

Johdatus dynaamisiin systeemeihin

Harjoitus 2, 2.10.2013

1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja olkoon $x_0 \in I$ funktion $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ kiintopiste. Osoita, että

(1) jos $|g'(x_0)| < 1$, niin on avoin g -invariantti väli $U \subset I$, joka sisältää pisteen x_0 siten, että pisteet $F^k(x)$ lähestyvät pistettä x_0 eksponentiaalisella nopeudella kaikille $x \in U$.

(2) jos $|g'(x_0)| > 1$, niin x_0 on lokaalisti hylkivä kiintopiste.

2. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja olkoon $x_0 \in I$ funktion $g \in C^3(I, \mathbb{R})$ superattraktiivinen kiintopiste. Osoita, että on jokin kiintopisteen x_0 ympäristö, jonka pisteet lähestyvät kiintopistettä x_0 supereksponentiaalisella nopeudella.

3. Olkoon I suljettu ja rajoitettu väli. Olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kolme kertaa jatkuvasi differentioituva. Oletetaan, että funktiolla f on nollakohta välillä I ja että sen derivaatalla ei ole nollakohtaa välillä I . Olkoon $F: I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Selitä kuvauksen F idea geometrisesti. Osoita, että on jokin väli $J \subset I$ siten, että $F|_J$ on kutistava kuvaus ja että $F^k(x)$ suppenee kohti funktion f nollakohtaa supereksponentiaalisella nopeudella.

4. Laske Newtonin menetelmän avulla luvun π likiarvo viiden desimaalin tarkkuudella. Perustele.

5. Olkoot $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + x^3, \\ f_2(x) &= x - x^3 \end{aligned}$$

ja

$$f_3(x) = x + x^2.$$

Piste 0 on kaikkien kuvausten f_1, f_2 ja f_3 kiintopiste. Kuvaile lähellä origoa olevien pisteiden käyttäytyminen näitä funktioita iteroitaessa?

²Vihje: Taylorin polynomi.