikealta vasemmalle. Lopputuloksena saadaan syklien tulo esitettynä erillisten syklien tulona, joka on yksinkertaisin tapa esittää permutaatio.

Esimerkiksi permutaatio $\tau = (372)(1234)(1348)$ kuvaa $1 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 4$, koska (372) pitää alkion 4 paikallaan. Seuraavaksi lasketaan $4 \mapsto 8$, $8 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3$ ja $3 \mapsto 4 \mapsto 1$. Koska päädyttiin takaisin alkioon 1 saadaan sykli (1483) osaksi permutaation τ lauseketta.

Seuraavaksi lasketaan $2 \mapsto 3 \mapsto 7$ ja $7 \mapsto 2$ ja saadaan toiseksi osaksi vaihto (27). Kaikki permutaation τ määrittelyssä esiintyvät luvut on käsitelty, joten $\tau = (1483)(27)$. Alkion 8 kuvautumista tarkasteltaessa on jätetty huomioimatta syklit (372) ja (1234), koska 8 ei esiinny näiden syklien lausekkeissa. Tällöinhän nämä syklit pitävät alkion 8 paikallaan. Vastaavasti alkion 2 kuvautumista tarkastellessa on jätetty huomioimatta ensimmäisen syklin (1348) vaikutus, koska tämä sykli pitää alkion 2 paikallaan.

Esimerkki 10.3. (a) Kaikki Proposition 10.1 todistuksessa esintyvät kuvaukset ovat syklejä: $\sigma = (12)$, $\tau = (23)$, $\tau \circ \sigma = (23)(12) = (132)$ ja $\sigma \circ \tau = (12)(23) = (123)$. Loput permutaatioryhmän S_3 alkiot ovat vaihto (13) ja identtinen kuvaus.

(b) Kaikki syklin identtisestä kuvauksesta poikkeavat potenssit eivät välttämättä ole syklejä. Esimerkiksi $(1234)^2 = (1234)(1234) = (13)(24)$.

(c) $(a_k a_{k-1} \cdots a_1)(a_1 a_2 \cdots a_k) = \mathrm{id}$ kaikille $a_1, \ldots, a_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, joten

$$(a_1 a_2 \cdots a_k)^{-1} = (a_k a_{k-1} \cdots a_1)\,.$$

Lemma 10.4. *Erilliset syklit kommutoivat.*

Todistus. Jos σ ja σ' ovat erillisiä, ne ovat kahden toisiaan leikkaamattoman osajoukon permutaatioita, joten väite pätee selvästi. □

Jos $f\colon X \to X$ on kuvaus ja $x \in X$, niin pisteen x *rata* (kuvauksella f) on

$$\mathscr{O}(x) = \mathscr{O}_f(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(x)\}.$$

Lemma 10.5. *(1) Jokaisen m-syklin kertaluku on m.*

(2) Jos $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ ovat erillisiä permutaatioita ja $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_k$, niin $\operatorname{ord}\sigma$ *on lukujen* $\operatorname{ord}\sigma_1, \operatorname{ord}\sigma_2, \ldots, \operatorname{ord}\sigma_k$ *pienin yhteinen jaettava.*

Todistus. (1) Olkoon $\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_m)$. Pisteen a_1 rata

$$\begin{aligned}\mathscr{O}(a_1) &= \{a_1, \sigma(a_1) = a_2, \sigma^2(a_1) = a_3, \ldots, \sigma^{m-1}(a_1) = a_m, \sigma(a_m) = a_1, \ldots\} \\ &= \{a_1, \sigma(a_1) = a_2, \sigma^2(a_1) = a_3, \ldots, \sigma^{m-1}(a_1) = a_m\}\end{aligned}$$

koostuu m pisteestä ja sama pätee kaikille muillekin pisteille $a_2, \ldots, a_m$. Siis kuvaukset σ^k, $k \in \{2, 3, \ldots, m-1\}$, eivät ole identtisiä kuvauksia ja $\sigma^m = \mathrm{id}$. Väite seuraa tästä.

(2) $\sigma^m = \mathrm{id}$, jos ja vain jos $\operatorname{ord}\sigma_j \mid m$ kaikilla $1 \le j \le k$. Väite seuraa Lemmasta 9.26. □

10.2 Symmetrisen ryhmän rakenteesta

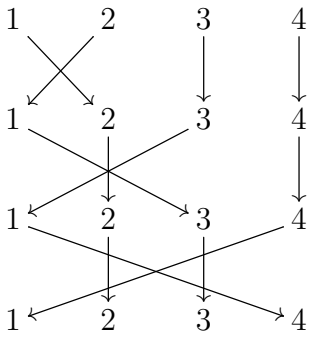
Tarkastelemme seuraavaksi symmetrisen ryhmän S_n rakennetta.

Propositio 10.6. *Jokainen sykli on vaihtojen tulo.*

Todistus. Induktiolla on helppo osoittaa, että

$$(a_1 a_2 \cdots a_m) = (a_1 a_m)(a_1 a_{m-1}) \ldots (a_1 a_2).$$

Todistuksen idea sisältyy seuraavaan kaavioon:



Yksityiskohdat harjoitustehtävässä 10.7. □

Propositio 10.7. *Jokainen vaihto on alkeisvaihtojen pariton tulo.*

Todistus. Koska

$$(km) = (1k)(1m)(1k)$$

kaikilla $k, m \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $k \neq m$, riittää osoittaa, että $(1k)$ on alkeisvaihtojen pariton tulo kaikilla $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Vaihto (12) on alkeellinen. Oletetaan, että $(1\ k-1)$ on alkeisvaihtojen pariton tulo. Väite seuraa, koska

$$(1k) = (1\ k-1)(k-1\ k)(1\ k-1)\,. \qquad \square$$

Propositio 10.8. *Jokainen permutaatio $\tau \in S_n - \{\mathrm{id}\}$ voidaan esittää erillisten syklien tulona.*

Todistus. Jos permutaatio τ kiinnittää pisteet $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, riittää todistaa väite permutaation τ rajoittumalle joukkoon $\{1, 2, \ldots, n\} - \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Riittää siis tarkastella permutaatioita, jotka eivät kiinnitä yhtään pistettä.

Selvästi väite pätee, kun $n = 2$. Oletetaan, että se pätee kaikilla S_k, kun $k \leq n-1$. Olkoon $\tau \in S_n$. Jos τ on sykli ei ole mitään todistettavaa, joten voimme olettaa, että τ ei ole sykli. Pisteen 1 rata on

$$\mathscr{O}(1) = \{1, \tau(1), \tau^2(1), \ldots, \tau^k(1), \ldots\}.$$

Koska $\{1, \ldots, n\}$ on äärellinen joukko, niin täytyy olla $\tau^q(1) = \tau^r(1)$ joillain luonnollisilla luvuilla $q < r$. Valitaan luvut q ja r niin, että ne ovat pienimmät mahdolliset. Koska τ on bijektio, täytyy olla $q = 0$, $\tau^r(1) = 1$: Jos nimittäin $q > 1$, niin

$$\tau(\tau^{r-1}(1)) = \tau^r(1) = \tau^q(1) = \tau(\tau^{q-1}(1))\,,$$

joten bijektiivisyyden nojalla $\tau^{r-1}(1) = \tau^{q-1}(1)$, mikä on ristiriidassa lukujen q ja r minimaalisuuden kanssa. Tästä nähdään, että

$$\tau|_{\mathscr{O}(1)} = (1\,\tau(1)\,\tau^2(1)\cdots\tau^{r-1}(1)).$$

Induktio-oletuksen nojalla permutaation τ rajoittuma osajoukkoon $\{1, 2, \ldots, n\} - \mathscr{O}(1)$ on erillisten syklien tulo, joten väite on todistettu. □

Lause 10.9. *(Alkeis)vaihdot virittävät symmetrisen ryhmän S_n.*

Todistus. Seuraa Propositioista 10.6, 10.7 ja 10.8. □

10.3 Cayleyn lause

Osoitamme seuraavaksi, että kaikki ryhmät voi halutessa ajatella permutaatioryhmien aliryhminä.

Olkoon G ryhmä ja olkoon $g \in G$. Kuvaus $\ell_g \colon G \to G$, $\ell_g(x) = gx$ kaikilla $x \in G$, on *vasen siirto* alkiolla $g \in G$.

Lemma 10.10. *Vasen siirto on bijektio.*

Todistus. Olkoon $g \in G$. Kuvaus $\ell_g \colon G \to G$ on surjektio, koska $\ell_g(g^{-1}z) = z$ kaikilla $z \in G$ ja supistussäännön nojalla se on injektio: Jos $\ell_g(x) = \ell_g(y)$, niin $gx = gy$, joten supistussäännön nojalla $x = y$. □

Propositio 10.11. *Ryhmä G on isomorfinen ryhmän* $\mathrm{Perm}(G)$ *jonkin aliryhmän kanssa.*

Todistus. Lemman 10.10 nojalla voidaan määritellä kuvaus $\rho \colon G \to \mathrm{Perm}(G)$, $\rho(g) = \ell_g$. Kaikille $x \in G$ pätee

$$\rho(gh)(x) = \ell_{gh}(x) = (gh)x = g(hx) = \ell_g \circ \ell_h(x) = \rho(g) \circ \rho(h)(x).$$

Siis $\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$, joten kuvaus ρ on homomorfismi.

Olkoot sitten $g, h \in G$ siten, että $\rho(g) = \rho(h)$. Tällöin

$$g = \ell_g(e) = \ell_h(e) = h\,,$$

joten ρ on injektio ja täten $\rho \colon G \to \rho(G) < \mathrm{Perm}(G)$ on isomorfismi. □

Lause 10.12 (Cayleyn lause)**.** *Olkoon G äärellinen ryhmä, jonka kertaluku on n. Symmetrisellä ryhmällä S_n on aliryhmä, joka on isomorfinen ryhmän G kanssa.*

Todistus. Ryhmät S_n ja $\mathrm{Perm}(G)$ ovat isomorfisia, joten voimme käsitellä ryhmää $\mathrm{Perm}(G)$ ja väite seuraa Propositiosta 10.11 □

Esimerkki 10.13. Olkoon G ryhmä. Propositiossa 10.10 määrittelimme ryhmän G uskollisen toiminnan[2] joukolla G asettamalla $\rho(g) = \ell_g$.

10.4 Permutaation merkki

Tässä luvussa osoitamme, että symmetrisen ryhmän alkiota, joka voidaan esittää tulona parillisesta määrästä vaihtoja, ei voi esittää tulona parittomasta määrästä vaihtoja.

Permutaatio $\sigma \in S_n$ on *parillinen*, jos se on tulo parillisesta määrästä vaihtoja ja *pariton*, jos se on tulo parittomasta määrästä vaihtoja. Permutaation σ *merkki* on

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} -1, & \text{jos } \sigma \text{ on pariton} \\ 1, & \text{jos } \sigma \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

[2]Katso toiminnan määritelmä sivulta 101.

Proposition 10.7 nojalla permutaatio on tulo parillisesta määrästä vaihtoja, jos ja vain jos se on tulo parillisesta määrästä alkeisvaihtoja. Jos σ on r vaihdon tulo, niin

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^r \,. \tag{10.1}$$

Osoitetaan, että permutaation merkki on hyvin määritelty kuvaus. Apuna käytetään antisymmetrisiä kuvauksia:

Olkoon X epätyhjä joukko ja olkoon $(V, +)$ additiivinen ryhmä. Kuvaus $f\colon X^n \to V$ on *antisymmetrinen*, jos kaikille alkeisvaihdoille $\tau \in S_n$ pätee

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -f(x).$$

On hyvä tuntea ainakin yksi esimerkki antisymmetrisestä funktiosta, joka ei ole nollafunktio. Seuraava tulos antaa tällaisen.

Lemma 10.14. *Kuvaus* $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j) \,,$$

on antisymmetrinen. Lisäksi f *ei ole nollakuvaus.*

Todistus. Olkoon $1 \le i_0 < n$ ja olkoon $\tau = (i_0\ i_0 + 1)$. Tällöin

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = (x_{i_0+1} - x_{i_0}) \prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ \{i,j\} \neq \{i_0, i_0+1\}}} (x_i - x_j) = -f(x) \,,$$

sillä

(1) jos $\{i, j\} \cap \{i_0, i_0 + 1\} = \emptyset$, niin permutaatio τ ei vaikuta termiin $x_i - x_j$,

(2) jos $i < i_0$, niin molemmat termit $x_i - x_{i_0}$ ja $x_i - x_{i_0+1}$ esiintyvät tulossa ja permutaatio vaihtaa ne keskenään ja

(3) jos $j > i_0 + 1$, niin molemmat termit $x_{i_0} - x_j$ ja $x_{i_0+1} - x_j$ esiintyvät tulossa ja permutaatio vaihtaa ne keskenään.

Lisäksi, kun muuttujan x komponentit ovat eri kokonaislukuja, $f(x) \neq 0$. □

Propositio 10.15. *Olkoon* $f\colon X^n \to V$ *antisymmetrinen kuvaus. Tällöin*

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^r f(x),$$

jos σ *on* r *alkeisvaihdon tulo.*

Todistus. Väite pätee selvästi, kun $r = 1$. Oletetaan, että se pätee, kun σ on $r - 1$ alkeisvaihdon tulo. Olkoon $\sigma = \tau \circ \omega$ permutaatio, joka on r alkeisvaihdon tulo siten, että ω on $r - 1$ alkeisvaihdon tulo ja τ on alkeisvaihto. Nyt soveltamalla antisymmetrisyyden määritelmää alkeisvaihdolla τ ja pisteellä $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ saadaan

$$\begin{aligned} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) &= f(x_{\tau(\omega(1)}, x_{\tau(\omega(2))}, \ldots, x_{\tau(\omega(n))}) \\ &= -f(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \ldots, x_{\omega(n)}) \\ &= -(-1)^{r-1} f(x) = (-1)^r f(x) \,. \end{aligned}$$

□

Proposition 10.7 avulla saadaan välittömästi

Seuraus 10.16. *Jos f on antisymmetrinen, niin kaikille vaihdoille $\tau \in S_n$ pätee*

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -f(x)\,. \qquad \square$$

Propositio 10.17. *Permutaation merkki on hyvin määritelty.*

Todistus. Oletetaan, että permutaatio σ voidaan esittää r vaihdon tulona ja toisaalta s vaihdon tulona ja osoitetaan, että tällöin $r \equiv s \bmod 2$. Kuvaus $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)\,.$$

on Lemman 10.14 nojalla antisymmetrinen funktio. Proposition 10.15 nojalla

$$(-1)^r f(x) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^s f(x),$$

kaikilla $x \in \mathbb{Z}^n$. Koska f ei ole nollafunktio, on $x \in \mathbb{Z}^n$, jolle $f(x) \neq 0$ ja saadaan $(-1)^r = (-1)^s$. Siis $r \equiv s \bmod 2$. $\square$

Lause 10.18. *Merkki $\varepsilon\colon S_n \to \{-1, 1\}$ on ainoa homomorfismi permutaatioryhmästä S_n multiplikatiiviseen ryhmään $\{-1, 1\}$, joka saa vaihdoilla arvon -1.*

Todistus. Olkoot $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. Oletetaan, että σ_1 on r vaihdon tulo ja että σ_2 on s vaihdon tulo. Tällöin $\sigma_1\sigma_2$ on $r + s$ vaihdon tulo, joten yhtälön (10.1) nojalla

$$\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = (-1)^{r+s} = (-1)^r(-1)^s = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)\,.$$

Siis ε on homomorfismi.

Määritelmän mukaan $\varepsilon(\tau) = -1$ kaikille vaihdoille $\tau \in S_n$, joten merkki toteuttaa halutun ehdon. Toisaalta Lauseen 10.9 nojalla alkeisvaihdot virittävät ryhmän S_n, joten Proposition 9.23 nojalla homomorfismi $f\colon S_n \to \{-1, 1\}$ määräytyy, jos sen arvot tunnetaan tässä virittäjäjoukossa. Siis ε on ainoa homomorfismi, jolla on haluttu ominaisuus. $\square$

Esimerkki 10.19. Permutaatiot ja niiden merkit esiintyvät lineaarialgebrassa determinanttien yhteydessä: Neliömatriisin $A = (a_{ij})_{i=1}^n$ determinantti on[3]

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}\,.$$

Jos neliömatriisien vektoriavaruus $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ samastetaan avaruudeksi $(\mathbb{R}^n)^n$ esittämällä matriisi $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sarakkeidensa tai riviensä avulla muodossa

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \cdots v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

niin determinantti on antisymmetrinen kuvaus $\det\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$:

$$\det(v_{\sigma(1)}\ v_{\sigma(2)} \cdots v_{\sigma(n)}) = \det \begin{pmatrix} w_{\sigma(1)} \\ w_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ w_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma) \det A.$$

[3]Katso esimerkiksi [Art, luku 1.6].

10.5 Alternoiva ryhmä A_n

Parilliset permutaatiot muodostavat ryhmän S_n aliryhmän:

Olkoon $n \geq 3$. Merkkihomomorfismin $\varepsilon\colon S_n \to \{-1, 1\}$ ydin on *alternoiva ryhmä* A_n.

Alternoiva ryhmä koostuu parillisista permutaatioista. Se on symmetrisen ryhmän aito aliryhmä, koska $(12) \in S_n - A_n$ kaikille $n \geq 2$.

Propositio 10.20. *Olkoon $n \geq 2$. Alternoivan ryhmän A_n kertaluku on $n!/2$.*

Todistus. Olkoon $\tau \in S_n$ alkeisvaihto. Vasen siirto ℓ_τ on bijektio joukkojen A_n ja $S_n - A_n$ välillä. Siis $\#S_n = n! = 2\,\#A_n$. □

Esimerkki 10.21. (a) $(12\cdots n) \in A_n$, jos ja vain jos n on pariton: $(123) = (13)(12)$ on parillinen permutaatio, $(1234) = (14)(123)$ on parillisen permutaation ja vaihdon tulona pariton permutaatio, $(12345) = (15)(1234)$ on parittoman permutaation ja vaihdon tulona parillinen permutaatio ja niin edelleen.

(b) Ryhmä $A_3 = \langle(123)\rangle < S_3$ on syklinen ryhmä $A_3 \cong C_3$ joten se on kommutatiivinen. Sen sijaan ryhmä A_n ei ole kommutatiivinen, jos $n \geq 4$, koska esimerkiksi

$$(123)(234) = (12)(34) \neq (13)(24) = (234)(123)\,.$$

(c) Permutaatiot $(12)(34)$ ja $(123) = (13)(12)$ ovat parillisia, joten $\langle(12)(34), (123)\rangle \leq A_4$. Itse asiassa $A_4 = \langle(12)(34), (123)\rangle < S_4$. Tämän voi tarkastaa laskemalla

$$\begin{aligned}(12)(34)(123) &= (243)\,,\\ (123)(12)(34) &= (134)\,,\\ (12)(34)(123)(12)(34) &= (142)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}(123)(241) &= (13)(24)\,,\\ (13)(24)(12)(34) &= (14)(23)\,.\end{aligned}$$

Koska ryhmä $\langle(12)(34), (123)\rangle$ sisältää lisäksi identtisen kuvauksen ja edellä lueteltujen neljän 3-syklin neliöt, saadaan kaikki ryhmän A_4 yhteensä 12 alkiota. Palaamme tähän esimerkkiin Esimerkissä 11.12.

Propositio 10.22. *Olkoon $n \geq 3$. Alternoiva ryhmä A_n on 3-syklien virittämä.*

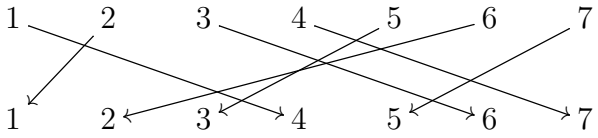
Todistus. Jokainen ryhmän A_n alkio on tulo parillisesta määrästä vaihtoja. Kahden vaihdon tuloille pätee $(xy)(xz) = (xzy)$ ja $(xy)(zt) = (xtz)(xyz)$, jos $x, y, z, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ja $\#\{x, y, z, t\} = 4$. Siis parillisen monen vaihdon tulo voidaan kirjoittaa 3-syklien tulona. □

Harjoitustehtäviä

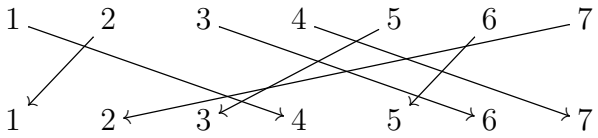
10.1. Olkoot X ja Y epätyhjiä joukkoja ja olkoon $f\colon X \to Y$ bijektio. Osoita, että permutaatioryhmät $\mathrm{Perm}(X)$ ja $\mathrm{Perm}(Y)$ ovat isomorfisia.

10.2. Osoita, että permutaatioryhmän S_n kertaluku on $n!$.

10.3. Kirjoita permutaatiot $(123)(24)$ ja $(1234)(235)$ ja kaavioita



ja



vastaavat permutaatiot erillisten syklien tuloina.

10.4. Olkoon $\sigma\colon \{1,2,\ldots,7\} \to \{1,2,\ldots,7\}$ permutaatio, jolle pätee

$$\sigma(1)=3,\quad \sigma(2)=5,\quad \sigma(3)=7,\quad \sigma(4)=1,\quad \sigma(5)=6,\quad \sigma(6)=2,\quad \sigma(7)=4\,.$$

Kirjoita permutaatio σ erillisten syklien tulona.

10.5. Olkoot $\alpha=(13457)$ ja $\beta=(2645)$. Määritä permutaatio $\alpha^{-1}\,\beta^{-1}$ erillisten syklien tulona. Määritä permutaation $\alpha^{-1}\,\beta^{-1}$ kertaluku.

10.6. Määritä permutaatio $\tau = (13428)(2648735)$ erillisten syklien tulona ja määritä sen kertaluku.

10.7. Täydennä Proposition 10.6 todistus induktiotodistukseksi.

10.8. Osoita, että $S_3 = \langle (12), (23) \rangle$

10.9. Olkoon $n \geq 3$ ja olkoot $\alpha_n = (123\cdots n)$ ja $\beta = (123)$. Määritä permutaatiot

$$\alpha_n(12x)\alpha_n^{-1} \quad \text{ja} \quad \beta^{-1}\alpha_n(12x)\alpha_n^{-1}\beta$$

jokaiselle $3 \leq x < n$.

10.10. Määritä permutaatiot

- $(1y2)(12x)(12y)$ kaikille $x, y \geq 3$, $x \neq y$ ja
- $(1xt)(1yz)(1tx)$ kaikille $x, y, t, z > 1$, kun $\#\{x,y,t,z\} = 4$.

10.11. Osoita, että jokaiselle parittomalle $n \geq 5$ pätee $A_n = \langle (123), (123\cdots n) \rangle$. [4]

10.12. Osoita, että $S_3 \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.[5]

[4] Käytä tehtävien 10.9 ja 10.10 tuloksia ja Propositiota 10.22.

[5] Tarkastele ryhmän $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ lineaarista toimintaa vektoriavaruudessa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

10.13. Olkoon $n \geq 3$. Olkoot $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, \ldots, n\}$ siten, että $a \neq b \neq c \neq a$ ja $d \neq e \neq f \neq d$. Osoita, että on $\sigma \in A_n$, jolle pätee $\{\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\} = \{d, e, f\}$.[6]

10.14. Olkoon $\sigma \in A_5 - \{\mathrm{id}\}$. Osoita, että σ on 3-sykli, 5-sykli tai kahden erillisen vaihdon tulo.

10.15. Olkoot $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ siten, että $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Määritä seuraavat permutaatiot erillisten syklien tuloina:

(1) $(ab)(cd)(abc)(cd)(ab)$,

(2) $(acb)(abcde)(abc)$,

(3) $(abcde)(abdec)^{-1}$,

(4) $(aeb)(ab)(cd)(abe)$ ja

(5) $(ab)(cd)(ae)(cd)$.

Olkoon $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Olkoot $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$ ja olkoot $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \in S_n$ erillisiä syklejä siten, että σ_j on n_j-sykli jokaisella $1 \leq j \leq k$. Permutaation $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_k$ *syklityyppi* on $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

10.16. Osoita, että permutaatioilla $\sigma, \tau \in S_n$ on sama syklityyppi, jos ja vain jos on $\omega \in S_n$ siten, että $\sigma = \omega\tau\omega^{-1}$.

10.17. Olkoon $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, 8\} \to \{1, 2, \ldots, 8\}$ permutaatio, jolle pätee

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 6, \quad \sigma(3) = 7, \quad \sigma(4) = 8, \quad \sigma(5) = 2, \quad \sigma(6) = 5, \quad \sigma(7) = 4, \quad \sigma(8) = 1\,.$$

Kirjoita permutaatio σ erillisten syklien tulona. Määritä permutaation σ kertaluku. Onko σ parillinen vai pariton permutaatio?

10.18. Määritä permutaatio $\tau = (13579)(34259876)^{-1}$ erillisten syklien tulona. Määritä permutaation τ kertaluku. Onko τ parillinen vai pariton permutaatio?

10.19. Määritä permutaatio $\tau = (148352)(35127)$ erillisten syklien tulona. Määritä permutaation τ kertaluku. Onko τ parillinen vai pariton permutaatio?

10.20. Symmetrisellä ryhmällä S_4 on neljä Kleinin 4-ryhmän K_4 kanssa isomorfista aliryhmää. Mitkä ne ovat?[7]

10.21. Määritä permutaatio $\tau = (246135)^{-1}(345718)$ erillisten syklien tulona. Määritä permutaation τ kertaluku. Onko τ parillinen vai pariton permutaatio?

10.22. Osoita, että $S_n = \langle (12), (12\cdots n) \rangle$.

[6] Tätä teknistä tulosta käytetään Harjoitustehtävässä 12.4.

[7] Yksi löytyy Proposition 10.11 todistuksessa käytetyllä homomorfismilla ρ, kun $G = K_4$. Toiset kolme voi löytää esimerkiksi Lemman 10.4 ja Proposition 9.35 avulla.

Luku 11

Lagrangen lause

Tässä luvussa tarkastelemme ryhmän ja sen aliryhmien suhdetta. Otamme käyttöön luvussa 2.1 esitellyt osituksen ja ekvivalenssirelaation käsitteet. Aliryhmä $H < G$ määrää ryhmän G osituksen keskenään yhtä mahtavilla joukoilla. Tämä ositus antaa aliryhmän indeksin käsitteen, joka osoittautuu hyödylliseksi.

11.1 Sivuluokat

Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \leq G$. Alkion $g \in G$ *vasen sivuluokka* (aliryhmän H suhteen) on

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

ja sen *oikea sivuluokka* (aliryhmän H suhteen) on

$$Hg = \{hg : h \in H\}.$$

Aliryhmän H *vasempien sivuluokkien joukko* ryhmässä G on

$$G/H = \{gH : g \in G\}$$

ja *oikeiden sivuluokkien joukko* on[a]

$$H\backslash G = \{Hg : g \in G\}.$$

[a] Merkintää ei pidä sekoittaa joukkojen erotukseen.

Jos kommutatiivisen ryhmän G laskutoimitusta merkitään additiivisesti, niin aliryhmän $H \leq G$ sivuluokkia merkitään $x + H$ (tai $H + x$).

Esimerkki 11.1. Aliryhmän $q\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ sivuluokkien joukko on kongruenssiluokkien joukko (modulo q). Tämä on selitys sille, miksi kongruenssiluokkien joukolle käytetään mer-

kintää $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Aliryhmän $q\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ sivuluokille pätee

$$n + q\mathbb{Z} = \{n + kq : k \in \mathbb{Z}\} = \{kq + n : k \in \mathbb{Z}\} = q\mathbb{Z} + n.$$

Edellä tehty havainto vasemmista ja oikeista sivuluokista yleistyy kaikille kommutatiivisille ryhmille:

Lemma 11.2. *Olkoon G kommutatiivinen ryhmä. Tällöin jokaiselle $x \in G$ ja jokaiselle $H \leq G$ pätee $xH = Hx$.* □

Esimerkki 11.3. Olkoon $H = \langle(12)\rangle < S_3$. Aliryhmän H vasemmat sivuluokat ovat

$$\begin{aligned} H = (12)H &= \{\mathrm{id}, (12)\}, \\ (123)H = (13)H &= \{(123), (13)\} \quad \text{ja} \\ (132)H = (23)H &= \{(132), (23)\} \end{aligned}$$

Sen oikeat sivuluokat ovat

$$\begin{aligned} H = H(12) &= \{\mathrm{id}, (12)\}, \\ H(123) = H(23) &= \{(123), (23)\} \quad \text{ja} \\ H(132) = H(13) &= \{(132), (13)\}. \end{aligned}$$

Harjoitustehtävissä 9.4 ja 11.10 tarkasteltava kvaternioryhmä Q_8 on esimerkki ryhmästä, joka ei ole kommutatiivinen, vaikka sen kaikkien aliryhmien vasemmat ja oikeat sivuluokat ovat samoja joukkoja.

Propositio 11.4. *Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \leq G$. Tällöin*
(1) $xH = yH$, jos ja vain jos $y^{-1}x \in H$. Erityisesti $xH = H$, jos ja vain jos $x \in H$.
(2) $Hx = Hy$, jos ja vain jos $xy^{-1} \in H$. Erityisesti $Hx = H$, jos ja vain jos $x \in H$.

Todistus. Harjoitustehtävä 11.2. □

Propositio 11.5. *Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \leq G$. Tällöin joukot H, gH ja Hg ovat yhtä mahtavia*[1] *kaikilla $g \in G$.*

Todistus. Lemman 10.10 nojalla vasen siirto $\ell_x \colon G \to G$ on bijektio. Vasemman sivuluokan määritelmän nojalla $\ell_x(H) = xH$. Vastaavasti oikea siirto $r_x \colon G \to G$, joka määritellään asettamalla $r_x(h) = hx$ kaikille $x \in G$, antaa bijektion joukkojen H ja Hx välille. □

11.2 Sivuluokkien määräämä ositus

Kongruenssiluokat modulo q muodostavat kokonaislukujen ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ osituksen ja Esimerkissä 11.3 aliryhmän $H = \langle(12)\rangle$ vasemmat ja oikeat sivuluokat määräävät kaksi ryhmän $G = S_3$ ositusta joukoilla, joissa jokaisessa on 2 alkiota. Seuraava tulos yleistää tämän havainnon.

[1] Joukot A ja B ovat *yhtä mahtavia*, jos on bijektio $f \colon A \to B$.

Propositio 11.6. *Olkoon G ryhmä ja olkoon H sen aito aliryhmä. Tällöin*
(1) Vasemmat sivuluokat muodostavat ryhmän G osituksen. Erityisesti, jos $x, y \in G$, niin $xH = yH$, jos ja vain jos $x \in yH$.
(2) Oikeat sivuluokat muodostavat ryhmän G osituksen. Erityisesti, jos $x, y \in G$, niin $Hx = Hy$, jos ja vain jos $x \in Hy$.

Todistus. (1) Vasempien sivuluokkien yhdiste on koko G sillä $x \in xH$ kaikille $x \in G$. Jos $xH \cap yH \neq \emptyset$, niin on $h, h' \in H$, joille $xh = yh'$. Mutta tällöin, jos $g \in xH$, niin $g = xh''$ jollain $h'' \in H$, joten $g = xh'' = yh'h^{-1}h'' \in yH$. Vastaava päättely antaa inkluusion toiseen suuntaan. Siis vasemmat sivuluokat muodostavat osituksen.
Väite (2) todistetaan samaan tapaan. □

Olkoon $H \leq G$. *Aliryhmän H määräämät relaatiot* $\underset{\text{v}}{\sim}$ ja $\underset{\text{o}}{\sim}$ määritellään asettamalla

- $x \underset{\text{v}}{\sim} y$, jos ja vain jos $x^{-1}y \in H$ ja
- $x \underset{\text{o}}{\sim} y$, jos ja vain jos $yx^{-1} \in H$.

Propositio 11.7. *Olkoon $H \leq G$. Aliryhmän H määräämät relaatiot ovat ekvivalenssirelaatioita joukossa G.*

Todistus. Proposition 11.4 nojalla relaatio $\underset{\text{v}}{\sim}$ on aliryhmän vasempien sivuluokkien määräämä relaatio, joka on Propositioiden 11.6 ja 2.3 nojalla ekvivalenssirelaatio. Vastaavasti relaatio $\underset{\text{o}}{\sim}$ on oikeiden sivuluokkien määräämä ekvivalenssirelaatio. □

11.3 Aliryhmän indeksi ja Lagrangen lause

Sivuluokkien joukon koko osoittautuu käyttökelpoiseksi ryhmän ja sen aliryhmän suhdetta kuvaavaksi käsitteeksi.

Propositio 11.8. *Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \leq G$. Joukot G/H ja $H\backslash G$ ovat yhtä mahtavia.*

Todistus. Harjoitustehtävä 11.3 □

Aliryhmän $H < G$ *indeksi* on[a]

$$[G : H] = \#(G/H) = \#(H\backslash G).$$

[a] Proposition 11.8 nojalla aliryhmän H indeksi voidaan määritellä kumman tahansa sivuluokkien joukon avulla.

Esimerkki 11.9. (a) $[\mathbb{Z} : q\mathbb{Z}] = q$.
(b) Aliryhmän $C_2 \times \{e\}$ indeksi ryhmässä $C_2 \times C_2$ on

$$[C_2 \times C_2 : C_2 \times \{e\}] = 2.$$

(c) $[\mathbb{R}^2 : \mathbb{R} \times \{0\}] = \infty$, sillä sivuluokat ovat $(0, a) + \mathbb{R} \times \{0\} = \mathbb{R} \times \{a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Lause 11.10 (Lagrangen lause)**.** *Olkoon G äärellinen ryhmä ja olkoon $H < G$. Tällöin*

$$[G : H] = \frac{\#G}{\#H}.$$

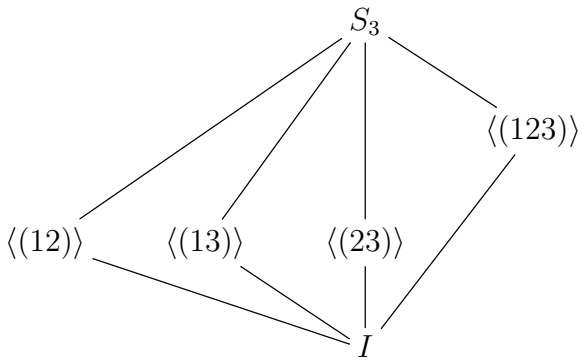
Todistus. Proposition 11.5 nojalla jokaisessa sivuluokassa on $\#H$ alkiota. Proposition 11.6 nojalla sivuluokat osittavat ryhmän G. Siis

$$\#G = \#(G/H)\#H = \#(H\backslash G)\#H\,,$$

mistä väite seuraa. □

Lagrangen lauseen mukaan äärellisen ryhmän G aliryhmien indeksit ja kertaluvut ovat ryhmän kertaluvun tekijöitä. Esimerkissä 9.31 näimme, että ryhmällä $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ on kaikkien mahdollisten indeksien 1, 2, 3, 6 ja 12 aliryhmät.

Esimerkki 11.11. Ryhmän S_3 kertaluku on 6, joten sen aliryhmien mahdolliset kertaluvut (ja indeksit) ovat 1, 2, 3 ja 6. Kolmen alkion permutaatioiden ryhmän aliryhmärakenne on yksinkertainen ja sitä voi havainnollistaa aliryhmäkaaviolla, jossa $I = \{\mathrm{id}\}$.



Siis symmetrisellä ryhmällä S_3 on jokaista Lagrangen lauseen sallimaa kokoa olevia aliryhmiä.

Esimerkki 11.12. Alternoivan ryhmän A_4 kertaluku on 12. Siis sen aidossa aliryhmässä voi Lagrangen lauseen mukaan olla korkeintaan 6 alkiota. Esimerkissä 10.21(c) osoitimme, että $A_4 = \langle(12)(34), (123)\rangle$. Voimme päätellä saman tuloksen myös näin: Koska aliryhmä $\langle(12)(34), (123)\rangle$ sisältää 3-syklit (123), (243) ja (134) ja niiden kaikki potenssit, niin siinä on ainakin $8 > 6 = \frac{12}{2}$ alkiota. Lagrangen lauseen nojalla aliryhmä on koko A_4.

Esimerkissä 12.21 osoitetaan, että ryhmällä A_4 ei ole kuuden alkion aliryhmää vaikka Lagrangen lauseen mukaan 6 on mahdollinen aliryhmän kertaluku.

Seuraus 11.13. *Jos G on äärellinen ryhmä ja $g \in G$, niin* $\operatorname{ord} g \mid \#G$.

Todistus. Alkio $g \in G$ virittää oletuksen nojalla aliryhmän $\langle g\rangle$, jonka kertaluku on $\operatorname{ord} g$. Lagrangen lauseen nojalla $\operatorname{ord} g = \#\langle g\rangle \mid \#G$. □

Seuraus 11.14. *Jos ryhmän G kertaluku on alkuluku, niin G on syklinen.*

Todistus. Olkoon $g \in G$ alkio, joka ei ole neutraalialkio. Tällöin $\operatorname{ord} g > 1$ ja $\operatorname{ord} g$ on kertaluvun $\#G$, joten $\operatorname{ord} g = \#G$. Siis $\langle g\rangle = G$. □

Esimerkki 11.15 (Neljän alkion ryhmien ryhmien luokittelu)**.** Olkoon G ryhmä, jossa on 4 alkiota. Jos $g \in G$, niin Seurauksen 11.13 nojalla $\operatorname{ord} g \in \{1, 2, 4\}$. Jos ryhmässä G on alkio, jonka kertaluku on 4, niin G on syklinen. Seurauksen 9.30 nojalla kaikki neljän alkion sykliset ryhmät ovat isomorfisia keskenään.

Jos G ei ole syklinen, niin jokaisen alkion $g \in G$, joka ei ole neutraalialkio, kertaluku on 2. Harjoitustehtävän 8.7 nojalla G on kommutatiivinen. Olkoon $e \in G$ neutraalialkio ja olkoot $g, h \in G - \{e\}$ siten, että $g \neq h$. Tällöin $gh \notin \{g, h, e\}$, joten $G = \langle g \rangle \langle h \rangle$ ja $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$. Siis G on aliryhmien $\langle g \rangle$ ja $\langle h \rangle$ sisäinen suora tulo. Proposition 9.35 nojalla $G \cong \langle g \rangle \times \langle h \rangle$ ja Proposition 8.19 nojalla $G \cong K_4$.

Esimerkki 11.16. Esimerkin 11.15, Seurauksen 11.14 ja Lemman 9.24 nojalla kaikki ryhmät, joiden kertaluku on korkeintaan 5, ovat kommutatiivisia. Proposition 10.1 nojalla S_3 ei ole kommutatiivinen, joten se on pienin ryhmä, joka ei ole kommutatiivinen.

Propositio 11.17. *Olkoon G äärellinen ryhmä. Tällöin $g^{\#G} = e$ jokaiselle $g \in G$.*

Todistus. Seurauksen 11.13 mukaan $\#G = k \operatorname{ord} g$ jollain $k \in \mathbb{N}$, joten potenssisääntöjen ja Lemman 9.26 nojalla

$$g^{\#G} = g^{k \operatorname{ord} g} = (g^{\operatorname{ord} g})^k = e^k = e. \qquad \square$$

Seuraus 11.18. *Olkoon G äärellinen ryhmä ja olkoon $\phi\colon G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Tällöin*

$$\#\phi(G) = [G : \ker \phi]$$

ja

$$\#G = \#\ker \phi \, \#\phi(G)\,.$$

Todistus. Proposition 11.4 nojalla $x \ker \phi = y \ker \phi$, jos ja vain jos $y^{-1}x \in \ker \phi$. Tämä pätee, jos ja vain jos $\phi(x) = \phi(y)$. Siis kuvaus $x \ker \phi \mapsto \phi(x)$ on bijektio joukosta $G/\ker \phi$ joukkoon $\phi(G)$. Siis $\#\phi(G) = [G : \ker \phi]$ ja toinen väite seuraa Lagrangen lauseesta. $\square$

Propositio 11.19. *Olkoon G ryhmä. Olkoot $K < H < G$ siten, että $[G : H] < \infty$ ja $[H : K] < \infty$. Tällöin*

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

Todistus. Harjoitustehtävät 11.8 ja 11.9. $\square$

11.4 Lagrangen lauseen sovelluksia lukuteoriaan

Tässä luvussa sovellamme Lagrangen lausetta lukuteoriaan.

Lause 11.20 (Fermat'n pieni lause)**.** *Olkoon p alkuluku. Kaikille $a \in \mathbb{Z}$ pätee $a^p \equiv a \mod p$.*

Todistus. Proposition 8.20 nojalla ryhmässä $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ on $p - 1$ alkiota. Proposition 11.17 nojalla $(a + p\mathbb{Z})^{p-1} = 1 + p\mathbb{Z}$, joten

$$a^p + p\mathbb{Z} = (a + p\mathbb{Z})^p = a + p\mathbb{Z}\,.$$

Siis $a^p - a \in p\mathbb{Z}$ kaikille $a \notin p\mathbb{Z}$. Jos $a \in p\mathbb{Z}$, niin $p \mid a$, joten $p \mid a^p - a$. Siis $a^p - a \in p\mathbb{Z}$ kaikille $a \in \mathbb{Z}$. $\square$

Lemma 11.21. *Jos p on alkuluku, $p \equiv 3 \bmod 4$, niin $-1+p\mathbb{Z}$ ei ole minkään alkion neliö ryhmässä $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.*[2]

Todistus. Jos $-1+p\mathbb{Z} = (a+p\mathbb{Z})^2$, niin $\operatorname{ord}(a+p\mathbb{Z}) = 4$, koska $(a+p\mathbb{Z})^4 = 1$. Seurauksen 11.13 nojalla $\#(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \equiv 0 \mod 4$ mutta oletuksen nojalla $\#(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \equiv 2 \bmod 4$. □

***Propositio 11.22.**[3] *Olkoon p pariton alkuluku. Tällöin $X^2+1 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ on jaoton polynomi, jos ja vain jos $p \equiv 3 \bmod 4$.*

Todistus. Proposition 6.16 nojalla $X^2+1 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ on jaoton, jos ja vain jos sillä ei ole juurta. Lemman 11.21 sillä ei ole juurta, jos $p \equiv 3 \bmod 4$. Harjoitustehtävän 8.20 polynomilla $X^2+1 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ on juuri, jos $p \equiv 1 \bmod 4$. □

Harjoitustehtäviä

11.1. Osoita, että $\mathbb{R}_+ < \mathbb{C}^\times$ ja määritä aliryhmän $\mathbb{R}_+$ sivuluokat ryhmässä $\mathbb{C}^\times$. Piirrä kuva, joka havainnollistaa sivuluokkien määräämää ositusta.

11.2. Todista Propositio 11.4.

11.3. Olkoon G ryhmä ja olkoon $H < G$. Osoita, että tekijäjoukkojen välinen kuvaus $b : G/H \to H\backslash G$, $b(aH) = Ha^{-1}$ on bijektio.

11.4. Olkoon G ryhmä ja olkoon $H < G$. Olkoon $\rho\colon G \to \operatorname{Perm}(G/H)$,

$$\rho(x)(gH) = (xg)H$$

kaikilla $gH \in G/H$. Osoita, että ρ on homomorfismi ja että $\ker\rho \leq H$.

11.5. Olkoot $c, d \in \mathbb{Z}$ siten, että c jakaa luvun d. Laske indeksi $[c\mathbb{Z} : d\mathbb{Z}]$.

11.6. Määritä kaikki ryhmien $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ ja $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ aliryhmät.

11.7. Piirrä ryhmän $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ aliryhmäkaavio.

11.8. Olkoon G äärellinen ryhmä. Olkoot $K < H < G$. Osoita Lagrangen lauseen avulla, että indekseille pätee:

$$[G : K] = [G : H][H : K]\,.$$

11.9. Todista Propositio 11.19.[4]

11.10. Piirrä ryhmän Q_8 aliryhmäkaavio.[5]

11.11. Olkoon G ryhmä, jossa on korkeintaan 5 alkiota. Osoita, että G on kommutatiivinen.

11.12. Määritä aliryhmä $\langle (123), (124)\rangle \leq A_4$.

11.13. Osoita, että $S_4 = \langle (12), (1234)\rangle$.[6]

[2] Lukuteorian kielellä ilmaistuna: -1 ei ole neliönjäännös $\bmod p$, kun $p \equiv 3 \bmod 4$.
[3] Tämä tulos liittyy kurssin Renkaat ja kunnat sisältöön. Katso luku 6.6.
[4] Tässä ei oleteta, että G on äärellinen, joten Lagrangen lausetta ei voi käyttää.
[5] Katso Harjoitustehtävä 9.4.
[6] Käytä Lagrangen lausetta.

***11.14.** Olkoon p alkuluku. Osoita, että kunta $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ei ole algebrallisesti suljettu[7]

11.15. Määritä kaikki ryhmän $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$ aliryhmät.

11.16. Piirrä ryhmien $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ aliryhmäkaaviot.

11.17. Piirrä ryhmän $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ aliryhmäkaavio.

[7]Katso luku 6.8. Montako juurta polynomilla $X^p - X + 1 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ on?

Luku 12

Normaalit aliryhmät ja tekijäryhmät

Tässä luvussa tarkastelemme aliryhmiä, joiden suhteen muodostettujen sivuluokkien joukossa on luonnollinen tekijäryhmän rakenne.

12.1 Normaalit aliryhmät

Ryhmän G aliryhmä H on *normaali aliryhmä*, jos $gH = Hg$ kaikille $g \in G$. Jos H on ryhmän G normaali aliryhmä, merkitään $H \trianglelefteq G$. Aitoa normaalia aliryhmää merkitään $H \triangleleft G$.

Lemma 12.1. *Olkoon $K \triangleleft G$ ja $K \leq H \leq G$. Tällöin $K \trianglelefteq H$.* □

Esimerkki 12.2. (a) Ryhmä itse ja neutraalialkion muodostama aliryhmä ovat normaaleja aliryhmiä.

(b) Jos G on kommutatiivinen ryhmä, niin Lemman 11.2 mukaan sen kaikki aliryhmät ovat normaaleja. Erityisesti $q\mathbb{Z} \triangleleft (\mathbb{Z}, +)$ ja $\mathbb{R} \times \{0\} \triangleleft (\mathbb{R}^2, +)$.

(c) Esimerkissä 11.3 havaitsimme, että symmetrisen ryhmän S_3 aliryhmä $H = \langle (12) \rangle < S_3$ ei ole normaali, koska esimerkiksi $(13)H \neq H(13)$.

Joissain tilanteissa normaalius on helppo tarkastaa:

Propositio 12.3. *Jos $[G : H] = 2$, niin $H \triangleleft G$.*

Todistus. Vasemmat sivuluokat ovat H ja $G - H$, samoin oikeat sivuluokat. □

Esimerkki 12.4. (a) Olkoon $n \geq 3$. Lagrangen lauseen nojalla $[S_n : A_n] = 2$, joten Proposition 12.3 nojalla $A_n \triangleleft S_n$ kaikilla $n \geq 3$. Erityisesti $C_3 \cong \langle (123) \rangle = A_3 \triangleleft S_3$.

(b) Esimerkin 12.2(c) nojalla Proposition 12.3 väite ei päde indeksille 3 sellaisenaan. Harjoitustehtävässä 12.19 todistetaan yleistys, joka vaatii lisäehdon.

Usein on kätevä käyttää seuraavaa normaalin aliryhmän karakterisointia:

Propositio 12.5. *Ryhmän G aliryhmä H on normaali, jos ja vain jos $ghg^{-1} \in H$ kaikilla $h \in H$ ja kaikilla $g \in G$*

Todistus. Jos H on normaali, niin $gH = Hg$ kaikille $g \in G$. Siis jokaiselle $g \in G$ ja $h \in H$ pätee $gh = h'g$ jollain $h' \in H$, joten $ghg^{-1} = h' \in H$.

Jos taas kaikille $g \in G$ ja $h \in H$ pätee $ghg^{-1} \in H$, niin jokaiselle $g \in G$ ja $h \in H$ on $h' \in H$, jolle $ghg^{-1} = h'$. Siis $gh = h'g \in Hg$, joten $gH \subset Hg$ kaikille $g \in G$. Samoin saadaan $hg^{-1} = g^{-1}h' \in g^{-1}H$, joten $Hg^{-1} \subset g^{-1}H$ kaikille $g \in G$. Koska jokainen ryhmän G alkio on jonkin alkion käänteisalkio, väite on todistettu. □

Huomautus 12.6. (a) Jos $\alpha \in A_n < S_n$ on parillinen permutaatio ja $\beta \in S_n$ on permutaatio, niin $\beta\alpha\beta^{-1}$ on parillinen permutaatio. Siis Propositio 12.5 antaa toisen todistuksen sille, että $A_n \lhd S_n$.

(b) Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \leq G$. Harjoitustehtävässä 8.14 osoitettiin, että kuvaus $\phi_a \colon G \to G$, $\phi_a(g) = aga^{-1}$, on ryhmän G automorfismi kaikilla $a \in G$. Proposition 12.5 nojalla H on normaali aliryhmä, jos ja vain jos $\phi_a(H) = H$ kaikilla $a \in G$.

(c) Jos $g, h \in G$ ja $k \in \mathbb{Z}$, niin

$$\left(ghg^{-1}\right)^k = gh^k g^{-1}\,.$$

Erityisesti $\operatorname{ord}(ghg^{-1}) = \operatorname{ord} g$.

Sovellamme Propositiota 12.5, kun osoitamme, että normaalit aliryhmät sopivat hyvin yhteen homomorfismien kanssa.

Propositio 12.7. *Olkoon $\phi \colon G \to G'$ ryhmähomomorfismi.*

(1) Olkoon $H \trianglelefteq G$. Tällöin $\phi(H) \trianglelefteq \phi(G) = \operatorname{Im}\phi$.

(2) Olkoon $H' \trianglelefteq G'$. Tällöin $\phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.

Todistus. (1) Proposition 9.17 nojalla $\phi(H) \leq \phi(G)$. Olkoot $a' \in \phi(H)$ ja $g' \in \phi(G)$. Tällöin on $a \in H$ ja $g \in G$, joille $a' = \phi(a)$ ja $g' = \phi(g)$. Nyt

$$g'a'(g')^{-1} = \phi(g)\phi(a)\phi(g)^{-1} = \phi(gag^{-1}) \in \phi(H),$$

koska $gag^{-1} \in H$. Väite seuraa Proposition 12.5 nojalla.

(2) Harjoitustehtävä 12.1. □

Propositiosta 12.7 saadaan tärkeänä erikoistapauksena

Seuraus 12.8. *Ryhmähomomorfismin ydin on normaali aliryhmä.* □

Esimerkki 12.9. (a) $A_n = \ker\varepsilon \lhd S_n$.

(b) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \ker\det\big|_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \lhd \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 12.7 kohdassa (1) on syytä pitää mielessä, että $\phi(H)$ ei välttämättä ole ryhmän G' normaali aliryhmä: Jos $H < G$ on aliryhmä, joka ei ole normaali ja jos $\phi \colon H \to G$ on inkluusiokuvaus, ei tietenkään $\phi(H) = H$ ole ryhmän G normaali aliryhmä.

12.2 Tekijäryhmät

Ryhmän $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ laskutoimitus määritellään asettamalla kaikille $a+q\mathbb{Z}, b+q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$

$$(a+q\mathbb{Z})+(b+q\mathbb{Z}) = (a+b)+q\mathbb{Z}\,.$$

Tämä määritelmä ei riipu kongruenssiluokkien edustajien valinnasta: Jos $a+q\mathbb{Z} = a'+q\mathbb{Z}$ ja $b+q\mathbb{Z} = b'+q\mathbb{Z}$, niin $a'+b'+q\mathbb{Z} = a+b+q\mathbb{Z}$.

Tilanne on haastavampi, jos yritämme määritellä laskutoimituksen jonkin muun ryhmän G ja aliryhmän $H \leq G$ vasempien sivuluokkien joukossa: Olkoon $H = \langle(12)\rangle < S_3$. Tällöin $(12)H = H = \mathrm{id}\,H$ ja Esimerkistä 11.3 muistamme, että

$$(12)(13)H = (132)H \neq (13)H = \mathrm{id}(13)H\,.$$

Siis emme voi määritellä laskutoimitusta joukossa S_3/H samalla tavalla kuin kongruenssiluokkien yhteenlasku määriteltiin. Osoittautuu, että ongelmia ei ole, jos $H \trianglelefteq G$:

Lause 12.10. *Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \trianglelefteq G$. Tällöin lauseke*

$$(aH)(bH) = abH\,, \tag{12.1}$$

$a, b \in G$ määrää laskutoimituksen vasempien sivuluokkien joukossa G/H.

Todistus. Olkoot $x, x', y, y' \in G$ siten, että $xH = x'H$ ja $yH = y'H$. Tällöin siis $x' \in xH$ ja $y' \in yH$, joten on $h_1, h_2 \in H$, joille $x' = xh_1$, $y' = yh_2$. Koska H on normaali, on $h_3 \in H$, jolle $h_1 y = yh_3$. Siis

$$x'y' = xh_1yh_2 = xyh_3h_2 \in xyH\,,$$

joten Proposition 11.6 nojalla $x'y'H = xyH$.[1] □

Additiivisen ryhmän $(A,+)$ alkion x sivuluokalle käytetään merkintää $x+H$ ja tekijälaskutoimitus on siis tällä merkintätavalla

$$(x+H)+(y+H) = (x+y)+H$$

kaikille $x, y \in A$.

Seuraus 12.11. *Jos $H \trianglelefteq G$, niin tekijäjoukko G/H varustettuna tekijälaskutoimituksella on ryhmä. Tekijäkuvaus $\pi\colon G \to G/H$, $\pi(a) = aH$, on surjektiivinen ryhmähomomorfismi. Tekijäryhmän G/H neutraalialkio on H.*

Todistus. Tekijäkuvaus on homomorfismi, koska kaikille $a, b \in G$ pätee

$$\pi(a)\pi(b) = (aH)(bH) = abH = \pi(ab)\,,$$

ja π on määritelmänsä nojalla surjektio. Tekijälaskutoimituksen assosiatiivisuus seuraa tästä ja Propositioista 1.14.Tekijälaskutoimituksen määritelmän mukaan kaikille $gH \in G/H$ pätee $HgH = gH$ $(gH)(g^{-1}H) = H$, joten H on laskutoimituksella varustetun joukon G/H neutraalialkio ja jokaisella alkiolla on käänteisalkio. □

[1] Lauseen 12.10 voi muotoilla myös luvussa 11.2 määriteltyjen ekvivalenssirelaatioiden avulla: normaalin aliryhmän $H \trianglelefteq G$ sivuluokkien määräämä ekvivalenssirelaatio on yhteensopiva ryhmän G laskutoimituksen kanssa.

Ryhmä G/H on normaalin aliryhmän H määräämä ryhmän G *tekijäryhmä.*

Esimerkki 12.12. Ryhmä $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ on kongruenssia mod q vastaava kokonaislukujen ryhmän tekijäryhmä.

Propositio 12.13. *Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \leq G$. Jos lauseke* (12.1) *määrää laskutoimituksen joukossa G/H, niin H on normaali.*

Todistus. Oletetaan, että laskutoimitus (12.1) määrää laskutoimituksen joukossa G/H. Kuten Seurauksen 12.11 todistuksessa, G/H varustettuna tekijälaskutoimituksella on ryhmä, jonka neutraalialkio on H. Luonnollinen homomorfismi $\pi\colon G \to G/H$ on ryhmähomomorfismi ja sen ydin on $H \leq G$. Proposition 12.7 nojalla H on normaali. □

Sykliset ryhmät käyttäytyvät hyvin tekijäryhmienkin suhteen

Propositio 12.14. *Jokainen syklisen ryhmän tekijäryhmä on syklinen.*

Todistus. Olkoon $G = \langle v \rangle$ syklinen ryhmä ja olkoon $H \trianglelefteq G$. Tällöin

$$G/H = \{gH : g \in G\} = \{v^k H : k \in \mathbb{Z}\} = \{(vH)^k : k \in \mathbb{Z}\} = \langle vH \rangle .$$ □

Esimerkki 12.15. Harjoitustehtävässä 12.2 osoitetaan, että keskus[2] $Z(G)$ on ryhmän G normaali aliryhmä. Jos G on kommutatiivinen, niin $Z(G) = G$, joten tekijäryhmä $G/Z(G)$ kuvaa ryhmän G epäkommutatiivisuutta.

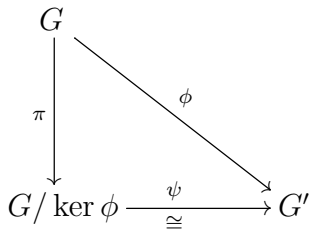
Propositio 12.16. *Olkoon G ryhmä. Aliryhmä $H \leq G$ on normaali aliryhmä, jos ja vain jos se on jonkin ryhmässä G määritellyn ryhmähomomorfismin ydin.*

Todistus. Harjoitustehtävä 12.6. □

12.3 Ryhmien ensimmäinen isomorfismilause

Todistamme seuraavaksi tärkeimmän tekijäryhmiä koskevan tuloksen. Todistus on Lauseen 9.29(1) todistuksen yleistys ja itse asiassa sama kuin renkaiden isomorfismilauseen[3] todistus.

Lause 12.17 (Ryhmien (ensimmäinen) isomorfismilause)**.** *Jos $\phi\colon G \to G'$ on ryhmähomomorfismi, niin* $\operatorname{Im}\phi \cong G/\ker\phi$.



[2]Keskus määriteltiin Harjoitustehtävän 9.7 yhteydessä.
[3]Lause 7.23

Todistus. Jos $x \ker\phi = y \ker\phi$, niin jollain $h \in \ker\phi$ pätee $y = xh$. Siis

$$\phi(y) = \phi(xh) = \phi(x)\,\phi(h) = \phi(x)e' = \phi(x).$$

Tähän havaintoon perustuen määritellään kuvaus $\psi\colon G/\ker\phi \to \operatorname{Im}\phi$,

$$\psi(x \ker\phi) = \phi(x),$$

joka on homomorfismi: Olkoot $x, y \in G$. Tällöin

$$\psi(x \ker\phi)\,\psi(y \ker\phi) = \phi(x)\,\phi(y) = \phi(xy) = \psi(xy \ker\phi) = \psi(x \ker\phi\ y \ker\phi).$$

Kuvaus ψ on selvästi surjektio. Osoitetaan se vielä injektioksi. Jos $x \ker\phi \in \ker\psi$, niin $\phi(x) = \psi(xH) = e'$, joten $x \in \ker\phi$. Proposition 11.4(1) nojalla $x \ker\phi = \ker\phi$. Siis $\ker\psi = \{\ker\phi\}$, joten Proposition 9.20 nojalla ψ on injektio. □

Seuraus 12.18. *Olkoon $\phi\colon G \to G'$ surjektiivinen ryhmähomomorfismi. Tällöin ryhmät G' ja $G/\ker\phi$ ovat isomorfisia.* □

Lause 12.19. *Olkoon $\phi\colon G \to G'$ surjektiivinen ryhmähomomorfismi ja olkoon $H' \trianglelefteq G'$. Tällöin $G/\phi^{-1}(H') \cong G'/H'$.*

Todistus. Proposition 12.7(2) mukaan $H = \phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$. Olkoon $\pi\colon G' \to G'/H'$ luonnollinen homomorfismi. Tällöin $\widetilde{\psi} = \pi \circ \phi\colon G \to G'/H'$ on surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin on H. Lauseen 12.17 mukaan $G/H \cong G'/H'$. □

Ryhmien ensimmäinen isomorfismilause antaa myös Seurauksen 11.18 todistuksen.

Esimerkki 12.20. (a) Homomorfismi $\phi\colon \mathbb{Z}^2 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$,

$$\phi(k_1, k_2) = (k_1 + 2\mathbb{Z}, k_2 + 2\mathbb{Z})\,,$$

on surjektio, jonka ydin on $(2\mathbb{Z})^2 \lhd \mathbb{Z}^2$. Isomorfismilauseen nojalla $\mathbb{Z}^2/(2\mathbb{Z})^2$ on isomorfinen ryhmän $K_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ kanssa. Siis

$$[\mathbb{Z}^2 : (2\mathbb{Z})^2] = \#\big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2\big) = \#K_4 = 4\,.$$

(b) Kuvaus $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 < \mathbb{C}^\times$, $\phi(t) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$, on surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin on selvästi $\mathbb{Z}$. Siis $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

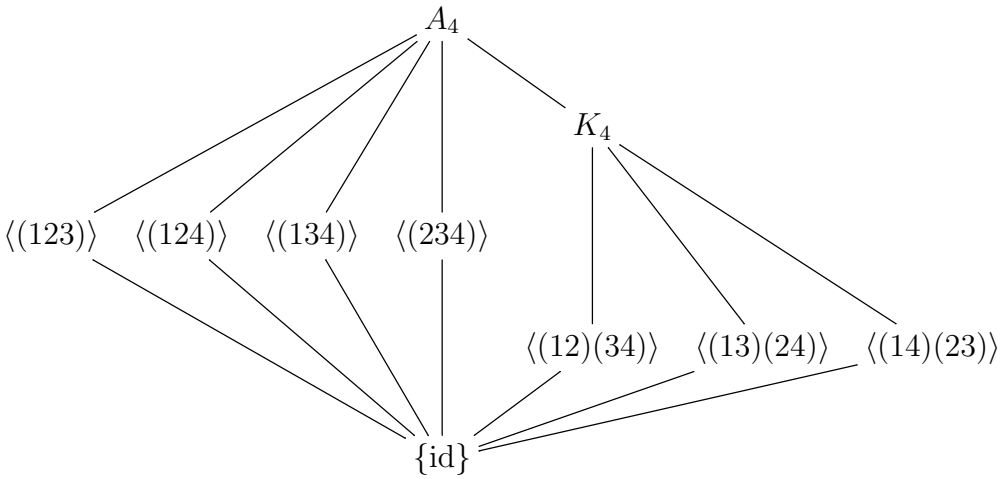
(c) Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Tällöin $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^\times$, koska $\det \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times$ on surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin on $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

Esimerkki 12.21. Osoitamme nyt, että alternoivalla ryhmällä A_4 ei ole kuuden alkion aliryhmää. Jos $H < A_4$ on aliryhmä, jonka kertaluku on 6, niin Lagrangen lauseen mukaan $[A_4 : H] = 2$. Proposition 12.3 nojalla $H \lhd A_4$. Tekijäryhmässä A_4/H on kaksi alkiota, joten $A_4/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Siis kaikille $g \in G$ pätee $g^2H = gHgH = H$, joten Proposition 11.4 nojalla $g^2 \in H$ kaikille $g \in G$.

Kaikki 3-syklit kuuluvat ryhmään A_4 Esimerkin 10.21 nojalla. Jos $g \in A_4$ on 3-sykli, niin $g = g^4 = (g^2)^2 \in H$. Kaikki 3-syklit siis sisältyvät aliryhmään H. Proposition 10.22 nojalla $H = A_4$.

Päätelmän voi tehdä myös ilman Propositiota 10.22: Ryhmässä A_4 on kahdeksan 3-sykliä, joiden pitäisi edellä tehdyn laskun nojalla sisältyä kuuden alkion aliryhmään. Siis ryhmällä A_4 ei ole kuuden alkion aliryhmää.

Ryhmän A_4 aliryhmärakenne on seuraavan kaavion mukainen:



Mitkä tahansa kaksi ryhmän A_4 kertaluvun 2 alkioista (12)(34), (13)(24) ja (14)(23) virittävät kaaviossa esiintyvän Kleinin neliryhmän K_4. Esimerkiksi

$$(12)(34)(13)(24) = (14)(23) = (13)(24)(12)(34)\,, \tag{12.2}$$

joten alkiot (12)(34) ja (13)(24) kommutoivat. Proposition 9.21 ja yhtälön (12.2) avulla näemme, että

$$\langle(12)(34)\rangle\langle(13)(24)\rangle = \langle(12)(34),(13)(24)\rangle = \{\mathrm{id},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}\,.$$

Siis $\langle(12)(34),(13)(24)\rangle$ on aliryhmien $\langle(12)(34)\rangle$ ja $\langle(13)(24)\rangle$ sisäinen suora tulo. Proposition 9.35 nojalla

$$\langle(12)(34),(13)(24)\rangle \cong \langle(12)(34)\rangle \times \langle(13)(24)\rangle \cong K_4\,.$$

Aliryhmä $K_4 < A_4$ sisältää kaikki ryhmän A_4 alkiot, joiden kertaluku on 2. Siis se on normaali aliryhmä.

12.4 Ryhmien toinen ja kolmas isomorfismilause

Ryhmien ensimmäisen isomorfismilauseen avulla todistetaan lisää tekijäryhmien isomorfisuustuloksia.

Propositio 12.22. *Olkoon G ryhmä ja olkoot $N \trianglelefteq G$ ja $T \leq G$. Tällöin*

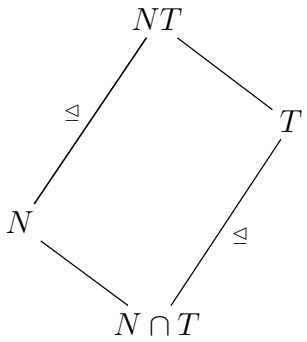
$$NT = TN = \langle N \cup T\rangle \leq G\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 12.14. □

Propositio 12.23. *Olkoon G ryhmä. Olkoot $N, T \leq G$, $N \trianglelefteq G$. Tällöin $N \cap T \trianglelefteq T$.*

Todistus. Olkoon $\pi\colon G \to G/N$ tekijäkuvaus. Koska $\ker \pi|_T = T \cap N$, Seurauksen 12.8 nojalla $T \cap N \trianglelefteq T$. □

Lause 12.24 (Ryhmien toinen isomorfismilause)**.** *Olkoon G ryhmä. Olkoot $N, T \leq G$, $N \trianglelefteq G$. Tällöin ryhmät $T/N \cap T$ ja NT/N ovat isomorfisia.*



Todistus. Olkoon $\pi\colon G \to G/N$ tekijäkuvaus. Proposition 12.23 nojalla $T \cap N \trianglelefteq T$, joten soveltamalla ensimmäistä isomorfismilausetta homomorfismiin $\pi|_T$ saamme isomorfismin

$$T/N \cap T = T/\ker(\pi|_T) \cong \pi|_T(T) = \pi(T)\,. \tag{12.3}$$

Vastaavasti $\ker \pi|_{NT} = N$ ja koska kaikille $n \in N$ ja $t \in T$ pätee

$$\pi(nt) = ntN = tnN = tnN = \pi(t)\,,$$

saadaan $\pi(NT) = \pi(T)$. Ensimmäisen isomorfismilauseen ja isomorfismin (12.3) nojalla

$$NT/N \cong \pi|_{NT}(NT) = \pi(T) \cong T/N \cap T\,.$$ □

Seuraus 12.25. *Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$. Tällöin*

$$\operatorname{syt}(a,b)\operatorname{pyj}(a,b) = ab\,.$$

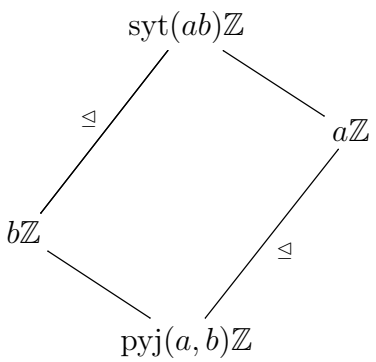
Todistus. Olkoot $T = \langle a\rangle = a\mathbb{Z}$ ja $B = \langle b\rangle = b\mathbb{Z}$. Toisen isomorfismilauseen nojalla

$$\operatorname{syt}(ab)\,\mathbb{Z}/b\mathbb{Z} = \langle a,b\rangle/\langle b\rangle = NT/N \cong T/T\cap N = \langle a\rangle/\langle a\rangle\cap\langle b\rangle = a\mathbb{Z}/\operatorname{pyj}\mathbb{Z}$$

ovat isomorfisia. Harjoitustehtävän 11.5 nojalla

$$\frac{b}{\operatorname{syt}(ab)} = \#\operatorname{syt}(ab)\mathbb{Z}/b\mathbb{Z} = \#a\mathbb{Z}/\operatorname{pyj}\mathbb{Z} = \frac{\operatorname{pyj}(a,b)}{a}\,,$$

mistä väite seuraa. □



Lause 12.26 (Ryhmien kolmas isomorfismilause)**.** *Olkoon G ryhmä. Olkoot $K \leq H \leq G$, $K, H \trianglelefteq G$. Tällöin ryhmät G/H ja $(G/K)/(H/K)$ ovat isomorfisia.*

Todistus. Osoitamme, että kuvaus $\phi\colon G/K \to G/H$, $\phi(xK) = xH$ on surjektiivinen homomorfismi, $\ker\phi = H/K$. Kuvaus on hyvin määritelty, koska $K \subset H$. Surjektiivisuus on selvää. Lisäksi

$$\phi(xKyK) = \phi(xyK) = xyH = xHyH = \phi(xK)\phi(yK),$$

joten kuvaus on homomorfismi. Lisäksi $\phi(yK) = yH = H$, kun $y \in H$, joten $H/K \subset \ker\phi$. Toisaalta, jos $y \notin H$, niin $yH \neq H$, joten $H/K = \ker\phi$. Väite seuraa isomorfismilauseesta 12.17. □

Harjoitustehtäviä

12.1. Todista Propositio 12.7(2).

12.2. (a) Osoita, että ryhmän G keskus $Z(G)$ on normaali aliryhmä.[4]

(b) Osoita, että ryhmän Q_8 kaikki aliryhmät ovat normaaleja.[5]

12.3. Osoita, että $Q_8/Z(Q_8) \cong K_4$.[6]

12.4. Olkoon $H \trianglelefteq A_n$ normaali aliryhmä, joka sisältää ainakin yhden 3-syklin. Osoita, että $H = A_n$.[7]

12.5. Olkoon G ryhmä, olkoon $I \neq \emptyset$ jokin indeksijoukko ja olkoot $H_i \trianglelefteq G$, $i \in I$. Osoita, että

$$\bigcap_{i\in I} H_i \trianglelefteq G\,.$$

12.6. Todista Propositio 12.16.

12.7. Osoita, että $\mathbb{C}^\times/\{-1,1\} \cong \mathbb{C}^\times$.[8]

12.8. Osoita, että $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{S}^1$.

12.9. Osoita, että tekijäryhmä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on ääretön. Osoita, että ryhmän $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ jokaisen alkion kertaluku on äärellinen ja että ryhmä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ei ole syklinen.

12.10. Olkoot $N_1 \trianglelefteq G_1$ ja $N_2 \trianglelefteq G_2$. Osoita, että $N_1 \times N_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$ ja

$$(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)\,.$$[9]

12.11. Olkoon H_3 3-ulotteinen Heisenbergin ryhmä.[10] Olkoon $\psi\colon H_3 \to (\mathbb{R}^2, +)$,

$$\psi\Big(\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Big) = (a,b)\,.$$

[4]Keskus määriteltiin Harjoitustehtävän 9.7 yhteydessä.
[5]Q_8 määriteltiin Harjoitustehtävän 9.4 yhteydessä.
[6]Muodosta tekijäryhmän laskutaulu.
[7]Propositio 10.22 ja Harjoitustehtävä 10.13 tai 10.15(1).
[8]Sovella ryhmien ensimmäistä isomorfismilausetta.
[9]Sovella ryhmien ensimmäistä isomorfismilausetta.
[10]Heisenbergin ryhmä määriteltiin Harjoitustehtävän 9.5 yhteydessä.

Osoita, että ψ on homomorfismi ja määritä sen ydin. Osoita, että $H_3/\ker\psi \cong (\mathbb{R}^2, +)$.

12.12. Olkoon C syklinen ryhmä. Osoita, että ryhmällä $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ on ryhmän C kanssa isomorfinen aliryhmä.[11]

12.13. Olkoot $q, r \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ lukuja, joiden suurin yhteinen tekijä on 1. Osoita, että[12]

$$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/qr\mathbb{Z}\,.$$

12.14. Todista Propositio 12.22.[13]

Olkoon G ryhmä. Alkioiden $a, b \in G$ *kommutaattori* on

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}\,.$$

Ryhmän G *kommutaattorialiryhmä* $[G, G]$ on kaikkien kommutaattorien $[a, b]$, $a, b \in G$, virittämä aliryhmä

$$[G, G] = \big\langle [a, b] : a, b \in G \big\rangle.$$

12.15. Osoita, että $[G, G] \trianglelefteq G$.[14]

12.16. Osoita, että $G/[G, G]$ on kommutatiivinen ryhmä.

12.17. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ pariton ja olkoon G äärellinen ryhmä, jonka kertaluku on $2k$. Olkoon $a \in G$ alkio, jonka kertaluku on 2. Osoita, että vasen siirto ℓ_a on pariton permutaatio.

12.18. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ pariton ja olkoon G äärellinen ryhmä, jonka kertaluku on $2k$. Osoita, että ryhmällä G on normaali aliryhmä, jonka kertaluku on k.[15]

12.19. Olkoon G äärellinen ryhmä ja olkoon $H < G$ siten, että $p = [G : H]$ on pienin alkuluku, joka jakaa ryhmän G kertaluvun. Osoita, että $H \trianglelefteq G$.[16]

12.20. Olkoon G ryhmä ja olkoot $H_1, H_2 \leq G$ äärellisen indeksin aliryhmiä. Olkoon $\rho\colon G \to \mathrm{Perm}(G/H_1 \times G/H_2)$,

$$\rho(x)(aH_1, aH_2) = ((xa)H_1, (xb)H_2)\,.$$

Osoita, että $[G : \ker\rho] < \infty$. Osoita, että $[G : H_1 \cap H_2] < \infty$.

Ryhmä G on *yksinkertainen ryhmä*, jos sen ainoat normaalit aliryhmät ovat neutraalialkion muodostama aliryhmä ja G.

12.21. Osoita, että A_5 on yksinkertainen ryhmä.[17]

[11] Luvussa 9 tehtiin jotain hyödyllistä.
[12] Propositio **??**
[13] Riittää osoittaa, että $NT = TN$ on ryhmä, katso luku 9.7.
[14] Propositio 9.21. Laske ensin $[a, b]^{-1}$ ja osoita, että $g[a, b]g^{-1} \in [G, G]$ kaikilla $a, b, g \in G$.
[15] Esimerkki 12.9 ja Harjoitustehtävät 9.28 ja 12.17 voivat olla hyödyllisiä.
[16] Tehtävä 11.4 ja Lauseet 12.17 ja 11.10 ovat hyödyllisiä.
[17] Harjoitustehtävä 12.4. Lisäksi tarvittavia paloja on tehty luvun 10 harjoitustehtävässä.

Luku 13

Ryhmät ja geometria

Kurssin viimeisessä luvussa tarkastelemme euklidisen tason säännöllisten monikulmioiden ja 3-ulotteisen euklidisen avaruuden säännöllisten monitahokkaiden symmetrioita abstraktin ryhmäteorian, lineaarialgebran ja symmetristen ryhmien avulla.

13.1 Ortogonaaliryhmä

Bilineaarikuvaus $(\cdot \mid \cdot)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,,$$

on *euklidinen sisätulo*.
Funktio $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$,

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \,,$$

on *euklidinen normi*.
Kolmikko $\big(\mathbb{R}^n, (\cdot \mid \cdot), \|\cdot\|\big)$ on *euklidinen avaruus* $\mathbb{E}^n$.

Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ *ortogonaaliryhmä* on

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : {}^{\top}AA = I_n\} \,,$$

missä ${}^{\top}A$ on matriisin A transpoosi. Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ *erityinen ortogonaaliryhmä* on

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}.$$

Luvussa 9.3 tehdyn sopimuksen mukaisesti ajattelemme ortogonaaliryhmän $\mathrm{O}(n)$ alkioita tarpeen mukaan joko ortogonaalisina $n \times n$-matriiseina tai vastaavina lineaarikuvauksina.

Lemma 13.1. *Kaikille $A \in \mathrm{O}(n)$ ja kaikille $x, y \in \mathbb{E}^n$ pätee $(Ax \mid Ay) = (x \mid y)$. Erityisesti kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee $\|Ax\| = \|x\|$.*

Todistus. Lineaarialgebran tiedoilla saamme

$$(Ax \mid Ay) = {}^\top(Ax)Ay = {}^\top x\, {}^\top A A y = {}^\top x y = (x \mid y)$$

kaikille $A \in \mathrm{O}(n)$ ja kaikille $x, y \in \mathbb{E}^n$. Molemmat väitteet seuraavat tästä. □

Lemma 13.2. $\mathrm{O}(n) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *ja* $\mathrm{SO}(n) \lhd \mathrm{O}(n)$.

Todistus. Harjoitustehtävä 13.1. □

Yleisen lineaarisen ryhmän aliryhmänä ortogonaaliryhmä $\mathrm{O}(n)$ toimii vektoriavaruudella $\mathbb{R}^n$ lineaarikuvauksilla. Lemman 13.1 nojalla sen alkiot säilyttävät etäisyydet ja kulmat euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$.

Esimerkki 13.3. (a) Matriisi

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2) - \mathrm{SO}(2)$$

on lineaarikuvauksena *peilaus* $sx = (x_1, -x_2)$, joka kiinnittää pisteittäin ensimmäisen koordinaattiakselin $\mathbb{R} \times \{0\}$. Selvästi $\operatorname{ord} s = 2$.

(b) Olkoon $\theta \in \mathbb{R}$. Matriisi

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$$

on lineaarikuvauksena *kierto* kulman θ verran positiiviseen kiertosuuntaan. Jos n on positiivinen luonnollinen luku, niin selvästi $\operatorname{ord} r_{\frac{2\pi}{n}} = n$.

Kaikille $\theta \in \mathbb{R}$ pätee

$$s r_\theta s = r_\theta^{-1} = r_{-\theta}.$$

Lisäksi $r_\theta s r_\theta^{-1}$ on peilaus, joka kiinnittää pisteittäin suoran $r_\theta(\mathbb{R} \times \{0\})$.

13.2 Säännöllisten monikulmioiden symmetrioista

Tässä luvussa tarkastelemme ortogonaalimatriiseja, joita vastaavat kuvaukset kuvaavat 0-keskisen säännöllisen monikulmion itselleen.

Olkoon $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$. Olkoon $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Olkoot

$$v_k = r_{\frac{2\pi}{n}}^{k-1} \mathbf{e}_1 \,,$$

$k \in \mathbb{Z}$. Pisteiden v_k ja v_{k+1} määräämä *puolitaso* on

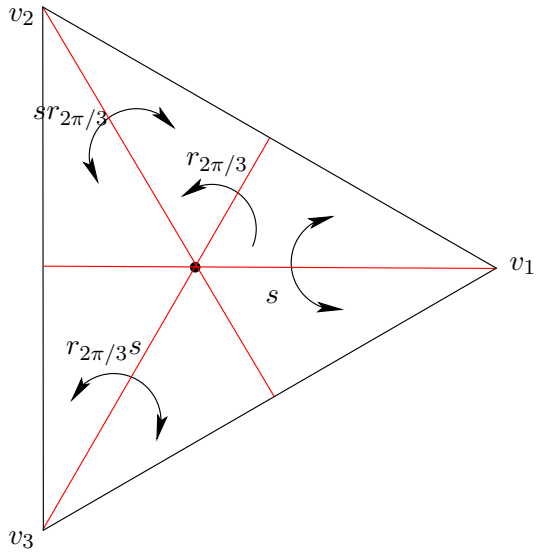
$$H_k = \left\{ x \in \mathbb{E}^2 : (x \mid v_k + v_{k+1}) \leq (v_k \mid v_k + v_{k+1}) \right\},$$

kun $1 \leq k \leq n$. Joukko

$$P_n = \bigcap_{k=0}^{n-1} H_k$$

on *säännöllinen monikulmio*. Pisteet $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ ovat monikulmion P *kärjet*.

Puolitaso H_k sisältään ne pisteet, jotka ovat samalla puolella kärkipisteiden v_k ja v_{k+1} kautta kulkevaa suoraa kuin 0.



Kuva 13.1 — Säännöllinen monikulmio P_3 on tasasivuinen kolmio, jonka kärjet ovat kompleksilukujen avulla ilmaistuna 1, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ja $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Kuva havainnollistaa kolmion P_3 symmetrioita Esimerkin 13.3 merkinnöillä.

Ortogonaaliryhmän aliryhmä[a]

$$D_n = \{A \in \mathrm{O}(2) : AP_n = P_n\}$$

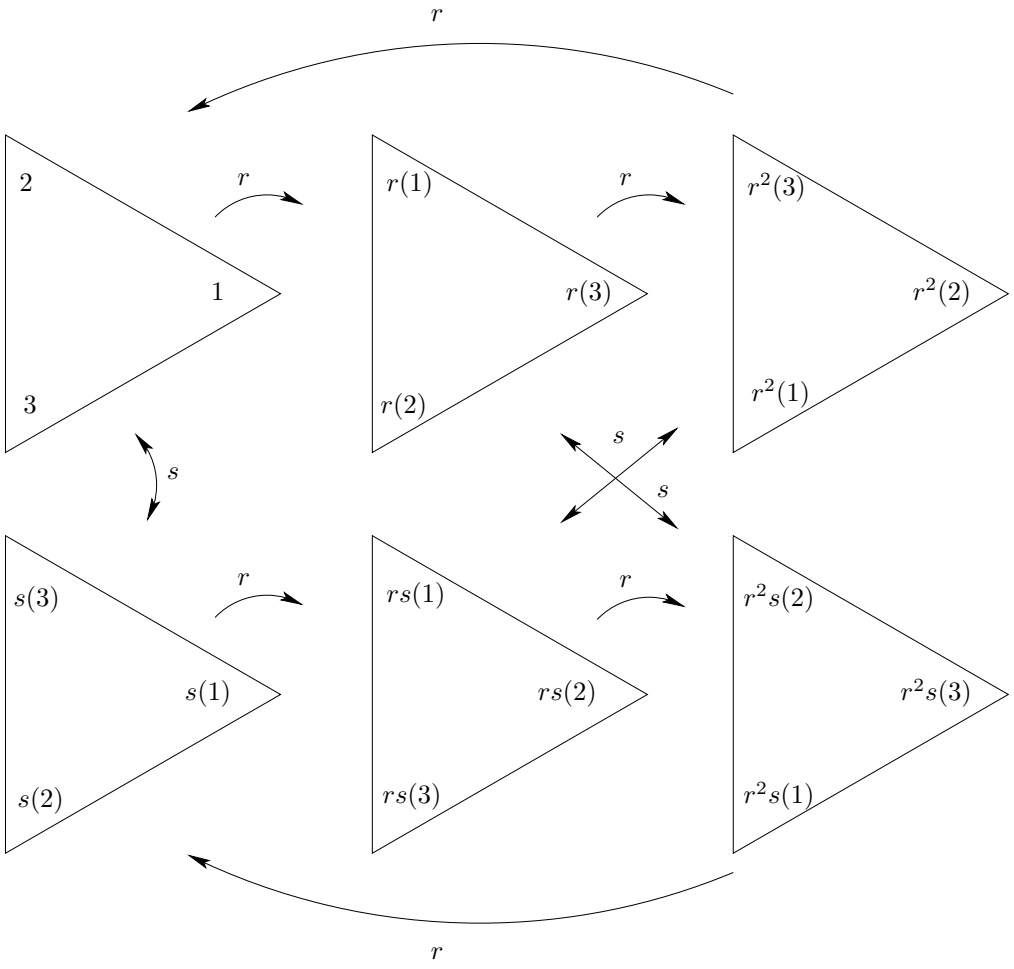
on *diedriryhmä* eli *kaksitahokasryhmä*. Diedriryhmän D_n alkiot ovat monikulmion P_n *symmetrioita*. [b]

[a] Katso Harjoitustehtävä 13.3.
[b] Merkintä AP_n tarkoittaa kuvajoukkoa $AP_n = \{Ax : x \in P_n\}$.

Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^3$ monitahokkaita voi kutsua myös kansainvälisemmällä nimellä polyedri, nelitahokastahan kutsutaankin yleensä tetraedriksi, 8-tasokasta oktaedriksi ja niin edelleen. Jos ajatellaan monikulmio P_n upotettuna 3-ulotteiseen avaruuteen, sillä on yläpuoli ja alapuoli, joten monitahokkaana se on kaksitahokas, siis diedri.

Esimerkki 13.4. Kolmiolla P_3 on kuusi symmetriaa: identtinen kuvaus id, kierrot $r_{2\pi/3}$ ja $r_{2\pi/3}^2 = r_{-2\pi/3}$ ja peilaukset s, $r_{2\pi/3}s = r_{2\pi/3}^{-1} s r_{2\pi/3}$ ja $sr_{2\pi/3} = r_{2\pi/3} s r_{2\pi/3}^{-1}$ kunkin kärjen kautta kulkevien kulmanpuolittajasuorien suhteen.

Jos kolmio P_3 ajatellaan kolmiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{E}^3$ kaksipuolisena levynä, joka sisältyy tasoon $\mathbb{E}^2 \times \{0\}$, niin kuvaukset id, $r_{2\pi/3}$ ja $r_{2\pi/3}^2$ kuvaavat kolmion yläpuolen yläpuoleksi ja muut kuvaavat yläpuolen alapuoleksi.



Kuva 13.2 — Ryhmän D_3 toiminta kolmiolla P_3. Kuvassa $r = r_{2\pi/3}$ ja kärkiä v_1, v_2 ja v_3 on merkitty niiden järjestysnumeroilla 1, 2 ja 3.

Lemma 13.5. *Olkoon $n \geq 3$ luonnollinen luku. Tällöin*

(1) $D_n \leq \mathrm{O}(2)$.

(2) $D_n = \langle s, r_{2\pi/n} \rangle$.

(3) $\#D_n = 2n$.[1]

Todistus. (1) Harjoitustehtävä 13.3.

(2) Osoitetaan ensin, että $\langle s, r_{2\pi/n}\rangle \leq D_n$: Olkoon

$$V_n = \{v_1 = (1,0), v_2, \ldots, v_n\}$$

monikulmion P_n kärkien joukko järjestettynä positiivisen kiertosuunnan mukaan. Matriisia $r_{2\pi/n}$ vastaava lineaarikuvaus kiertää monikulmiota P_n siten, että $r_{2\pi/n}v_j = v_{j+1}$, kun $1 \leq j \leq n-1$ ja $r_{2\pi/n}v_n = v_1$. Jos n on parillinen, niin s kiinnittää kärkipisteet v_1 ja $v_{\frac{n}{2}+1}$ ja $s(v_k) = v_{n+2-k}$ kaikille $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$. Jos n on pariton, niin s kiinnittää vain kärjen v_1 ja $s(v_k) = v_{n+2-k}$ kaikille $2 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$. Kaikki kuvaukset, joita saadaan yhdistettynä kuvauksina kuvauksista $r_{2\pi/n}^{\pm 1}$ ja $s = s^{-1}$ kuvaavat monikulmion P_n itselleen. Proposition 9.21 nojalla siis $\langle s, r_{2\pi/n}\rangle \leq D_n$.

Osoitetaan, että $D_n \leq \langle s, r_{2\pi/n}\rangle$. Olkoon $f \in D_n$. Tällöin on $m \in \mathbb{Z}$ ja $t \in \{id, s\} < D_n$ siten, että $t\, r_{2\pi/n}^m f(1,0) = (1,0)$ ja myös molemmat viereiset kärjet kuvautuvat itselleen. Tällöin $t r_{2\pi/n}^m f = \mathrm{id}$, koska identtinen kuvaus on ainoa tason lineaarikuvaus, joka kiinnittää kaksi lineaarisesti riippumatonta vektoria. Siis $f \in \langle s, r_{2\pi/n}\rangle$, joten $D_n \leq \langle s, r_{2\pi/n}\rangle$.

(3) Kuvaus $d \in D_n$ määräytyy yksikäsitteisesti, kun valitaan, mihin n eri vaihtoehdosta kärkipiste $(1,0)$ kuvautuu ja valitaan, vaihtuuko kärkien kiertosuunta kuvauksessa d vai ei (kaksi vaihtoehtoa). Siis $\#D_n = 2n$. □

Diedriryhmän D_n *permutaatioesitys* on kuvaus $\rho_n \colon D_n \to S_n$, joka määritellään siten, että alkiota $A \in D_n$ vastaa permutaatio $\rho_n(A) \in S_n$, jolle pätee

$$Av_k = v_{\rho(A)(k)} \tag{13.1}$$

kaikille $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Lemman 13.5(2) todistuksessa näimme, että

$$\rho_n(r_{2\pi/n}) = (12\cdots n)\,.$$

Permutaation $\rho_n(s)$ lauseke riippuu siitä, onko n parillinen vai pariton: Parillisille n pätee

$$\rho_n(s) = (2\ n)(3\ (n-1))\cdots\big(\tfrac{n}{2}\ \tfrac{n}{2}+2\big) = \prod_{k=2}^{\frac{n}{2}} \big(k\ (n-k+2)\big) \tag{13.2}$$

ja parittomille pätee

$$\rho_n(s) = (2\ n)(3\ (n-1))\cdots\big(\tfrac{n+1}{2}\ \tfrac{n+1}{2}+2\big) = \prod_{k=2}^{\frac{n-1}{2}} \big(k\ (n-k+2)\big)\,. \tag{13.3}$$

Propositio 13.6. *Kuvaus ρ_n on uskollinen esitys.*

[1] Joissain kirjoissa monikulmion P_n symmetrioista koostuvalle diedriryhmälle käytetään merkintää D_{2n}. Tätä merkintää käyttää esimerkiksi [Rot] neljännestä laitoksesta alkaen.

Todistus. Lemman 13.5 todistuksessa näimme, että lineaarikuvauksen $A \in D_n$ rajoittuma monikulmion P_n joukkoon V_n määrää symmetrisen ryhmän $\mathrm{Perm}(V_n) \cong S_n$ alkion $\rho(A)$ yhtälön (13.1) mukaisesti. Olkoot $A, B \in D_n$. Tällöin kaikille $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pätee

$$v_{\rho_n(AB)} = (AB)v_k = A(Bv_k) = Av_{\rho_n(B)(k)} = v_{\rho_n(A)(\rho_n(B)(k))} = v_{(\rho_n(A)\rho_n(B))(k)}\,,$$

joten ρ_n on homomorfismi. Se on injektiivinen Lemman 13.5(2) todistuksen loppuosan ja Proposition 9.20 nojalla. □

Seuraus 13.7. $D_n \cong \langle \rho_n(r_{2\pi/n}), \rho_n(s)\rangle \cong \langle (1, 2, \ldots, n), \rho_n(s)\rangle \leq S_n$. □

Homomorfismi ρ_n ei ole surjektio, kun $n \geq 4$, koska tällöin $\#D_n = 2n < n! = \#S_n$.

Esimerkki 13.8. Ryhmä D_3 on isomorfinen ryhmän S_3 kanssa, koska homomorfismi $\rho_3 \colon D_3 \to S_3$ on injektio ja $\#D_3 = 6 = \#S_3$. Yhtälön (13.3) mukaan $\rho_3(s) = (23)$.

Esimerkki 13.9. Lemman 13.5 nojalla neliön diedriryhmä on

$$D_4 = \langle r_{\pi/2}, s\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Diedriryhmässä D_4 on 8 alkiota: Neutraalialkion I_2, lisäksi on kierrot

$$r_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad r_{\pi/2}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

joiden kertaluku on 4, ja viisi kertaluvun 2 alkiota $r_{\pi/2}^2 = -I_2 \in Z(D_4)$, s,

$$r_{\pi/2} s r_{\pi/2}^{-1} = s r_{\pi/2}^2 = -s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$r_{\pi/2} s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad s r_{\pi/2} = -r_{\pi/2} s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lagrangen lauseen nojalla tai virittäjiä tarkastelemalla nähdään, että

$$\langle r_{\pi/2}, s\rangle = \langle r_{\pi/2}, s r_{\pi/2}\rangle = \langle r_{\pi/2}, r_{\pi/2} s\rangle = \langle r_{\pi/2}, r_{\pi/2} s\rangle = D_4\,.$$

Samoin virittäjistä näkee helposti, että

$$\langle s, r_{\pi/2} s\rangle = \langle s, s r_{\pi/2}\rangle = \langle s r_{\pi/2}^2, r_{\pi/2} s\rangle = \langle s r_{\pi/2}^2, s r_{\pi/2}\rangle = \langle s, r_{\pi/2}\rangle = D_4\,,$$

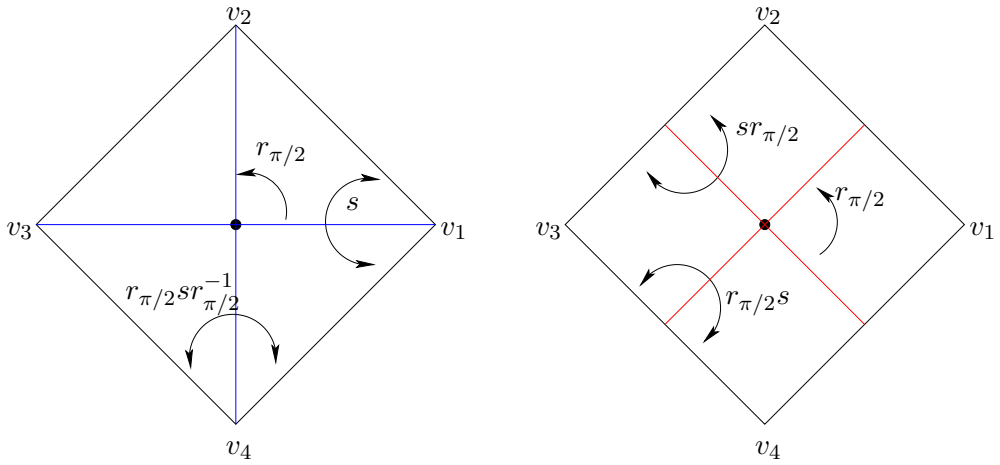
joten kertaluvun 4 alkiot esiintyvät vain syklisessä aliryhmässä $\langle r_{\pi/2}\rangle$ ja koko ryhmässä D_4. Kertaluvun 2 alkiot virittävät kukin kahden alkion syklisen ryhmän, joita on siis viisi.

Lisäksi on helppo tarkastaa, että

$$\langle -I_2, s\rangle = \langle -I_2, -s\rangle = \langle s, -s\rangle = \{I_2, -I_2, s, -s\} = K_4^{(1)}\,.$$

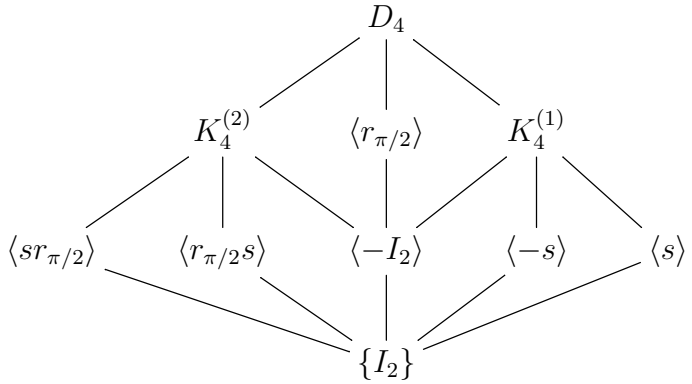
Koska $-I_2$ on keskuksessa, tämä ryhmä on Kleinin neliryhmä. Vastaavalla tavalla nähdään, että

$$\langle -I_2, r_\pi/s\rangle = \langle -I_2, s r_{\pi/2}\rangle = \langle r_{\pi/2} s, s r_{\pi/2}\rangle = \{I_2, -I_2, r_\pi/s, s r_{\pi/2}\} = K_4^{(2)} \cong K_4\,.$$



Kuva 13.3 — Ryhmällä D_4 on kaksi aliryhmää, jotka ovat Kleinin neliryhmiä.

Ryhmän D_4 aliryhmäkaavio on siis



Kleinin neliryhmän kanssa isomorfiset aliryhmät koostuvat identtisen kuvauksen lisäksi kahdesta keskenään kohtisuorien akselien suhteen tehtävästä peilauksesta ja niiden yhdistettynä kuvauksena saatavasta kierrosta $-I_2$, katso Kuva 13.3.

Yhtälön (13.2) mukaan $\rho_4(s) = (24)$ ja Seurauksen 13.7 nojalla diedriryhmä D_4 on isomorfinen ryhmän $\langle (1234), (24)\rangle < S_4$ kanssa.

Seuraava tulos osoittaa, että se, että valitsimme monikulmion P_n yhdeksi kärjeksi pisteen $(0, 1)$ ei ole oleellista.

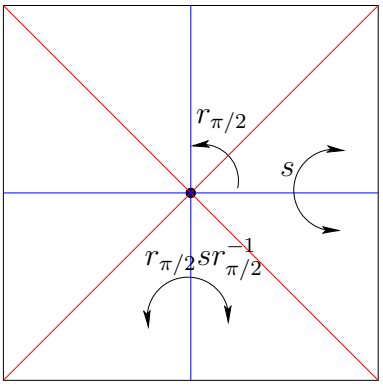
Lemma 13.10. *Olkoon $n \geq 3$, olkoon $\theta \in \mathbb{R}$ ja olkoon $P_n^\theta = r_\theta(P_n)$. Ryhmät D_n ja $\{A \in \mathrm{O}(2) : AP_n^\theta = P_n^\theta\}$ ovat isomorfiset.*

Todistus. Harjoitustehtävä 13.5. □

Esimerkki 13.11. Olkoon

$$P_4^{\pi/4} = r_{\pi/4}(P_4) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}.$$

Proposition 13.10 nojalla ryhmät $\{A \in \mathrm{O}(2) : AP_n^{\pi/4} = P_n^{\pi/4}\}$ ovat isomorfisia. Itse asiassa tässä tapauksessa pätee jopa yhtälö $D_4 = \{A \in \mathrm{O}(2) : AP_n^{\pi/4} = P_n^{\pi/4}\}$.



Kuva 13.4 — Ryhmän D_4 alkioita kierretyn neliön symmetrioina.

13.3 Monitahokkaiden symmetrioista

Esimerkki 13.12. Kolmiulotteisen avaruuden erityisen ortogonaaliryhmän SO(3) neutraalialkiosta poikkeavat alkiot vastaavat euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^3$ kiertoja jonkin (origon kautta kulkevan) suoran ympäri.[2] Esimerkiksi matriisi

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(3)$$

on kierto kulman $\theta \in \mathbb{R}$ verran kolmannen koordinaattiakselin ympäri.

Olkoon $K \subset \mathbb{R}^3$ kuutio, jonka kärkipisteiden joukko on

$$V_K = \left\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) : \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}\right\}.$$

Kuution K *symmetriaryhmä* on

$$\Gamma_K = \{A \in \mathrm{O}(3) : AK = K\}$$

ja sen *kiertosymmetriaryhmä* on

$$\Gamma_K^+ = \{A \in \mathrm{SO}(3) : AK = K\}$$

Kuten luvussa 13.2 nähdään helposti, että ryhmät Γ_K ja Γ_K^+ ovat isomorfisia joidenkin ryhmän $\mathrm{Perm}(V_K) \cong S_8$ aliryhmien kanssa. Tässä luvussa tarkastelemme ryhmien Γ_K ja Γ_K^+ toimintaa pienemmällä joukolla ja saamme näiden ryhmien rakenteen selvitettyä täydellisesti.

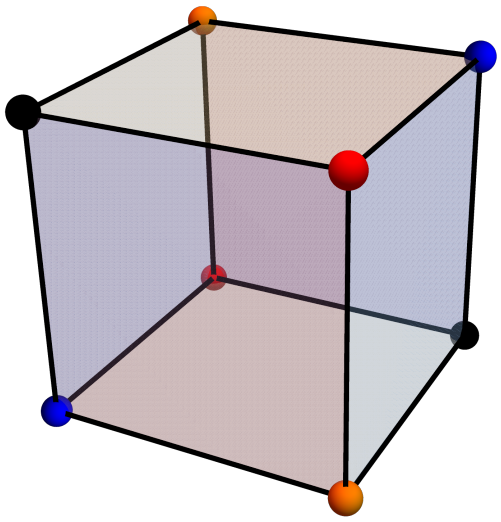
Propositio 13.13. $\Gamma_K^+ \cong S_4$.

Todistus. Olkoon

$$L = \left\{\{v, -v\} : v \in V_K\right\}.$$

[2]Katso esimerkiksi [Arm, Luku 9].

Joukko $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$ koostuu kuution K vastakkaisten kärkipisteiden muodostamista joukon V osajoukoista, joita voi ajatella kuution neljänä lävistäjänä.



Kuva 13.5 — Kuutio K ja joukon L muodostavat kärkiparit.

Määritellään ryhmän Γ_K toiminta $\rho_0 \colon \Gamma_K \to \mathrm{Perm}(L) \cong S_4$ joukolla L asettamalla

$$\rho_0(g)(\{v, -v\}) = \{gv, g(-v)\} = \{gv, -gv\}$$

kaikilla $g \in \Gamma_K$ ja $v \in V$. Näin saamme ryhmän Γ_K toiminnan ρ joukolla $\{1, 2, 3, 4\}$ määrittelemällä, että $\rho(g) \in S_4$ on se permutaatio, jolle pätee $\rho_0(g)(\ell_k) = \ell_{\rho(g)(k)}$ kaikilla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Olkoon $g \in \Gamma_K$ siten, että $\{gv, -gv\} = \{v, -v\}$ kaikille $v \in V_K$. Selvästi I_3 ja $-I_3$ ovat tällaisia ryhmän Γ_K alkioita. Oletetaan, että $gv = v$ jollain $v \in V_K$. Kolme kuution kärkeä x, y, z on täsmälleen etäisyydellä 2 kärjestä v, joten niiden kuvat kuvauksella v ovat etäisyydellä 2 kärjestä v. Siis $g\{x, y, z\} = \{x, y, z\}$. Oletimme, että g kuvaa kolmion K lävistäjät itselleen. Siis $g(x) = x$, $g(y) = y$ ja $g(z) = z$, joten g pitää kaikki kärjet paikallaan. Vastaavasti nähdään, että ehdosta $g(v) = -v$ jollekin $v \in V_K$ seuraa $g = -I_3$.

Kuution K kärjet virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$, joten $g = I_3$. Siis $\ker \rho = \{-I_3, I_3\}$. Lisäksi $\ker \rho \cap \Gamma_K^+ = \{I_3\}$, joten $\rho|_{\Gamma_K^+}$ on uskollinen esitys. Harjoitustehtävässä 13.6 osoitetaan, että $\rho|_{\Gamma_K^+} \colon \Gamma_K^+ \to S_4$ on surjektio. □

Kuution symmetriaryhmässä Γ_K on aliryhmän Γ_K^+ matriisien lisäksi esimerkiksi diagonaalimatriisi $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$, joka vastaa peilausta tasossa $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$. Ortogonaalimatriisia $-I_3 \in \mathrm{O}(3) - \mathrm{SO}(3)$ vastaava ortogonaalinen lineaarikuvaus $x \mapsto -x$ kuvaa selvästi kuution K itselleen. Tämä kuvaus on *pistepeilaus*, jonka ainoa kiintopiste on 0.

Propositio 13.14. *$\Gamma_K \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Todistus. Determinantti $\det \colon \Gamma_K \to \{-1, 1\}$ on surjektiivinen homomorfismi multiplikatiiviseen ryhmään $\{-1, 1\}$, koska $\pm I_3 \in \Gamma_K$ ja $\det(\pm I_3) = \pm 1$. Seurauksen 12.18 nojalla $\Gamma_K / \Gamma_K^+ \cong \{-1, 1\}$, joten $[\Gamma_K : \Gamma_K^+] = 2$.

Lagrangen lauseen nojalla $\langle \Gamma_K^+, -I_3 \rangle = \Gamma_K$, koska $\langle \Gamma_K^+, -I_3 \rangle \geq 25$. Lisäksi kaikille $A \in \Gamma_K^+$ pätee $A(-I_3) = -A = I_3 A$, joten $\Gamma_K^+ \langle -I_3 \rangle = \Gamma_K$. Lisäksi $\Gamma_K^+ \cap \langle -I_3 \rangle = \{I_3\}$ ja aliryhmän $\langle -I_3 \rangle$ molemmat alkiot kommutoivat kaikkien ryhmän $\mathrm{O}(3)$ alkioiden kanssa, joten Propositioiden 9.35 ja 8.19 nojalla

$$\Gamma_K \cong \Gamma_K^+ \times \langle -I_3 \rangle \cong S_4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \,. \qquad \square$$

Kuution K kärkipisteiden joukon V_K osajoukko

$$V_T = \big\{(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)\big\}$$

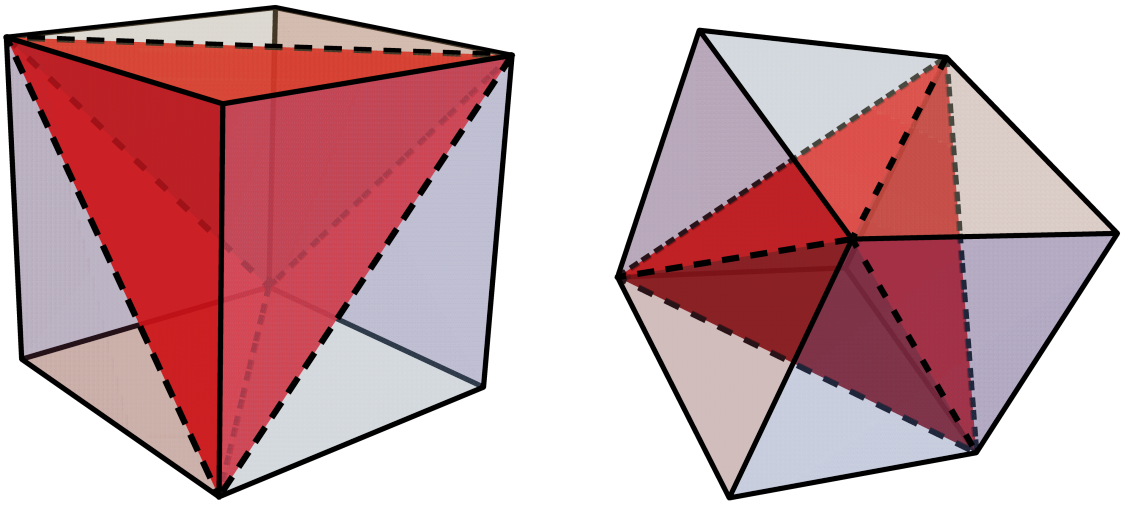
on säännöllisen tetraedrin T kärkipisteiden joukko. Tetraedrin T sivut ovat yhtä pitkiä keskenään ja kaikki tahot ovat tasasivuisia kolmioita. Tällä tavalla muodostetun tetraedrin painopiste on 0.

Tetraedrin T *symmetriaryhmä* on

$$\Gamma_T = \{A \in \mathrm{O}(3) : AT = T\}$$

ja sen *kiertosymmetriaryhmä* on

$$\Gamma_T^+ = \{A \in \mathrm{SO}(3) : AT = T\} \,.$$



Kuva 13.6 — Säännöllinen tetraedri kuution sisällä kahdesta eri katselukulmasta.

Propositio 13.15. $\Gamma_T^+ \cong A_4$.

Todistus. On helppo tarkastaa, että $V_K = V_T \sqcup -V_T$, $\Gamma_T^+ \leq \Gamma_K^+$ ja että $gV_T = V_T$ tai $gV_T = -V_T$ kaikille $g \in \Gamma_K$. Olkoon $\ell \in L$. Jos $g \in \Gamma_K^+ - \{\mathrm{id}\}$ on kierto alkion ℓ määräämän akselin ympäri, niin g kuvaa tetraedrin T itselleen ja $\rho(g) \in \operatorname{Perm} H$ on 3-sykli. Aliryhmä $\rho(\Gamma_T^+) \leq S_4$ sisältää ryhmän S_4 kaikki 8 3-sykliä, joten Proposition 10.22 nojalla $A_4 \leq \rho(\Gamma_T^+)$. Lagrangen lauseen nojalla $\#\Gamma_T^+ \in \{12 = \#A_4, 24\}$. Väite seuraa, koska $\Gamma_T^+ < \Gamma_K^+$. $\square$

Vastaavaan tapaan voidaan osoittaa, että ikosaedrin ja dodekaedrin kiertosymmetriaryhmä on isomorfinen ryhmän A_5 kanssa ja että näiden monitahokkaiden symmetriaryhmä on isomorfinen ryhmän $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kanssa. Lisää tästä aihepiiristä voi lukea esimerkiksi lähteistä [Arm, luku 8] ja [Ber, luku 12.5].

Harjoitustehtäviä

13.1. Todista Lemma 13.2.

13.2. Olkoon $n \geq 2$. Osoita, että $\mathrm{SO}(n) \trianglelefteq \mathrm{O}(n)$. Onko $\mathrm{O}(n) \lhd \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?[3]

13.3. Olkoon $n \geq 3$ luonnollinen luku. Osoita, että $D_n \leq \mathrm{O}(2)$.

13.4. Osoita, että $D_6 \cong S_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.[4]

13.5. Todista Lemma 13.10.[5]

13.6. Osoita, että Proposition 13.13 todistuksessa käytettävä homomorfismi $\rho|_{\Gamma_K^+}$ on surjektio.[6]

Olkoon $A \in \mathrm{O}(n)$ ja olkoon $b \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $E_{A,b} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$E_{A,b}(x) = Ax + b$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Joukko

$$\mathrm{E}(n) = \{E_{A,b} : A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

varustettuna kuvausten yhdistämisellä on n-ulotteisen avaruuden *Eukleideen ryhmä*. Eukleideen ryhmän aliryhmä

$$\mathrm{T}(n) = \{E_{I_n,b} \in \mathrm{E}(n) : b \in \mathbb{R}^n\}$$

on n-ulotteisen avaruuden *siirtojen ryhmä*.

13.7. Osoita, että $\mathrm{E}(n)$ on ryhmä.[7]

Olkoon H ryhmän G aliryhmä ja N ryhmän G normaali aliryhmä siten, että $G = NH$, $N \lhd G$ ja $N \cap H = \{\mathrm{id}\}$. Tällöin G on ryhmien N ja H *sisäinen puolisuora tulo*, jolloin käytetään merkintää $G = N \rtimes H$.[a]
Jos $\widetilde{N} \cong N$ ja $\widetilde{H} \cong H$ ja $G = N \rtimes H$, niin G on ryhmien $\widetilde{N}$ ja $\widetilde{H}$ *(abstrakti) puolisuora tulo*, $G \cong \widetilde{N} \rtimes \widetilde{H}$.

[a] Merkintä ei ole symmetrinen. Merkki $\rtimes$ sisältää normaalin aliryhmän merkin $\lhd$. Muistisääntö auttaa: $N \lhd N \rtimes H$, siis kolmiot ovat samoin päin merkeissä $\lhd$ ja $\rtimes$.

[3] Tarkastele viimeisessä kysymyksessä ensin tapaus $n = 2$.
[4] Katso Esimerkki 13.8 ja Propositio 9.35.
[5] Mikä on *luonnollinen* kuvaus väitteen ryhmien välillä?
[6] Mieti tilannetta geometrisesti ja osoita, että ryhmässä Γ_K^+ on riittävän monta alkiota.
[7] Kätevintä lienee osoittaa, että $\mathrm{E}(n) \leq \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$.

13.8. Osoita, että $\mathrm{T}(n) \lhd \mathrm{E}(n)$ ja että $\mathrm{E}(n)/\mathrm{T}(n) \cong \mathrm{O}(n)$ ja että $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n) \rtimes \mathrm{O}(n)$.

13.9. Osoita, että $\mathrm{O}(n)$ ei ole ryhmän $\mathrm{E}(n)$ normaali aliryhmä.

13.10. Osoita, että S_n on ryhmien A_n ja $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ puolisuora tulo.

Osa IV

Galois'n teoriaa

Luku 14

Kuntalaajennuksista

Tässä luvussa pohjustamme Galois'n teorian perusteiden käsittelyä. Laajennamme kuntalaajennuksen käsitteen vastaamaan paremmin esimerkiksi Luvussa 7.6 tarkastellun polynomirenkaiden avulla tehtävän kuntakonstruktion tarpeita.

14.1 Kuntalaajennukset

Harjoitustehtävän 4.18 nojalla kiinnitetyn kunnan kaikkien alikuntien leikkaus on kunta.

Kunnan F *alkukunta* on sen kaikkien alikuntien leikkaus.

Seuraus 14.1. *Olkoon F kunta. Jos $\chi(F) = 0$,[1] niin kunnan F on alkukunta on isomorfinen rationaalilukujen kunnan $\mathbb{Q}$ kanssa. Jos $\chi(F) = p$ on alkuluku, niin kunnan F alkukunta on isomorfinen kunnan $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kanssa.* □

Esimerkki 14.2. (a) Kuntien $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ alkukunta on $\mathbb{Q}$.

(b) Jos F on äärellinen kunta, niin $\#F = p^n$ jollain alkuluvulla p ja jollain positiivisella kokonaisluvulla n. Tällöin $\chi(F) = p$, joten kunnan F alkukunta on isomorfinen kunnan $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kanssa.

Laajennamme luvussa 4.2 annettua kuntalaajennuksen määritelmää abstraktimmaksi:

Olkoot E ja F kuntia. Kuntahomomorfismi $i\colon F \to E$ on kunnan F *kuntalaajennus* ja E on kunnan F kuntalaajennus homomorfismilla i.

Jatkossa *kuntalaajennus*[a] E/F tarkoittaa kunnan F kuntalaajennusta E.

[a] Stewart [Ste] käyttää kuntalaajennukselle E/F merkintää $E : F$.

Proposition 4.7 nojalla kuntahomomorfismi $i\colon F \to E$ on injektio ja $i(F) \subset E$ on alikunta. Yleensä homomorfismin i roolia ei korosteta vaan samastetaan F ja $i(F)$ ja

[1] Katso Luku 3.5.

ajatellaan laajennusta kuten luvussa 4.2. Nyt käyttöön otettu abstraktimpi määritelmä antaa yksinkertaisen tavan muotoilla Lause 7.37:

Lause 14.3. *Olkoon K kunta ja olkoon $P(X) \in K[X]$ jaoton polynomi. Tällöin kunta $k = K[X]/(P(X))$ on kunnan K laajennus. Polynomilla $P(Y) \in k[Y]$ on juuri.* □

Jos E/F on kuntalaajennus ja $P(X) \in F[X]$, niin $P(X) \in E[X]$. Jos Polynomilla $P(X) \in E[X]$ on juuri, niin *polynomilla $P(X) \in F[X]$ on juuri laajennuksessa E/F.*

Proposition 4.10 nojalla kuntalaajennus E/F on F-vektoriavaruus.

Kuntalaajennuksen E/F dimensio F-vektoriavaruutena $[E : F] = \dim_F E$ on laajennuksen E/F *aste*.
Jos $\dim E_F < \infty$, niin E/F on *äärellinen laajennus*. Muuten se on *ääretön laajennus*.

Tällä kurssilla tarkastelemme lähinnä äärellisiä laajennuksia. Tutustumme kuitenkin joihinkin äärettömiin laajennuksiin esimerkiksi Luvuissa 14.4 ja 14.5

Esimerkki 14.4. Kompleksilukujen kunta $\mathbb{C}$ on kaksiulotteinen reaalinen vektoriavaruus, koska esimerkiksi 1 ja i muodostavat kannan. Siis $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.

Olkoon E/F kuntalaajennus. Kunnan E alikunta V, jolle pätee $F \subset V \subset E$ on laajennuksen E/F *välikunta*.

Propositio 14.5. *Jos V on kuntalaajennuksen E/F välikunta, niin*

$$[E : V][V : F] = [E/F]\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 14.1. □

Sisäkkäisten kuntien $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ jono on *(kuntalaajennus)torni*.

Seuraus 14.6. *Jos $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ on torni, niin*

$$[F_n : F_0] = \prod_{k=1}^{n} [F_k : F_{k-1}]\,.$$ □

14.2 Jaottomat polynomit ja kuntalaajennukset

Olkoon F kunta. Kurssin Renkaat ja kunnat huipentumana osoitetaan, että jokaisella jaottomalla polynomilla $P(X) \in F[X]$ on kunnan F kuntalaajennus $F[X]/(P(X))$,[2] jossa polynomilla $P(X)$ on juuri $\alpha = X + (P(X)) \in F[X]/(P(X))$:

$$P(\alpha) = P(X + (P(X)) = (P(X)) = 0\,.$$

[2]Tässä kuntalaajennuksessa kunta F samastetaan kunnan $F[X]/(P(X))$ alikunnan $\{aX^0 : a \in F\}$ kanssa, katso Lause 7.37.

Esimerkki 14.7. Polynomi $P(X) = X^2+1 \in \mathbb{Q}[X]$ on jaoton, koska $P(x) = x^2+1 \geq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{Q}$. Lauseen 7.37 nojalla

$$P\big(\pm X + (P(X))\big) = (P(X)) = 0 \in \mathbb{Q}[X]/(P(X))\,,$$

joten polynomilla $P(X)$ on kaksi juurta $\pm\alpha = \pm X + (P(X)) \in E = \mathbb{Q}[X]/P(X)$. Siis $P(X) = (X-\alpha)(X+\alpha) \in E[X]$.[3]

Seuraava tulos tarjoaa selityksen sille, että kuntalaajennuksen E/F dimensiota F-vektoriavaruutena kutsutaan laajennuksen asteeksi.

Propositio 14.8. *Olkoon F kunta. Olkoon $P(X) \in F[X]$ jaoton polynomi ja olkoon*

$$\alpha = X + (P(X)) \in E = F[X]/(P(X))\,.$$

Tällöin $\mathscr{K} = \big(1, \alpha, \ldots, \alpha^{\deg P(X)-1}\big)$ on F-vektoriavaruuden E kanta. Erityisesti

$$\big[F[X]/(P(X)) : F\big] = \deg P(X)\,.$$

Todistus. Polynomien jakoyhtälön[4] nojalla jokaisella tekijärenkaan $F[X]/(P(X))$ alkiolla $Q(X)+(P(X)) \in F[X]/(P(X))$ on edustaja $\overline{Q}(X)$, jolle pätee $\deg \overline{Q}(X) < d = \deg P(X)$. Voimme siis olettaa, että $Q(X) = \sum_{j=0}^{d-1} a_j X^j$ joillain $a_0, a_1, \ldots, a_{\deg P(X)-1} \in F$. Tällöin

$$Q(X) + (P(X)) = \sum_{j=0}^{d-1} a_j X^j + (P(X)) = \sum_{j=0}^{d-1} a_j (X + (P(X)))^j = \sum_{j=0}^{d-1} a_j \alpha^j\,.$$

Siis $\mathscr{K}$ on virittää F-vektoriavaruuden E.

Jos joillain $b_0, b_1, \ldots, b_{d-1} \in F$ pätee

$$0 = \sum_{j=1}^{d-1} b_j \alpha^j = \sum_{j=1}^{d-1} b_j X^j + (P(X))\,,$$

niin $P(X) \,\big|\, \sum_{j=0}^{d-1} b_j X^j$. Koska $d-1 < d = \deg P(X)$, päättelemme, että $\sum_{j=0}^{d-1} b_j X^j = 0$, joten $b_0 = b_1 = \cdots = b_{d-1} = 0$. Siis $\mathscr{K}$ on lineaarisesti riippumaton. □

Osassa II käytetty kokonaisalueen jaottoman alkion määritelmä soveltuu hyvin kuntakertoimisiin polynomirenkaisiin. Jos polynomirenkaan kerroinrengas ei ole kunta, määrittelemme jaottoman polynomin käsitteen erikseen. Esimerkiksi $2X \in \mathbb{Z}[X]$ ei ole jaoton yleisen määritelmän nojalla, sillä polynomirenkaan $\mathbb{Z}[X]$ ainoat yksiköt ovat vakiopolynomit ± 1. Kuitenkaan emme halua ajatella, että vakiopolynomilla kertominen vaikuttaa jaottomuuteen.

Olkoon K kokonaisalue. Polynomi $P(X) \in K[X]$ on *jaoton polynomi*, jos ei ole polynomeja $A(X), B(X) \in K[X]$, joille $P(X) = A(X)B(X)$ ja $\deg A(X), \deg B(X) \geq 1$.

[3] Katso myös Esimerkki 7.38.

[4] Seuraus 6.12

Propositio 14.9 (Eisensteinin ehto)**.** *Olkoon K kokonaisalue ja olkoon $\mathscr{P} \subset K$ alkuideaali.*[5] *Olkoon $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$. Jos*

(1) $a_n \not\equiv 0 \mod \mathscr{P}$,

(2) $a_k \equiv 0 \mod \mathscr{P}$ *kaikilla* $0 \leq k \leq n-1$ *ja*

(3) $a_0 \not\equiv 0 \mod \mathscr{P}^2$,

niin $P(X) \in K[X]$ on jaoton.

Todistus. Olkoot $B(X) = \sum_{k=0}^{r} b_k X^k \in K[X]$ ja $C(X) = \sum_{k=0}^{s} c_k X^k \in K[X]$ siten, että $P(X) = B(X)C(X)$, missä $1 \leq r = \deg B(X) < n$ ja $1 \leq s = \deg C(X) < n$. Tarkastellaan vastaavia polynomeja , joiden kertoimet ovat kokonaisalueessa $K/\mathscr{P}$.[6] Oletuksen (2) nojalla

$$B(X)C(X) = (b_r c_s + \mathscr{P})X^n = (a_n + \mathscr{P})X^n \in (K/\mathscr{P})[X]\,.$$

Erityisesti $b_0 c_0 + \mathscr{P} = 0 \in K/\mathscr{P}$, joten $b_0 + \mathscr{P} = 0 \in K/\mathscr{P}$ tai $c_0 + \mathscr{P} = 0 \in K/\mathscr{P}$, koska $K/\mathscr{P}$ on kokonaisalue.

Oletetaan, että $b_0 + \mathscr{P} = 0 \in K/\mathscr{P}$. Olkoon

$$j = \min\{0 \leq k \leq r : b_k + \mathscr{P} \neq 0 \in K/\mathscr{P}\}\,.$$

Indeksi j on hyvin määritelty, koska $b_r + \mathscr{P} \neq 0 \in K/\mathscr{P}$ oletuksen (1) nojalla. Tällöin

$$b_j c_0 + \mathscr{P} = \sum_{k=0}^{j} b_k c_{j-k} + \mathscr{P} = a_j + \mathscr{P} = 0 \in K/\mathscr{P}\,,$$

joten $c_0 + \mathscr{P} = 0$, koska $K/\mathscr{P}$ on kokonaisalue. Siis $b_0, c_0 \in \mathscr{P} \subset K$, joten $a_0 = b_0 c_0 \in \mathscr{P}^2$, mutta tämä on ristiriidassa oletuksen (3) kanssa. □

Seuraus 14.10 (Eisensteinin ehto)**.** *Olkoon $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$. Jos jollekin alkuluvulle p pätee*

(1) $p \nmid a_n$,

(2) $p \mid a_k$ *kaikilla* $0 \leq k \leq n-1$ *ja*

(3) $p^2 \nmid a_0$,

niin $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ja $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ovat jaottomia polynomeja.

Todistus. Harjoitustehtävä 14.2. □

Esimerkki 14.11. Olkoon p alkuluku. Eisensteinin ehdon nojalla polynomit

$$X^5 + kpX + p \in \mathbb{Q}[X]$$

ovat jaottomia kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Esimerkiksi $X^5 - 4X + 2, X^5 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ ovat jaottomia. Samoin $X^d \pm p \in \mathbb{Q}[X]$ kaikilla $d \geq 1$ ja kaikilla alkuluvuilla p.

[5] Harjoitustehtävät 7.27-7.30.

[6] Katso Harjoitustehtävä

14.3 Osajoukon virittämä laajennus

Olkoon E/F kuntalaajennus. Kunnan F ja osajoukon $S \subset E$ *virittämä kunta* on[a]

$$F(S) = \bigcap \{K \subset E : F \cup S \subset K \text{ ja } K \text{ on kunta}\} .$$

Jos $S = \{\alpha\}$, niin $F(\alpha) = F(S)$ on *yksinkertainen laajennus.*

Kunnan E alikuntien K_1 ja K_2 *komposiittikunta.* [b] on

$$K_1 \vee K_2 = K_1(K_2) .$$

[a] Katso Harjoitustehtävä 4.18.

[b] Joskus käytetään yksinkertaisempaa, mutta ei välttämättä parempaa merkintää $K_1K_2 = K_1 \vee K_2$. Tässä käytetty merkintä on yhteensopiva hilojen merkintöjen kanssa, katso luku **??**.

Yleensä merkitään

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = F(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}) .$$

Lemma 14.12. *Olkoon E/F kuntalaajennus.*

(1) Jos $\alpha_1, \alpha_2 \in E$, niin $F(\alpha_1, \alpha_2) = F(\alpha_1)(\alpha_2)$.

(2) Jos $K_1 \subset E$ ja $K_2 \subset E$ ovat alikuntia, niin $K_1(K_2) = K_2(K_1)$.

Todistus. (1) Määritelmän nojalla $F(\alpha_1)$ on pienin laajennuksen E/F välikunta, joka sisältää alkion $\alpha_1 \in E$, joten erityisesti $\alpha_1 \in F(\alpha_1)$. Vastaavasti $F(\alpha_1)(\alpha_2)$ on pienin laajennuksen $E/F(\alpha_1)$ välikunta, joka sisältää alkion $\alpha_2 \in E$. Siis $F \subset F(\alpha_1)(\alpha_2)$ ja $\alpha_1, \alpha_2 \in F(\alpha_1, \alpha_2)$, joten $F(\alpha_1, \alpha_2) \subset F(\alpha_1)(\alpha_2)$.

Koska $F(\alpha_1, \alpha_2)$ on kunnan F laajennus, joka sisältää alkion α_1, määritelmästä seuraa $F(\alpha_1) \subset F(\alpha_1, \alpha_2)$. Toisaalta $F(\alpha_1, \alpha_2)$ on kunnan $F(\alpha_1$ laajennus, joka sisältää alkion α_2, joten määritelmästä seuraa $F(\alpha_1)(\alpha_2) \subset F(\alpha_1, \alpha_2)$.

(2) Harjoitustehtävä 14.3. □

Propositio 14.13. *Olkoon E/F kuntalaajennus ja olkoot $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$. Tällöin*

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{n} f_k \alpha_k}{\sum_{k=0}^{n} g_k \alpha_k} \ : f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in F, \ \sum_{k=0}^{n} g_k \alpha_k \neq 0 \right\} .$$

Todistus. Harjoitustehtävä 14.4. □

14.4 Algebralliset laajennukset

Olkoon E/F kuntalaajennus. Alkio $\alpha \in E$ on (F-)*algebrallinen*, jos on $P(X) \in F[X] - \{0\}$, jolle $P(\alpha) = 0$.

Jos α ei ole algebrallinen, niin se on *transkendenttinen.*

Kuntalaajennus E/F on *algebrallinen*, jos sen kaikki alkiot ovat algebrallisia.

Propositio 14.14. *Äärelliset kuntalaajennukset ovat algebrallisia.*

Todistus. Harjoitustehtävä 14.5. □

Polynomi $P(X) \in F(X)$ on *normalisoitu*,[a] jos sen korkeimman asteen kerroin on 1.

[a] Normalisoidusta polynomista käytetään myös nimityksiä *mooninen polynomi* tai *pääpolynomi*, englanniksi *monic polynomial*, ranskaksi *polynôme unitaire*, saksaksi *normiertes Polynom*.

Propositio 14.15. *Olkoon $\alpha \in E$ algebrallinen kuntalaajennuksessa E/F. Tällöin on yksikäsitteinen normalisoitu jaoton polynomi $P(X) \in F[X]$, jolle $P(\alpha) = 0$.*

Todistus. Olkoon $P(X) \in F[X]$ pienimmän asteen normalisoitu polynomi, jolle pätee $P(\alpha) = 0$. Jos $P(X) = Q(X)R(X)$ joillekin $Q(X), R(X) \in F[X]$, niin Proposition 6.8 nojalla $\deg Q(X) \leq \deg P(X)$. Koska F on kunta, voimme olettaa, että $Q(X)$ on normalisoitu. Jos $Q(\alpha) = 0$, niin minimaalisuusoletuksen nojalla $\deg Q(X) = \deg P(X)$, joten $\deg(P(X) - Q(X)) \leq \deg P(X)$. Mutta α on polynomin $P(X) - Q(X)$ juuri, joten minimaalisuusoletuksen nojalla $P(X) - Q(X) = 0$. Siis $P(X)$ on jaoton ja yksikäsitteinen. □

Olkoon $\alpha \in E$ algebrallinen kuntalaajennuksessa E/F. Normalisoitu jaoton polynomi $m_{\alpha,F}(X) \in F[X]$, jolle $m_{\alpha,F}(\alpha) = 0$, on alkion α *minimipolynomi*.
Algebrallisen luvun α *aste (kunnan F suhteen)* on $\deg_F \alpha = \deg m_{\alpha,F}(X)$.

Esimerkki 14.16. (a) Eisensteinin ehdon nojalla $X^d \pm p = m_{p^{\frac{1}{d}},\mathbb{Q}}(X)$. Toisaalta esimerkiksi $X - p^{\frac{1}{d}} = m_{p^{\frac{1}{d}},\mathbb{R}}(X)$.

(b) Lasku osoittaa, että

$$\prod_{\varepsilon_2,\varepsilon_3 \in \{\pm 1\}} (X + \varepsilon_2\sqrt{2} + \varepsilon_3\sqrt{3}) = X^4 - 10X^2 + 1\,.$$

Siis polynomilla $P(X) = X^4 - 10X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ on neljä irrationaalista juurta $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$, joten sillä ei ole rationaalisia juuria. On helppo tarkastaa, että $P(X)$ ei ole myöskään kahden toisen asteen rationaalikertoimisen polynomin tulo, joten se on jaoton polynomi. Siis $P(X)$ on algebrallisten lukujen $\varepsilon_2\sqrt{2} + \varepsilon_3\sqrt{3}$ minimipolynomi kaikilla $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{\pm 1\}$.

Propositio 14.17. *Olkoon E/F kuntalaajennus. Evaluaatiohomomorfismin*[7] *E_α rajoittuma alirenkaaseen $F[X]$ määrää isomorfismin $\Psi_\alpha \colon F[X]/(m_{\alpha,F}(X)) \to F(\alpha)$, jolle pätee $\Psi_\alpha(a + (m_{\alpha,F}(X)) = a$ kaikille $a \in F$ ja $\Psi_\alpha(X + (m_{\alpha,F}(X)))) = \alpha$.*

Todistus. Evaluaatiohomomorfismin $E_\alpha \colon E[X] \to E$ rajoittuma alirenkaaseen $F[X]$,

$$E_\alpha(P(X)) = P(\alpha)\,,$$

on homomorfismi, jonka ydin on ideaali $(m_{\alpha,F}(X))$. Renkaiden isomorfismilauseen[8] nojalla tekijäkuvaus $\Psi_\alpha \colon F[X]/(m_{\alpha,F}(X)) \to \Psi_\alpha(F[X]) \subset E$,

$$\Psi_\alpha(P(X) + (m_{\alpha,F}(X))) = P(\alpha)\,,$$

[7] Katso Esimerkit 3.21 ja 7.38.
[8] Lause 7.23.

on isomorfismi. Lisäksi kaikille $a \in F$ pätee $\Psi_\alpha(a + (P(X)) = E_\alpha(a) = a$ ja $\Psi_\alpha(X + (m_{\alpha,F}(X)))) = E_\alpha(X) = \alpha$.

Homomorfismin Ψ kuvajoukko on kunta Proposition 4.7 nojalla. Määritelmän nojalla $\Psi_\alpha(F[X]) = \{P(\alpha) : P(X) \in F[X]\} \subset F(\alpha)$, joten kunnan $F(\alpha)$ määritelmän nojalla $\Psi_\alpha(F[X]) = F(\alpha)$. □

Proposition 14.17 nojalla kaikki jaottoman polynomin juuret ovat algebrallisesti tasa-arvoisia.

Seuraus 14.18. *Olkoon E/F kuntalaajennus ja olkoot $\alpha, \beta \in E$ polynomin $P(X) \in F[X]$ juuria. Tällöin kunnat $F(\alpha)$ ja $F(\beta)$ ovat isomorfiset isomorfismilla, jonka rajoittuma kuntaan F on identtinen kuvaus.* □

Seuraus 14.19. *Olkoon $\alpha \in E$ algebrallinen kuntalaajennuksessa E/F. Tällöin*

$$F(\alpha) \cong F[X]/(m_{\alpha,F}(X))$$

ja

$$[F(\alpha) : F] = \deg_F \alpha\,.$$

Todistus. Seuraa Propositioista 14.17 ja 14.8. □

Propositio 14.20. *Olkoon $\alpha \in E$ algebrallinen kuntalaajennuksessa E/F ja olkoon $P(X)$ normalisoitu polynomi. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(1) $P(X) = m_{\alpha,F}(X)$.

(2) $P(X)$ alimman asteen polynomi, jolle $P(\alpha) = 0$.

(3) $P(X) \mid Q(X)$ kaikille $Q(X) \in F[X]$, joille $Q(\alpha) = 0$.

Todistus. Harjoitustehtävä 14.6. □

Lause 14.21. *Kuntalaajennus E/F on äärellinen, jos ja vain jos on algebralliset alkiot $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, joille $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.*

Todistus. Jos E/F on äärellinen laajennus, niin se on algebrallinen Proposition 14.14 nojalla. Sillä on siis äärellinen kanta $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, joka koostuu F-algebrallisista luvuista. Siis $E \subset F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset E$.

Oletetaan, että $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$ ovat algebrallisia alkioita, joille $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Koska α_k on F-algebrallinen , se on myös $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$-algebrallinen kaikilla $k \geq 2$. Lemman 14.12(1) ja Seurauksen 14.6 nojalla

$$[F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : F] = \Big(\prod_{k=2}^{n} [F(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})]\Big)[F(\alpha_1) : F] < \infty\,,$$

koska kaikki tulossa esiintyvät laajennukset ovat äärellisiä. □

Propositio 14.22. *Kuntalaajennuksen E/F algebralliset alkiot muodostavat kunnan E alikunnan.*

Todistus. Harjoitustehtävä 14.9. □

Kuntalaajennuksen $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ algebrallinen alkio on *algebrallinen luku*. Algebralliset luvut muodostavat *algebrallisten lukujen kunnan* $\overline{\mathbb{Q}}$.

Esimerkki 14.23. (a) Kokonaislukujen juuret kuten $\sqrt{2}$ ja i ovat algebrallisia lukuja, koska ne ovat polynomien $X^k - q \in \mathbb{Q}[X]$ juuria joillain kokonaisluvuilla $k \geq 1$ ja q.

(b) Useimmat reaali- ja kompleksiluvut kuten e ja π ovat transkendenttisia lukuja, katso esimerkiksi [Ste, Luku 24].

Propositio 14.24. *Olkoon $F \subset V \subset E$ kuntalaajennusten torni. Jos V/F on algebrallinen laajennus ja $\alpha \in E$ on V-algebrallinen, niin α on F-algebrallinen.*

Todistus. Olkoon $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \nu_k X^k \in V[X]$ siten, että $P(\alpha) = 0$. Lauseen 14.21 nojalla $F(\nu_1, \ldots, \nu_n)/F$ on äärellinen laajennus. Lisäksi $P(X) \in F(\nu_1, \ldots, \nu_n)[X]$, joten $\alpha \in E$ on $F(\nu_1, \ldots, \nu_n)$-algebrallinen alkio. Laajennus $F(\nu_1, \ldots, \nu_n)(\alpha)/F(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ on äärellinen Proposition 14.19 nojalla, joten

$$[F(\nu_1, \ldots, \nu_n)(\alpha) : F] = [F(\nu_1, \ldots, \nu_n)(\alpha) : F(\nu_1, \ldots, \nu_n)][F(\nu_1, \ldots, \nu_n) : F] < \infty\,.$$

Proposition 14.14 nojalla $F(\nu_1, \ldots, \nu_n)(\alpha)/F$ on algebrallinen laajennus, joten sen alkiot mukaanlukien $\alpha \in F(\nu_1, \ldots, \nu_n)(\alpha)$ ovat F-algebrallisia. □

Propositio 14.25. *$\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ on ääretön laajennus.*

Todistus. Harjoitustehtävä 14.11 □

Lause 14.26. *Algebrallisten lukujen kunta on algebrallisesti suljettu.*

Todistus. Seuraa Propositiosta 14.24. Harjoitustehtävä 14.12 □

14.5 Murtokunta

Käsittelemme tässä luvussa lyhyesti konstruktiota, joka yleistää rationaalilukujen kunnan muodostamisen kokonaisluvuista.

Olkoon K kokonaisalue. Määrittelemme ekvivalenssirelaation $\sim$ joukossa $K \times (K - \{0\})$ asettamalla $(a, b) \sim (c, d)$, jos ja vain jos $ad = bc$. Merkitsemme alkion (a, b) ekvivalenssiluokkaa $\frac{a}{b}$. Varustamme tulojoukon $K \times (K - \{0\})$ yhteenlaskulla

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$$

ja tekijöidensä kertolaskujen tulolaskutoimituksella

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd)\,.$$

Kokonaisalueen K laskutoimitusten assosiatiivisuudesta ja kommutatiivisuudesta seuraa, että nämä laskutoimitukset ovat assosiatiivisia ja kommutatiivisia. Samaan tapaan kuin rationaaliluvuille[9] voidaan osoittaa, että yllä määritellyt joukon $K \times (K - \{0\})$ laskutoimitukset ovat yhteensopivia ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa.

Kokonaisalueen K *murtokunta* on

$$\operatorname{Frac}(K) = K \times (K - \{0\})/\sim$$

varustettuna tekijälaskutoimituksilla

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \tag{14.1}$$

ja

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\,. \tag{14.2}$$

Propositio 14.27. *Kokonaisalueen murtokunta on kunta.*

Todistus. Tekijälaskutoimitukset ovat assosiatiivisia ja kommutatiivisia Proposition 2.8 nojalla. Kertolaskun distributiivisuus yhteenlaskun suhteen on helppo tarkastaa:

$$\frac{a}{b}\Big(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\Big) = \frac{a}{b}\Big(\frac{cf + de}{df}\Big) = \frac{acf + ade}{bdf} = \frac{acbf + aebd}{b^2df} = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} = \frac{a}{b}\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\frac{d}{e}\,.$$

Murtokunnan yhteenlaskun neutraalialkio on $\frac{0}{1} = 0$ ja kertolaskun neutraalialkio on $\frac{1}{1} = 1$. Lisäksi jokaiselle $\frac{a}{b} \in \operatorname{Frac}(K)$ pätee $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$ ja jokaiselle $\frac{a}{b} \in \operatorname{Frac}(K) - \{0\}$ pätee $\frac{b}{a} \in \operatorname{Frac}(K)$ ja $\frac{a}{b}\frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$. Murtokunta on siis kunta. □

Esimerkki 14.28. $\mathbb{Q} = \operatorname{Frac}\mathbb{Z}$.

Propositio 14.29. *Jos kunnalla k on alirengas, joka on isomorfinen kokonaisalueen K kanssa, niin kunnalla k on alikunta, joka on isomorfinen kokonaisalueen K murtokunnan kanssa.*

Todistus. Oletetaan, että $K \subset k$. Jokaisella $b \in K - \{0\} \subset k - \{0\}$ on käänteisalkio $b^{-1} \in k - \{0\}$. Kuvaus $\phi\colon \operatorname{Frac}(K) \to k$, $\frac{a}{b} \mapsto ab^{-1}$ on kuntahomomorfismi, sillä

$$\phi\Big(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\Big) = \phi\Big(\frac{ad + bc}{bd}\Big) = (ad + bc)(bd)^{-1} = ab^{-1} + cd^{-1} = \phi\Big(\frac{a}{b}\Big) + \phi\Big(\frac{c}{d}\Big)\,,$$

$$\phi\Big(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\Big) = \phi\Big(\frac{ac}{bd}\Big) = (ac)(bd)^{-1} = ab^{-1}cd^{-1} = \phi\Big(\frac{a}{b}\Big)\phi\Big(\frac{c}{d}\Big)$$

ja $\phi(\frac{1}{1}) = 1$. Proposition 4.7 nojalla ϕ on injektio ja $\phi(\operatorname{Frac}(K))$ on etsitty alikunta. □

Seuraus 14.30. *Kokonaisalueen K murtokunta on pienin kunta, joka sisältää isomorfisen kopion kokonaisalueesta K.*

Seuraus 14.31. *Jos k on kunta, niin kunnat k ja $\operatorname{Frac}(k)$ ovat isomorfisia.* □

[9] Katso [LP, Luku 3].

Olkoon F kunta. Kokonaisalueen[a] $F[X]$ murtokunta

$$F(X) = \operatorname{Frac} F[X]$$

on kunnan F *rationaalifunktioiden kunta.*

[a]Katso Propositio 6.8.

Nimestään huolimatta kunnan $K(X)$ alkiot eivät ole funktioita vaan algebrallisten lausekkeiden avulla muodostettuja algebrallisia olioita, joiden laskutoimitukset määritellään lausekkeilla (14.1) ja (14.2).

Propositio 14.32. *Olkoon F kunta. $F(X)/F$ on ääretön kuntalaajennus.*

Todistus. Kuvaus $a \mapsto \frac{a}{1}$ on selvästi kuntahomomorfismi kunnasta F kuntaan $F(X)$. Lisäksi joukko $\{X^k = \frac{X^k}{1} : k \in \mathbb{N}\} \subset F(X)$ on lineaarisesti riippumaton ääretön joukko. □

Rationaalifunktioiden kunta $F(X)$ ei ole kunnan F algebrallinen laajennus, koska esimerkiksi $X \in F(X)$ on transkendenttinen.

Harjoitustehtäviä

14.1. Todista Propositio 14.5.

14.2. Todista Seuraus 14.10.

14.3. Todista Lemma 14.12(2).

14.4. Todista Propositio 14.13.

14.5. Todista Propositio 14.14.

14.6. Todista Propositio 14.20.

14.7. Olkoon E/F kuntalaajennus. Olkoon $\alpha \in E$ F-algebrallinen. Osoita, että $-\alpha$ on F-algebrallinen ja että α^{-1} on algebrallinen, jos $\alpha \neq 0$.

14.8. Olkoon E/F kuntalaajennus. Olkoot $\alpha, \beta \in E$ F-algebrallisia alkioita. Osoita, että $\alpha + \beta$ ja $\alpha\beta$ ovat algebrallisia.[10]

14.9. Todista Propositio 14.22.

14.10. Olkoon E/F äärellinen kuntalaajennus ja olkoon $\alpha \in E - \{0\}$. Osoita, että kuvaus $x \mapsto \alpha x$ on F-vektoriavaruuden E lineaarinen bijektio. Olkoon A lineaarikuvauksen α matriisi jossain kannassa. Osoita, että α on matriisin A ominaisarvo.

14.11. Todista Propositio 14.25.

14.12. Todista Lause 14.26.

14.13. Osoita, että $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

[10]Luvun 14.4 tulokset auttavat tässä kohdassa.

Kirjallisuutta

[Arm] M. A. Armstrong. *Groups and symmetry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1988.

[Art] M. Artin. *Algebra*. Prentice Hall Inc., 1991.

[Ber] M. Berger. *Geometry I-II*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the French by M. Cole and S. Levy.

[DF] D. S. Dummit and R. M. Foote. *Abstract algebra*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, third edition, 2004.

[Ham] G. Hamel. Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y) = f(x) + f(y)$. *Math. Ann.*, 60(3):459–462, 1905.

[IR] K. Ireland and M. Rosen. *A classical introduction to modern number theory*, volume 84 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[Kna] A. W. Knapp. *Advanced algebra*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[LP] J. Lehrbäck and J. Parkkonen. Lukualueet. `http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA120.pdf`.

[Par] J. Parkkonen. Lukuteoria. `http://users.jyu.fi/~parkkone/Lukuteoria2024/Lukuteoria24.pdf`, 2024.

[Rot] J. J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.

[Ste] I. Stewart. *Galois Theory*. Chapman & Hall/CRC Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, third edition, 2004.

[War] S. Warner. *Modern algebra. Vols. I, II*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.