

Johdatus dynaamisiin systeemeihin

Harjoitus 6, 30.10.2013

1. Tee graafinen analyysi funktiolle $f: [-\pi, \pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \pi \cos x.$$

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva kuvaus. Osoita, että kuvauksen f kiintopisteiden joukko on suljettu.

3. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli ja olkoon $f: I \rightarrow I$ jatkuva kasvava funktio. Osoita, että jokaiselle $x \in I$ on kuvauksen f kiintopiste $p(x) \in I$, jolle pätee $f^k(x) \rightarrow p(x)$, kun $k \rightarrow \infty$.

4. Tarkasta luentojen esimerkin 8.6 väite, että kuvauksella F_μ on puoleensavetävä 2-jaksollinen rata, kun $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$. Kuvaile tämän radan vakaata joukkoa. Millaisen joukon muodostavat ne pisteet $x \in [0, 1]$, joille on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $f^N(x) = p_\mu$?

5. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja olkoot $f, g: I \rightarrow I$ sileitä. Osoita, että $S(f \circ g) < 0$, jos $Sf, Sg < 0$.

²Vihje: Voit olettaa, että X on euklidinen avaruus tavallisella metriikallaan. Yleisen tapauksen todistus menee samaan tapaan.

³Vihje: Osoita ensin, että jonolla $f^k(x)$ on raja-arvo.