

Johdatus dynaamisiin systeemeihin

Harjoitus 1, 25.9.2013

1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli. Olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Osoita, että kuvauksella f on kiintopiste,

- (a) jos $f(I) \subset I$ ja
- (b) jos $I \subset f(I)$.

Osoita esimerkkien avulla, että väliä koskevat oletukset ovat tarpeellisia.

Merkitsemme ympyrän $\mathbb{S}^1$ pisteitä kulmaparametrin $s \in \mathbb{R}$ avulla

$$[s] = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \in \mathbb{S}^1.$$

2. Olkoon $E_2: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ kulman kaksinkertaistava kuvaus, jonka lauseke kulmaparametrin $s \in \mathbb{R}$ avulla lausuttuna on

$$E_2([s]) = [2s].$$

- (a) Totea, että E_2 on hyvin määritelty ja että jokaisella pisteellä $p \in \mathbb{S}^1$ on täsmälleen kaksi alkukuvaa kuvauksella E_2 .
- (b) Osoita, että pisteet $[\frac{k}{2^n-1}] \in \mathbb{S}^1$ ovat jaksollisia kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Osoita, että muita jaksollisia pisteitä ei ole.
- (c) Anna esimerkkejä jaksollisista pisteistä, joiden jakso on 7, 15, 5, 9.
- (d) Onko kuvauksella E_2 jaksollisia pisteitä, joiden jakso on parillinen?
- (e) Osoita, että kuvauksen E_2 jaksollisten pisteiden joukko on tiheä.

Lisätehtävä lukuteorian alkeita taitaville: Osoita tarkastelemalla lukuja $2^n \bmod N$, että jokaisella parittomalla luonnollisella luvulla N on jokin N -jaksollinen piste $p_N \in \mathbb{S}^1$.

3. Olkoot $\rho > 0$ ja $\theta \in \mathbb{R}$. Olkoon $\phi_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\phi_t(x) = \rho^t \begin{pmatrix} \cos(\theta t) & -\sin(\theta t) \\ \sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

jokaiselle $t \in \mathbb{R}$. Osoita, että $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ on tason $\mathbb{R}^2$ virtaus. Kuvaile virtauksen $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ratoja.

¹Vihje: Analyysi 1