

Johdatus dynaamisiin systeemeihin
Harjoitus 5, 23.10.2013

1. Olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva. Olkoon pisteen x rata tiheä metrisessä avaruudessa X . Osoita, että jokaisen pisteen $f^N(x)$, $N \in \mathbb{N}$, rata on tiheä, jos avaruudessa X ei ole eristettyjä pisteitä. Anna esimerkki tilanteesta, jossa pisteen x rata on tiheä mutta jonkin pisteen $f^N(x)$, $N \in \mathbb{N}$, rata ei ole tiheä.

2. Olkoon

$$[K] = \{[x] \in \mathbb{S}^1 : x \in K\}$$

E_3 -invariantti Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukon kuva ympyrällä $\mathbb{S}^1$. Olkoon $s: [K] \rightarrow \mathbb{S}^1$,

$$s\left(\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}\right]\right) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i/2}{2^i}\right] = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}\right].$$

Osoita, että s on hyvin määritelty jatkuva surjektio, joka ei ole injektio. Osana tätä osoita, että pisteillä, jotka ovat muotoa $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ on kaksi binääristä esitystä. Osoita, että

$$s \circ E_3 = E_2 \circ s.$$

3. Osoita, että isometria $f: X \rightarrow X$ ei ole topologisesti sekoittava.

4. Olkoon K Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukko ja olkoon $T_3: K \rightarrow K$,

$$T_3(x) = \begin{cases} 3x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Osoita, että dynaamisella systeemillä $T_3: K \rightarrow K$ on tiheä rata.

5. Osoita, että reaalilukujonolla $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on raja-arvo täsmälleen silloin, kun sen yläraja-arvo ja alaraja-arvo ovat samat.