

Symboliset dynaamiset systeemit

Harjoitus 6, 11.12.2013

1. Olkoon $p \in \mathbb{R}^N$ positiivinen todennäköisyysvektori. Uskotaan, että mitta μ_p on määritelty kaikille avaruuden Σ_N Borel-joukoille. Tällöin pätee $\mu_p(A) \leq \mu_p(B)$ kaikille Borel-joukoille A ja B , joille $A \subset B$. Osoita, että $\mu_p(\{\omega\}) = 0$ kaikille $\omega \in \Sigma_N$.

Olkoon A transitiivinen siirtymämatriisi. Olkoon v matriisin A ominaisvektori ja olkoon f transpoosin A^T ominaisvektori maksimaalisella ominaisarvolla λ . Matriisi

$$(\pi^P(A))_{ij} = \frac{A_{ij}f_i}{\lambda f_j}$$

on *Parryn matriisi* ja sen avulla määritelty todennäköisyysmitta topologisille Markovin ketjuille Σ_A ja Ω_A on *Parryn mitta* μ^P .

2. Osoita, että Parryn matriisi on stokastinen matriisi.

3. Osoita, että $v_i f_i$ on Parryn matriisin ominaisarvoa 1 vastaava ominaisvektori.

4. Määritä matriisia $\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vastaava Parryn matriisi.

5. Määritä matriisia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vastaava Parryn matriisi $\pi^P(A)$. Määritä Parryn matriisin $\pi^P(A)$ ominaisarvoa 1 vastaava ominaisvektori ja Parryn mittaa vastaava massajakauma Markovin graafilla $\mathcal{G}(A)$.