

Symboliset dynaamiset systeemit

Harjoitus 3, 20.11.2013

Olkoon A on transitiivinen.

1. Jos α on polku graafissa $\mathcal{G}(A)$, niin on polku β siten, että $\overline{\alpha\beta}$ on topologisen Markovin ketjun $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ jaksollinen piste.
2. Osoita, että jokainen avaruuden Ω_A epätyhjä symmetrinen sylinteri sisältää jaksollisen pisteen.
3. Osoita, että jonoavaruudet Σ_A ja Ω_A ovat äärettömiä.

Homeomorfismi (vastaavasti jatkuva kuvaus) $f: X \rightarrow X$ on *ekspansiivinen*, jos on $\delta > 0$ siten, että jos kaikille $n \in \mathbb{Z}$ (vastaavasti kaikille $n \in \mathbb{N}$) pätee $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$, niin $x = y$. Tällöin δ on systeemin *ekspansiivisuusvakio*.

4. Osoita, että symboliset dynaamiset systeemit ovat ekspansiivisia.

-
5. Olkoon $F: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ kuvaus

$$F(x) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2) \pmod{1}.$$

Osoita, että kaikki neliön $[0, 1]^2$ pisteet, joiden molemmat koordinaatit ovat rationaalisia, ovat jaksollisia pisteitä.

⁵Vihje: Kyyhkyslakkaperiaate. Luennolla osoitettiin, että F on bijektio.

Symbolic dynamical systems

Exercise 3, 20.11.2013

Let A be transitive.

1. If α is a walk in $\mathcal{G}(A)$, then there is a walk β such that $\overline{\alpha\beta}$ is a periodic point in $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$.
2. Show that each nonempty symmetric cylinder in Ω_A contains a periodic point.
3. Show that Σ_A ja Ω_A are infinite.

A homeomorphism (respectively a continuous map) $f: X \rightarrow X$ is *expansive* if there is some $\delta > 0$ such that if for all $n \in \mathbb{Z}$ (respectively all $n \in \mathbb{N}$) we have $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$, then $x = y$. If this holds, δ is an *expansiveness constant* of the system

4. Show that symbolic dynamical systems are expansive.

-
5. Let $F: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ be the mapping defined by

$$F(x) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2) \pmod{1}.$$

Show that all points in $[0, 1]^2$ whose both coordinates are rational are periodic points.

⁵Hint: The pidgeonhole principle. We saw in the lecture that F is a bijection.