

Symboliset dynaamiset systeemit
Harjoitus 4, 27.11.2013

1. Osoita, että transitiivisen siirtymämatriisin suurin ominaisarvo on aidosti suurempi kuin 1.

Määritellään kuvaus $\alpha: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ asettamalla

$$\alpha(\omega)(i) = \begin{cases} 1 - \omega(i), & \text{jos } \omega(j) = 1 \text{ kaikille } j < i, \\ \omega(i) & \text{muuten.} \end{cases}$$

Esimerkiksi siis $\alpha(\bar{0}) = 1\bar{0}$.

2. Osoita, että α on bijektio ja määritä sen käänteiskuvaus.

Osoita, että α kuvaa sylinterit $C_\alpha^{[0,k]}$ sylintereiksi.

Osoita, että α on homeomorfismi.

Osoita, että α on topologisesti transitiivinen.

Miten α liittyy kuvaukseen $x \mapsto x+1$, kun luonnolliset luvut esitetään 2-kantaisesti?

3. Olkoon

$$B_2 = \left\{ \omega \in \Omega_2 : \left| \sum_{i=m}^n (-1)^{\omega(i)} \right| \leq 2 \text{ kaikille } m, n \in \mathbb{Z}, m < n \right\}.$$

Osoita, että B_2 on σ -invariantti.

Osoita, että B_2 ei ole kahden symbolin topologinen Markovin ketju.

Symbolic dynamical systems

Exercise 4, 27.11.2013

1. Show that the maximal eigenvalue of a transitive transition matrix is strictly bigger than 1.

Let $\alpha: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ be the mapping

$$\alpha(\omega)(i) = \begin{cases} 1 - \omega(i), & \text{if } \omega(j) = 1 \text{ for all } j < i, \\ \omega(i) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For example $\alpha(\overline{0}) = \overline{10}$.

2. Show that α is a bijection and find its inverse.

Show that α maps cylinders to cylinders.

Show that α is a homeomorphism.

Show that α is topologically transitive.

What is the relation of α with the map $x \mapsto x + 1$ when natural numbers are written in base 2?

3. Let

$$B_2 = \left\{ \omega \in \Omega_2 : \left| \sum_{i=m}^n (-1)^{\omega(i)} \right| \leq 2 \text{ for all } m, n \in \mathbb{Z}, m < n \right\}.$$

Show that B_2 is σ -invariant.

Show that B_2 is not a topological Markov chain on two symbols.