

Johdatus dynaamisiin systeemeihin
Harjoitus 4, 16.10.2013

1. Olkoot $f: X \rightarrow X$ ja $g: Y \rightarrow Y$ jatkuvia kuvauksia ja olkoon g kuvauksen f topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $s: X \rightarrow Y$. Tällöin

- (1) s kuvaa kuvauksen f jaksolliset radat kuvauksen g jaksollisiksi radoiksi.
- (2) s kuvaa kuvauksen f tiheät radat kuvauksen g tiheiksi radoiksi.
- (3) jos f on topologisesti transitiivinen, niin g on topologisesti transitiivinen.

2. (a) Osoita, että kuvaus $f:]1, \infty[\rightarrow]1, \infty[, f(x) = x^2$, riippuu herkästi alkuarvoista.

(b) Osoita, että kuvaus $g:]0, 1[\rightarrow]0, 1[, g(x) = x^2$, ei riipu herkästi alkuarvoista.

(c) Osoita, että herkkä riippuvuus alkuarvoista ei välttämättä säily konjugoinnissa.

Olkoot $T_2, F_4: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ *telttakuvaus*

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{kun } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ja *logistinen kuvaus*

$$F_4(x) = 4x(1 - x).$$

3. Osoita, että kuvaus $h_1: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$h_1(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})$$

on homeomorfismi, joka konjugoi kuvaukset T_2 ja F_4 .

4. Etsi homeomorfismi $h_2: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, joka konjugoi kuvauksen F_4 ja toisen Tsebysevin polynomikuvauksen $P_2(x) = 2x^2 - 1$ rajoittuman välille $[-1, 1]$.

5. Osoita, että kuvaukset F_4 ja T_2 ovat kaoottisia.

⁴Vihje: ensimmäisen asteen polynomifunktio toimii.