

## Johdatus dynaamisiin systeemeihin

### Harjoitus 3, 9.10.2013

1. Osoita, että lauseke

$$d(f, g) = \max_{s \in [a, b]} |f(s) - g(s)|$$

on metriikka jatkuvien funktioiden avaruudessa  $C^0([a, b], \mathbb{R})$ .

2. Osoita, että  $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d)$  on täydellinen metrinen avaruus.

3. Olkoot  $(X, d_X)$  ja  $(Y, d_Y)$  metrisiä avaruuksia. Osoita, että lauseke

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

on metriikka joukossa  $X \times Y$ .

---

4. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Määritä differentiaaliyhtälön  $\dot{y} = Ay$  tyyppi.

(b) Konjugoi matriisi  $A$  yhteen konjugointilauseen antamista muodoista ja ratkaise vastaava differentiaaliyhtälö.

(c) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (1, 1) \end{cases}.$$

(d) Hahmottele differentiaaliyhtälön  $\dot{y} = Ay$  ratkaisuja muutamilla alkuarvoilla.

5. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hahmottele vektorikenttää  $f(x) = Ax$ . Osoita, että differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  ratkaisut ovat ellipsejä.

---

<sup>2</sup>Vihje: Kursilla Analyysi 3 todistettuja tuloksia ei pidä todistaa uudelleen.

<sup>4</sup>Vihje: Kuvien piirroksessa voi käyttää vaikka sopivaa Wolframin demonstraatiota tai jotain symbolisen/numeerisen laskennan ohjelmistoa.

<sup>5</sup>Vihje: Käytä lineaarialgebran tietoja.