

Symboliset dynaamiset systeemit

Harjoitus 1, 6.11.2013

Metrinen avaruus (X, d) on *ultrametrinen* avaruus, jos

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

kaikille $x, y, z \in X$.

1. Olkoon X ultrametrinen avaruus. Osoita, että kaikille $y \in B(x, r) \subset X$ pätee $B(y, r) = B(x, r)$.

2. Osoita, että jonoavaruuksien Σ_2 jonoavaruudet ovat ultrametrisiä avaruuksia.

3. Osoita, että jokaisella jonoavaruuden Σ_2 jonolla on suppeneva osajono. Tämä osoittaa, että metrinen avaruus Σ_2 on kompakti.

4. Osoita, että avaruudet Ω_2 ja Σ_2 ovat homeomorfiset. Tämä osoittaa, että metrinen avaruus Ω_2 on kompakti.

5. Anna esimerkki pisteestä $\alpha \in \Omega_{\{0,1\}}$, jonka rata on tiheä vasemmalla siirrolla σ .

³Vihje: Olkoon $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ ääretön jono. Tällöin äärettömän monelle n pätee $\omega_n(0) = 0$ tai äärettömän monelle n pätee $\omega_n(0) = 1$...

⁴Vihje: Miten kaksipuolinen jono kuvataan yksipuoliseksi jonoksi?

Symbolic dynamical systems

Exercise 1, 6.11.2013

A metric space (X, d) is an *ultrametric* space, if

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

for all $x, y, z \in X$.

1. Let X be an ultrametric space. Show that if $y \in B(x, r)$, then $B(y, r) = B(x, r)$.

2. Show that the sequence spaces

$$\Sigma_N = \{\omega: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}\}$$

and

$$\Omega_N = \{\omega: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}\}$$

endowed with the metric

$$d(\omega, \omega') = \sup_i \frac{\delta(\omega(i), \omega'(i))}{2^{|i|}}$$

are ultrametric spaces.

3. Show that each sequence of elements of Σ_2 has a convergent subsequence..

4. Show that the spaces Ω_2 ja Σ_2 are homeomorphic.

5. Give an example of an element $\alpha \in \Omega_{\{0,1\}}$ whose orbit under the shift σ is dense.

³Vihje: Let $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ be an infinite sequence. Then $\omega_n(0) = 0$ for infinitely many n or $\omega_n(0) = 1$ for infinitely many n ...

⁴Vihje: How do you map a doubly infinite sequence into a singly infinite sequence?