

Symboliset dynaamiset systeemit

Syksyn jälkimmäisellä kurssilla tarkastelemme symbolisia dynaamisia systeemejä sellaisenaan ja työkaluna muiden dynaamisten systeemien tutkimisessa. Kurssi kuuluu syventäviin opintoihin, esitiedoiksi riittää kurssi Johdatus dynaamisiin systeemeihin. Tämän kurssin oheismateriaaliksi sopivat johdatuskurssin lähteiden lisäksi esimerkiksi kirjat [BS], [KH], [Kit], [LM].

9. JONOAVARUUDET JA VASEN SIIRTO

Olkoon $\mathcal{A}$ äärellinen joukko, jossa on ainakin kaksi alkioita. Kutsumme joukkoa $\mathcal{A}$ *aakkostoksi* ja sen alkioita *symboleiksi* tai *kirjaimiksi*. Hyvin usein valitsemme $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, $N \geq 2$. Varustetaan joukko $\mathcal{A}$ diskreetillä metriikalla

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a \neq b \\ 0, & \text{jos } a = b. \end{cases}$$

Yksipuolinen jonoavaruus aakkostolle $\mathcal{A}$ on

$$\Sigma_{\mathcal{A}} = \Sigma_N = \{\omega: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}\} = \{a_0 a_1 a_2 \dots : a_i \in \mathcal{A} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}\}$$

ja *kaksipuolinen jonoavaruus* on

$$\Omega_N = \{\omega: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}\} = \{\dots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots : a_i \in \mathcal{A} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Varustetaan avaruudet Σ_N ja Ω_N metriikoilla

$$d_{\infty}(\omega, \omega') = \sup_i \frac{\delta(\omega(i), \omega'(i))}{2^{|i|}}.$$

Merkintöjen helpottamiseksi sovimme, että $\bar{a}_n$ on äärellinen sana $aa \dots a$, jossa symboli a esiintyy n kertaa ja että $\bar{a}$ on tarpeen mukaan joko vasemmalta, oikealta tai molemmista suunnista ääretön sana, jossa esiintyy ainoastaan symboli a . Yleisemmin, jos w on jokin äärellinen sana, $\bar{w}$ on tarpeen mukaan joko vasemmalta, oikealta tai molemmista suunnista ääretön sana, jossa toistuu äärellinen sana w äärettömän monta kertaa peräkkäin.

Lemma 9.1. *Avaruudet (Σ_N, d_{∞}) ja (Ω_N, d_{∞}) ovat ultrametrisiä avaruuksia.*

Todistus. Harjoitus 1. □

Ultrametrisyydestä seuraa helposti esimerkiksi se, että pallon jokainen piste on sen keskipiste.

Metriikoiden d_{∞} määritelmästä huomaamme, että kahden pisteen etäisyys jonoavaruuksissa on aina 2^{-i} jollain $i \in \mathbb{N}$. Siispä esimerkiksi avaruudessa Σ_N pätee

- $\bar{B}(\bar{0}, 1) = \Sigma_N$,
- $\{0a_1a_2 \dots : a_i \in \mathcal{A}\} = \bar{B}(0, r) = B(0, s)$ kaikilla $\frac{1}{2} \leq r < 1$ ja $\frac{1}{2} < s \leq 1$.
- $\{00a_2a_3 \dots : a_i \in \mathcal{A}\} = \bar{B}(0, r) = B(0, s)$ kaikilla $\frac{1}{4} \leq r < \frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{4} < s \leq \frac{1}{2}$.
- $\{\bar{0}_na_na_{n+1} \dots : a_i \in \mathcal{A}\} = \bar{B}(0, r) = B(0, s)$ kaikilla $2^{-n} \leq r < 2^{-n+1}$ ja $2^{-n} < s \leq 2^{-n+1}$.

Tämän havainnon yleistys antaa

Lemma 9.2. *Kaikki avaruuksien Σ_N ja Ω_N avoimet pallot ovat suljettuja palloja ja suljetut pallot ovat avoimia palloja.* □

Näillä keinoilla voidaan osoittaa seuraava tulos, joka kokoaa jonoavaruuksien topologiset perusominaisuudet.

Propositio 9.3. *Avaruudet (Σ_N, d_{∞}) ja (Ω_N, d_{∞}) ovat*

- (1) *kompakteja (erityisesti täydellisiä),*
- (2) *täysin epäyhtenäisiä,*
- (3) *ylinumeroituvia ja*
- (4) *perfektejä.*

Lisäksi kaikki avaruudet (Σ_N, d_∞) ja (Ω_N, d_∞) ovat homeomorfisia Cantorin joukon kanssa.

Todistus. Kohta (1) tehdään harjoituksissa. Kohta (2) seuraa siitä, että avaruudet ovat ultrametrisiä ja ylinumeroituvuus, kohta (3), on helppo osoittaa Cantorin diagonaalitodistuksella.

Osoitetaan ominaisuus (4) avaruudessa Σ_N , kaksipuolisten jonojen tapaus todistetaan samaan tapaan. Olkoon $\omega \in \Sigma_N$. Olkoon $\omega_n \in \Sigma_N$,

$$\omega_n(k) = \begin{cases} \omega(k) & \text{kaikilla } k \neq n \\ \omega(n) + 1 \pmod N, & \text{kun } k = n. \end{cases}$$

jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Nyt $d_\infty(\omega, \omega_n) = 2^{-n}$, joten $\omega_n \rightarrow \omega$, kun $n \rightarrow \infty$.

Homeomorfisuus Cantorin joukon kanssa seuraa abstraktisti kompaktiudesta, perfektiydestä ja täysin epäyhtenäisyydestä. Todistamme tämän väitteen konstruktiolla Esimerkissä 10.1. $\square$

Kuvauksia $\sigma: \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ ja $\sigma: \Omega_n \rightarrow \Omega_n$, jotka määritellään asettamalla

$$\sigma(\omega)(k) = \omega(k+1)$$

kaikille $k \in \mathbb{N}$ tai $k \in \mathbb{Z}$, kutsutaan *vasemmaksi siirroksi* tai *topologiseksi Bernoullin siirroksi*. Selvästi kaksipuolisen jonoavaruuden siirto on bijektio ja yksipuolisen jonoavaruuden siirto on surjektio.

Jonoavaruuden Σ_N osajoukko X on *siirtainvariantti*, jos $\sigma(X) \subset X$ ja jonoavaruuden Ω_N osajoukko X on *siirtainvariantti*, jos $\sigma(X) = X$. Jos X on jonoavaruuden siirtainvariantti osajoukko, niin $\sigma|_X$ määrää dynaamisen systeemin, jota kutsutaan *symboliseksi dynaamiseksi systeemiksi*.

Jos L -Lipschitz-kuvaus f on bijektio ja jos sen käänteiskuvaus on L -Lipschitz-kuvaus, niin f on L -biLipschitz-kuvaus.

Propositio 9.4. *Vasen siirto $\sigma: \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ on 2-Lipschitz-kuvaus. Vasen siirto $\sigma: \Omega_n \rightarrow \Omega_n$ on 2-biLipschitz-kuvaus.*

Todistus. Olkoot $\omega, \omega' \in \Sigma_N$ jonoja, joiden etäisyys on 2^{-k} . Tällöin siis $\omega|_{[0, k-1] \cap \mathbb{N}} = \omega'|_{[0, k-1] \cap \mathbb{N}}$ ja $\omega(k) \neq \omega'(k)$. Vastaavasti $\sigma(\omega)|_{[0, k-2] \cap \mathbb{N}} = \sigma(\omega')|_{[0, k-2] \cap \mathbb{N}}$ ja $\sigma(\omega)(k-1) \neq \sigma(\omega')(k-1)$, joten

$$d_\infty(\sigma(\omega), \sigma(\omega')) = 2^{-(k-1)} = 2 \cdot 2^{-k} = 2d_\infty(\omega, \omega').$$

Väite kaksipuolisille jonoille todistetaan samaan tapaan. $\square$

Olkoot $n = (n_1 < n_2 < \dots < n_K) \in \mathbb{N}^K$ tai $\subset \mathbb{Z}^K$ ja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K) \in \mathcal{A}^K$. Joukot

$$C_\alpha^m = \{\omega \in \Sigma_N : \omega(n_i) = \alpha_i\}$$

ja

$$C_\alpha^m = \{\omega \in \Omega_N : \omega(n_i) = \alpha_i\}$$

ovat *sylintereitä*.

Lemma 9.5. *Avaruuden Σ_N pallot ovat sylintereitä $C_\alpha^{[0, K] \cap \mathbb{N}}$. Avaruuden Ω_N pallot ovat symmetrisiä sylintereitä $C_\alpha^{[-K, K] \cap \mathbb{Z}}$. $\square$*

Todistus. Tämä on Lemman 9.2 edellä tehtyjen havaintojen suoraviivainen yleistys. $\square$

Lemma 9.6. *Sylinterit ovat avoimia ja suljettuja joukkoja.*

Todistus. Olkoon $X = \Sigma_N$ tai $X = \Omega_N$. Olkoon sylinteri C_α^n kuten edellä. Tällöin

$$C_\alpha^n = X - \bigcup_{j=1}^K \bigcup_{b \in \mathcal{A} - \{\alpha_j\}} \sigma^{-n_j} C_b^0.$$

Koska σ on jatkuva ja yhdiste on äärellinen, väite seuraa tästä havainnosta. $\square$

Diskreetin dynaamisen systeemin $f: X \rightarrow X$ n -jaksollisten pisteiden joukko on

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(f) = \{x \in X : f^n(x) = x\}.$$

Propositio 9.7. *Siirroille $\sigma: \Sigma_n \rightarrow \Sigma_N$ ja $\sigma: \Omega_n \rightarrow \Omega_N$ pätee $\#\mathcal{P}_n(\sigma) = N^n$. Molemmilla systeemeillä jaksollisten pisteiden joukko on tiheä.*

Todistus. Olkoon W_n niiden äärellisten sanojen joukko, joiden pituus on n . Selvästi $\#W_n = N^n$ ja pätee

$$\mathcal{P}_n = \{\bar{w} : w \in W_n\}.$$

Olkoon $\omega \in \Omega_N$ ja olkoon $w_n = \omega|_{[-n,n] \cap \mathbb{Z}}$. Selvästi $\bar{w}_n \rightarrow \omega$, kun $n \rightarrow \infty$. Koska $\bar{w}_n$ on jaksollinen, jaksollisten pisteiden tiheys seuraa kaksipuolisille jonoille. Yksipuolisten jonojen väite todistetaan vastaavalla tavalla. $\square$

Propositio 9.8. *Vasemmat siirrot $\sigma: \Sigma_n \rightarrow \Sigma_N$ ja $\sigma: \Omega_n \rightarrow \Omega_N$ ovat topologisesti sekoittavia.*

Todistus. Yksipuolisen jonoavaruuden tapaus on helppo: Jos $U \subset \Sigma_N$ on epätyhjä avoin joukko, niin U sisältää jonkin sylinterin $C_\alpha^{[0,M]}$ jollain $M \in \mathbb{N}$. Koska $\sigma^M(C_\alpha^{[0,M]}) = \Sigma_N$, niin pätee $\sigma^M(U) = \Sigma_N$, mistä väite seuraa.

Olkoot $U, V \subset \Omega_N$ epätyhjiä avoimia joukkoja. Tällöin U sisältää jonkin symmetrisen sylinterin $C_\alpha^{[-M_U, M_U]}$ ja V sisältää jonkin symmetrisen sylinterin $C_\beta^{[-M_V, M_V]}$ joillain $M_U, M_V \in \mathbb{N}$. Kun $n \geq n_0 = 2(\max(M_U, M_V) + 1)$, niin

$$\sigma^n(C_\alpha^{[-M_U, M_U]}) \cap C_\beta^{[-M_V, M_V]} = C_{\alpha \cup \beta}^{[-M_U - n_0, M_U - n_0] \cup [-M_V, M_V]}$$

on sylinteri, erityisesti siis epätyhjä joukko, joka sisältyy leikkaukseen $\sigma^n(U) \cap V$. $\square$

Lause 9.9. *Vasen siirto on kaoottinen dynaaminen systeemi.*

Todistus. Väite seuraa Propositioista 9.7 ja 9.8 ja johdatuskurssin Lauseesta 5.2. $\square$

10. KOODAAMINEN

Koodaamisella tarkoitetaan dynaamisen systeemin $f: X \rightarrow X$ liittämistä symboliseen dynaamiseen systeemiin jakamalla avaruus X osiin (yleensä äärellisen monen) $X_1, X_2, \dots, X_{N-1}$, joiden leikkaus on pieni, ja tarkastelemalla pisteiden $x \in X$ reittiä: Jos $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{N-1}$ ja $f^n(x) \in X_{a_n}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ tai $n \in \mathbb{N}$ (riippuen siitä, onko f bijektio vai ei), niin symbolien a_n muodostama jono on pisteen x reitti.

Yleisessä tapauksessa voidaan joutua monenlaisiin vaikeuksiin: Pisteen reitti ei ole yksikäsitteinen, jos joukot $X_1, X_2, \dots, X_{N-1}$ eivät ole erillisiä, ja toisaalta useammallakin eri pisteellä voi olla sama reitti. Seuraava esimerkki antaa onnistuneen koodauksen eli konjugaation symbolisen dynaamisen systeemin kanssa. Tällaisessa tilanteessa X on siis välttämättä homeomorfinen Cantorin joukon osajoukon kanssa.

Esimerkki 10.1. Tarkastellaan Esimerkin 1.5 telttakuvauksen T_3 rajoittumaa Cantorin joukkoon K . Olkoot $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ ja $I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$ ja olkoon $S: K \rightarrow \Sigma_2$ kuvaus, joka määritellään asettamalla $S(x)(i) = \lambda$, jos $T_3^i \in I_\lambda$. Nyt kuvaus S on hyvin määritelty, koska joukot I_0 ja I_1 ovat erillisiä.

Osoitamme, että S on bijektio. Se on injektio: Jos $S(x) = S(y)$, niin pisteet $T_3^n(x)$ ja $T_3^n(y)$ ovat samalla välillä I_0 tai I_1 kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos $a, b \in I_\lambda$, $\lambda \in \{0, 1\}$, niin

$$|T_3(x) - T_3(y)| = 3|x - y|,$$

joten

$$|T_3^n(x) - T_3^n(y)| = 3^n|x - y|.$$

Koska K on T_3 -invariantti, pätee $|T_3^n(x) - T_3^n(y)| \leq 1$ kaikilla n , mikä on ristiriita ellei $|x - y| = 0$. Siis $x = y$.

Kuvaus S on myös surjektio: Jokaisen välin $J \subset I_0 \cup I_1$ alkukuva koostuu kahdesta välistä, joista toinen on välin I_0 ja toinen välin I_1 osajoukko. Olkoon $\omega \in \Sigma_2$ ja olkoon jokaisella $n \geq 1$

$$\begin{aligned} I_{\omega(0)\omega(1)\dots\omega(n)} &= I_{\omega(0)} \cap T_3^{-1}I_{\omega(1)\dots\omega(n)} \\ &= I_{\omega(0)} \cap T_3^{-1}(I_{\omega(1)} \cap T_3^{-1}I_{\omega(2)\dots\omega(n)}) \\ &= I_{\omega(0)} \cap T_3^{-1}(I_{\omega(1)}) \cap T_3^{-2}(I_{\omega(2)}) \cap \dots \cap T_3^{-n}(I_{\omega(n)}) \end{aligned}$$

Välit $I_{\omega(0)\omega(1)\dots\omega(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ ovat sisäkkäisiä epätyhjiä kompakteja välejä, joten on $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{\omega(0)\omega(1)\dots\omega(n)}$. Konstruktion perusteella $S(x) = \omega$.

Kuvauksen S ja sen käänteiskuvauksen jatkuvuus tehdään harjoituksissa. Kuvaus S on Propositionissa 9.3 luvattu homeomorfismi.

Tarkastetaan vielä, että $S \circ T_3 = \sigma \circ S$. Olkoon $S(x) = \omega$. Tällöin

$$T_3(\{x\}) = T_3\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_3^{-n}(I_{\omega(n)})\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_3^{-n}(I_{\omega(n+1)}) = \{S^{-1}(\sigma(\omega))\},$$

mistä väite seuraa.

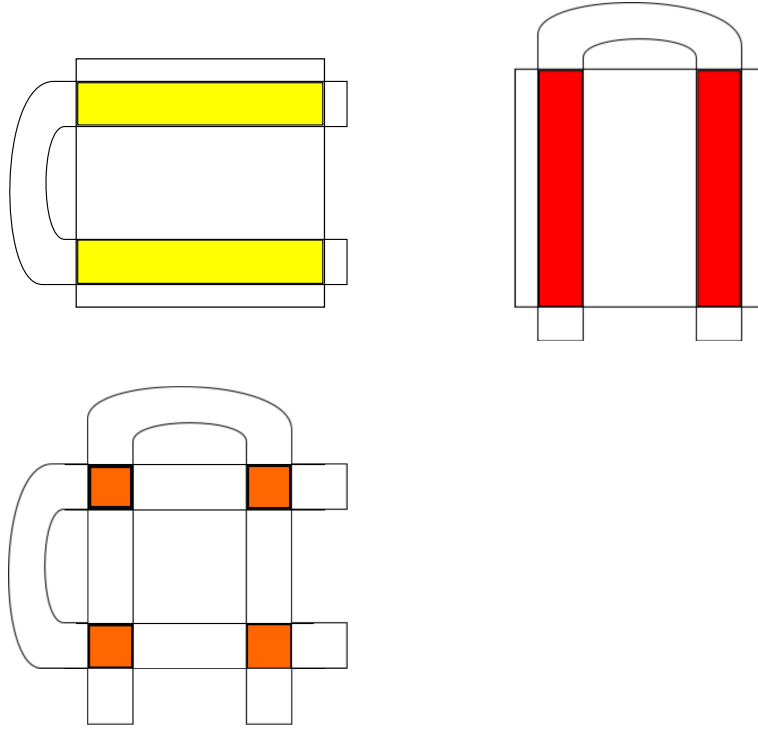
Seuraus 10.2. Olkoon $\lambda > 2$. Olkoon K_λ Cantorin $\frac{1}{\lambda}$ -joukko ja olkoon $T_\lambda: K_\lambda \rightarrow K_\lambda$ kuvaus

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ \lambda - \lambda x, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dynaaminen systeemi $T_\lambda: K_\lambda \rightarrow K_\lambda$ on kaoottinen. Lisäksi $\#\mathcal{P}_n(T_\lambda) = 2^n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Samalla tavalla voidaan osoittaa, että jokaisella $\mu > 4$ on epälineaarinen Cantorin joukko K'_μ siten, että logistisen funktion F_μ rajoittuma tähän joukkoon on topologisesti konjugaatti vasemman siirron $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ kanssa.

Esimerkki 10.3 (Smalen hevosenkenkä). Olkoon $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismi, jolla on seuraava ominaisuus: H kuvaa yksikköneliön $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ hevosenkengäksi, joka kulkee kaksi kertaa vaakasuoraan neliön I^2 läpi kuten kuvassa. Oletamme, että hevosenkenkä muodostetaan näin: Yksikköneliötä venytetään melko tasaisesti ensimmäisen koordinaatin suunnassa ja kavennetaan samaan tapaan toisen koordinaatin suunnassa. Näin saadun kaistaleen oikeanpuoleinen kolmannes leikkaa neliön I^2 alaosaa ja vasen kolmannes leikkaa sen yläosaa. Keskiosa taivutetaan niin, että syntyy hevosenkenkä. Täsmällisellä lausekkeella ei ole suurta merkitystä tarkastelemallemme dynamiikalle. Olkoot leikkauksen $I^2 \cap H(I^2)$ komponentit J_0 (alempi) ja J_1 (ylempi).



Kuvauksen H käänteiskuvaus on vastaavanlainen hevosenkenkä, jonka leikkaus neliön I^2 kanssa koostuu kahdesta pystysuuntaisesta kaistaleesta.

Oletetaan, että niillä osilla neliötä I^2 , jotka H kuvaa takaisin neliön I^2 sisään, H kutistaa etäisyyksiä toisen koordinaatin suunnassa vähintään vakiolla $\lambda < \frac{1}{3}$ ja vastaavasti niillä osilla, jotka H^{-1} kuvaa takaisin neliön I^2 sisään, H^{-1} kutistaa etäisyyksiä toisen koordinaatin suunnassa vähintään (samalla) vakiolla $\lambda < \frac{1}{3}$.

Kaistaleiden J_0 ja J_1 kuvat leikkaavat neliötä I^2 yhteensä neljässä vaakasuurassa kaistaleessa joukkojen J_0 sisällä siten, että sekä J_0 että J_1 sisältää palan kaistaleen J_0 kuvaa ja palan palan kaistaleen J_1 kuvaa. Positiivisilla iteraateilla H^n saadaan 2^{n+1} kaistaleita vastaavaan tapaan edellisen sukupolven kaistaleiden sisään samalla tavalla kuin esimerkissä 10.1. Neliön kuvat homeomorfismin H negatiivisilla iteraateilla muodostavat samanlaisen rakennelman pystysuoria sisäkkäisiä kaistaleita.

Huomaamme, että

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H^n(I^2) = [0, 1] \times K_1$$

ja

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H^{-n}(I^2) = K_2 \times [0, 1],$$

missä K_1 ja K_2 ovat homeomorfisia Cantorin joukon kanssa. Dynamiikan kannalta mielenkiintoisin joukko on

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H^n(I^2) = K_2 \times K_1,$$

joka on kompakti, täysin epäyhdenäinen perfetti joukko. Kuten esimerkissä 10.1 voidaan osoittaa, että pisteen $x \in K_2 \times K_1$ reitti antaa kuvauksen $S: K_2 \times K_1 \rightarrow \Omega_2$. Nyt liitämme jokaiseen pisteeseen x kuvauksen $S(x): \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ asettamalla jokaiselle $i \in \mathbb{Z}$ $S(x)(i) = \lambda$, jos $H^i \in J_\lambda$. Kuten esimerkissä 10.1 osoitetaan, että S on konjugoiva homeomorfismi dynaamisten systeemien $H_{K_2 \times K_1}: K_2 \times K_1 \rightarrow K_2 \times K_1$ ja $\sigma: \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ välillä.

11. TOPOLOGISET MARKOVIN KETJUT

Olkoon $\text{Mat}(n, m; K)$ K -kertoimisten $n \times m$ -matriisien joukko, missä K on jokin rengas esimerkiksi $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{Z}$. Olkoon $A = (A_{ij}) \in \text{Mat}(N, N; \mathbb{R})$ neliömatriisi, jonka rivit ja sarakkeet indeksoidaan symbolien $0, 1, \dots, N-1$ (yleisemmin aakkoston $\mathcal{A}$) avulla siten, että $A_{ij} \in \{0, 1\}$ kaikilla $i, j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Olkoot

$$\Omega_A = \{\omega \in \Omega_N : A_{\omega(i)\omega(i+1)} = 1 \text{ kaikilla } i \in \mathbb{Z}\}$$

ja

$$\Sigma_A = \{\omega \in \Sigma_N : A_{\omega(i)\omega(i+1)} = 1 \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}\}.$$

Selvästi Σ_A ja Ω_A ovat σ -invariantteja joukkoja. Kuvausten $\sigma|_{\Sigma_A}$ ja $\sigma|_{\Omega_A}$ määrittämiä dynaamisia systeemejä kutsutaan *topologiseksi Markovin ketjuiksi* tai (*yhden askeleen*) *äärellisen tyypin alisiirroiksi*. Matriisia A kutsutaan *siirtymämatriisiksi*.

Joissain patologisissa tilanteissa avaruudet Σ_A ja Ω_A voivat olla tyhjiä, esimerkiksi, kun $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pyrimme välttämään näitä tilanteita asettamalla matriisille A lisäehtoja, katso Esimerkki 11.6.

Käytämme avaruuksissa Σ_A ja Ω_A jonoavaruuksista Σ_N ja Ω_N indusoitua metriikkaa.

Lemma 11.1. *Joukot Σ_A ja Ω_A ovat jonoavaruuksien suljettuja siirtainvariantteja osajoukkoja. Jos Σ_A ja Ω_A eivät ole tyhjiä, niin ne ovat siis kompakteja metrisiä avaruuksia.*

Todistus. Harjoitus 2. □

Matriisia A ja vastaavia jonoavaruuksia Σ_A ja Ω_A voi havainnollistaa *Markovin graafilla* $\mathcal{G}(A)$. Se on suunnattu graafi, jonka kärjet ovat aakkoston $\mathcal{A}$ alkiot ja kärjestä $\alpha \in \mathcal{A}$ on *suunnattu sivu* eli *nuoli* kärkeen $\beta \in \mathcal{A}$ täsmälleen silloin, kun $a_{\alpha\beta} = 1$. Olkoot $V(\mathcal{G}(A))$ ja $E(\mathcal{G}(A))$ suunnatun graafin $\mathcal{G}(A)$ kärkien ja nuolien joukot.

Suunnatun graafin (*sallittu*) *polku* tai *kävely* on äärellinen tai ääretön jono kärkiä $v_i \in \mathcal{A}$, joille pätee $a_{v_i v_{i+1}} = 1$. Äärettömät kävelyt vastaavat siis jonoavaruuksien Σ_A ja Ω_A alkioita. Äärellisen kävelyn $a_0 a_1 a_2 \dots a_m$ *pituus* on m .

Jos emme halua viitata Markovin graafiin, sanomme kävelyä *sallituksi sanaksi*. Olkoon

$$\mathcal{W}_n(A) = \{\alpha_1 \dots \alpha_n : \alpha_i \in \mathcal{A} \text{ kaikilla } i \in [1, n] \text{ ja } A_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 1 \text{ kaikilla } i \in [1, n-1]\}$$

niiden matriisin A sallittujen sanojen joukko, joiden *pituus* on n . Huomaa, että sallittu sana, jonka pituus on n vastaa kävelyä, jonka pituus on $n-1$.

Esimerkki 11.2. (1) Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Markovin graafi on

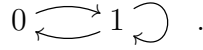
$$\begin{array}{c} \circlearrowleft 0 \longleftarrow 1 \circlearrowright \end{array}.$$

Kaksipuolinen jonoavaruus Ω_A koostuu kuvauksista $\mathbb{1}_{[-\infty, n]}: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$, ja nollakuvauksesta. Erityisesti Ω_A on numeroituva.

(2) Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Markovin graafi on

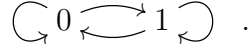


Kaksipuolinen jonoavaruus Ω_A on ylinumeroituva (Harjoitus 2).

(2) Matriisi

$$\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sallii kaikki kahden mittaiset sanat. Nyt siis $\Sigma_{\mathbb{1}_2} = \Sigma_2$ on *täysi siirto*. Vastaava Markovin graafi on



Lemma 11.3. *Matriisia A vastaavan Markovin graafin $\mathcal{G}(A)$ kärjestä i kärkeen j on $(A^m)_{ij}$ kävelyä, joiden pituus on m .*

Todistus. Olkoon $S(m, i, j)$ kärjestä i alkavien kärkeen j päättyvien sellaisten kävelyjen lukumäärä, joiden pituus on m . Markovin graafin määritelmän nojalla väite pätee, kun $m = 1$. Oletetaan, että $S(m, i, k) = (A^m)_{ik}$ kaikille $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ jollain $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Kävelystä, joka alkaa kärjestä i , päättyy kärkeen k ja jonka pituus on m saadaan kävely, joka alkaa kärjestä i , päättyy kärkeen j ja jonka pituus on $m+1$, jos ja vain jos $A_{kj} = 1$. Siispä

$$S(m+1, i, j) = \sum_{A_{jk}=1} S(m, i, k) = \sum_{k=0}^{N-1} S(m, i, k) A_{kj} = (A^{m+1})_{ik} . \quad \square$$

Propositio 11.4. $\#\mathcal{P}_n(\sigma|_{\Sigma_A}) = \#\mathcal{P}_n(\sigma|_{\Omega_A}) = \text{tr}(A^n)$.

Todistus. Olkoon $a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_0$ suljettu kävely. Tällöin

$$\sigma^n(\overline{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}) = \overline{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}$$

ja havaitsemme, että

$$\#\mathcal{P}_n = \sum_{i=0}^{N-1} S(n, i, i) .$$

Väite seuraa Lemmasta 11.3. $\square$

Jos on $n \in \mathbb{N}$ siten, että $A^n > 0$ (siis kaikki matriisin A^n kertoimet ovat positiivisia), niin A on *transitiivinen*. Lemman 11.3 nojalla matriisi on transitiivinen, jos ja vain jos jollain n on mistä tahansa kärjestä mihin tahansa kärkeen kävely, jonka pituus on n .

Jos kaikilla $i, j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ on $n \in \mathbb{N}$ siten, että $(A^n)_{ij} > 0$, niin A on *redusoitumaton*. Selvästi transitiiviset matriisit ovat redusoitumattomia. Jos A ei ole redusoitumaton, niin se on *redusoituva*. Redusoituvat matriisit voidaan karakterisoida permutaatiomatriisien avulla:

Lause 11.5. *Jos A on redusoituva, niin on permutaatiomatriisi P ja matriisit $B \in \text{Mat}(m, m; \mathbb{N})$, $C \in \text{Mat}(n-m, n-m; \mathbb{N})$ ja $D \in \text{Mat}(m, n-m; \mathbb{N})$, joille pätee*

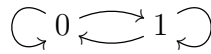
$$PAP^T = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} .$$

Todistus. [HJ, Thm. 6.2.24]. $\square$

Esimerkki 11.6. On helppo tarkastaa, että avaruudet Σ_A ja Ω_A sisältävät ainakin kaksi alkioita, jos A on redusoitumaton. Siis avaruudet Σ_A ja Ω_A voivat olla tyhjiä vain, jos A on redusoituva. Kuitenkin redusoituvaakin matriisia vastaavat jonoavaruudet voivat olla suuria esimerkiksi, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriisia A vastaava Markovin graafi koostuu kahdesta erillisestä kahden symbolin täyden siirron graafista.



Esimerkki 11.7. Matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on redusoitumaton mutta ei transitiivinen sillä

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 11.8. Jos A on transitiivinen, niin on $n \in \mathbb{N}$ siten, että $A^m > 0$ kaikilla $m \geq n$

Todistus. Oletetaan, että $A^\ell > 0$. Koska matriisin A jokaisella rivillä on ainakin yksi positiivinen kerroin eikä yhtään negatiivista, niin

$$(A^{\ell+1})_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}(A^\ell)_{kj} > 0. \quad \square$$

Propositio 11.9. Olkoon A transitiivinen ja olkoon α kävely graafissa $\mathcal{G}(A)$. Tällöin on polku β siten, että $\overline{\alpha\beta}$ on matriisia A vastaavan topologisen Markovin ketjun jaksollinen rata.

Todistus. Harjoitus 3 $\square$

Jos α on Markovin graafin $\mathcal{G}(A)$ polku ja C_α^n on avaruuden Σ_A sylinteri, niin joukko $C_\alpha^n(A) = C_\alpha^n \cap \Sigma_A$ on avaruuden Σ_A sylinteri ja vastaavasti, jos C on avaruuden Ω_A sylinteri, niin joukko $C_\alpha^n(A) = C_\alpha^n \cap \Omega_A$ on avaruuden Ω_A sylinteri, joka on tyhjä täsmälleen silloin, kun α ei ole sallittu sana. Sylinterit ovat siis avoimia ja suljettuja joukkoja.

Lemma 11.10. Olkoon A transitiivinen ja olkoon α kävely, jonka pituus on m graafissa $\mathcal{G}(A)$. Tällöin sylinterit $C_\alpha^{[n_0, n_0+m]}$ eivät ole tyhjiä. $\square$

Esimerkki 11.11. (1) Muiden kuin yhtenäisten sylinterien kanssa työskenteleminen on melko hankalaa koska avaruuden Σ_N tai Ω_N satunnaisesti valitun sylinterin leikkaus avaruuden Σ_A tai Ω_A kanssa voi olla tyhjä. Esimerkiksi, jos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

niin $C_{00}^{01}(A) = \emptyset$, koska

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Toisaalta $A^3 > 0$, joten kaikki sylinterit $C_{ab}^{03}(A)$, $a, b \in \{0, 1\}$, ovat epätyhjiä..

(2) Jos muutamme esimerkin (1) matriisin kertoimet A_{11} ja A_{22} nolliksi saamme matriisin

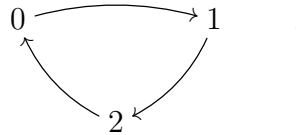
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

joka on myös transitiivinen mutta vasta A^5 on positiivinen.

(3) Permutaatiomatriisi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on redusoitumaton mutta ei transitiivinen. Sen jonoavaruudet Σ_P ja Ω_P ovat äärellisiä!



Lemma 11.12. *Avaruuden Σ_A pallot ovat sylintereitä $C_\alpha^{[0,K] \cap \mathbb{N}}(A)$. Erityisesti jokainen avaruuden Σ_A avoin epätyhjä joukko sisältää sylinterin $C_\alpha^{[0,K] \cap \mathbb{N}}$ jollekin kävelyllä α . Avaruuden Ω_N pallot ovat symmetrisiä sylintereitä $C_\alpha^{[-K,K] \cap \mathbb{Z}}(A)$. Erityisesti jokainen avaruuden Ω_A avoin epätyhjä joukko sisältää symmetrisen sylinterin $C_\beta^{[-K,K] \cap \mathbb{Z}}$ jollekin kävelyllä β .*

Todistus. Kuten Lemma 9.5. □

Propositio 11.13. *Jos A on transitiivinen, niin jokainen avaruuden Σ_A sylinteri sisältää jaksollisen pisteen ja jokainen avaruuden Ω_A symmetrinen sylinteri sisältää jaksollisen pisteen.*

Todistus. Harjoitus 3 □

Seuraus 11.14. *Jos A on transitiivinen, niin topologisten Markovin ketjujen $\sigma: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ ja $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ jaksolliset pisteet ovat tiheässä.* □

Propositio 11.15. *Jos A on transitiivinen, niin topologiset Markovin ketjut $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ ja $\sigma: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ ovat topologisesti sekoittavia, erityisesti siis topologisesti transitiivisia.*

Todistus. Osoitamme väitteen kaksipuolisten jonojen tapauksessa. Kuten Proposition 9.8 todistuksessa riittää tarkastella symmetrisiä sylintereitä $C_\alpha^{[-K,K]}(A)$ ja $C_\beta^{[-K,K]}(A)$. Koska matriisi A on transitiivinen, on $M \in \mathbb{N}$ siten, että $A^M > 0$. Eri-tyisesti siis $(A^\ell)_{\alpha_K \beta_{-K}} > 0$ kaikilla $\ell \geq M$, joten on kävely $w = \alpha_K \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_\ell \beta_{-K}$. Lemman 11.9 nojalla on jaksollinen piste, $\overline{ww'} \in C_\alpha^{[-K,K]}(A) \cap \sigma^n C_\beta^{[-K,K]}(A)$ sopi-
valla $n \in \mathbb{N}$. □

Seuraus 11.16. *Jos A on transitiivinen siirtymämatriisi, niin topologiset Markovin ketjut $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ ja $\sigma: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ ovat kaoottisia.*

Todistus. Koska käytämme vähintään kahta symbolia ja A on transitiivinen, niin jonoavaruudet Σ_A ja Ω_A ovat äärettömiä. Väite seuraa Seurauksesta 11.14, Propositioista 11.15 ja johdatuskurssin Lauseesta 5.2. $\square$

Samaan tapaan kuin Propositio 11.15 voidaan osoittaa

Propositio 11.17. *Jos A on redusoitumaton siirtymämatriisi, niin topologiset Markovin ketjut $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ ja $\sigma: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ ovat topologisesti transitiivisia.* $\square$

12. ARNOLDIN KISSAKUVAUS

Matriisin $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ määräämän lineaarikuvauksen $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dynamiikka on yksinkertaista: Lineaarikuvauksen L ominaisarvot ovat

$$\lambda_1 = \phi^2 = \phi + 1 \approx 2.618$$

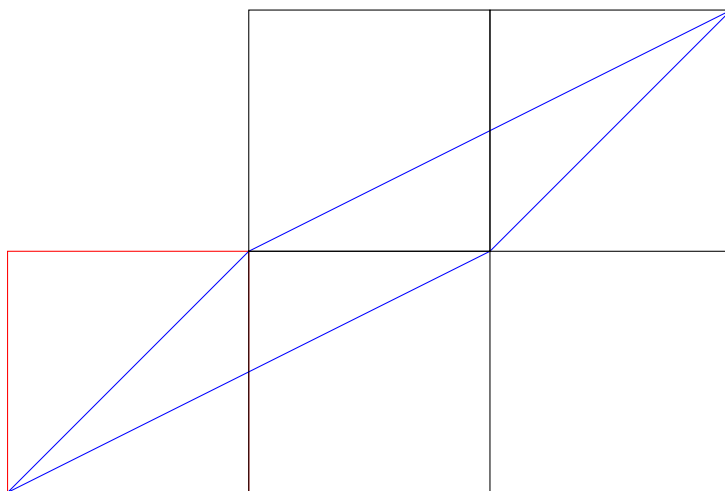
ja $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$, missä $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ on kultaisen leikkauksen luku. Vastaavat ominaisavaruudet ovat *epävakaa aliavaruus*

$$E^u = \mathbb{R}(1, \phi - 1) = \{(t, t(\phi - 1)) : t \in \mathbb{R}\}$$

ja *vakaa aliavaruus*

$$E^s = (E^u)^\perp = \mathbb{R}(-\phi + 1, 1).$$

Jos $x \in E^u$, niin $L^k x = \phi^{2k} x \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow -\infty$, ja jos $x \in E^s$, niin $L^k x = \frac{x}{\phi^{2k}} \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Jos $x \in \mathbb{R}^2 - (E^u \cup E^s)$, niin pisteen x rata sisältyy hyperbelin haaraan ja $\|L^k x\| \rightarrow \infty$, kun $k \rightarrow \pm\infty$.



KUVA 21. Yksikköneliön kuva kissakuvauksella

Olkoon $I^2 = [0, 1]^2$. Luvaus $\bar{L}: I^2 \rightarrow I^2$, $\bar{L}(x) = Lx \bmod 1$ on *Arnoldin kissakuvaus*. Kuvauksen L determinantti on 1, joten se säilyttää pinta-alan, ja pieni pohdinta näyttää, että $\bar{L}$ on itse asiassa bijektio, jonka käänteiskuvaus on $x \mapsto L^{-1}x \bmod 1$.

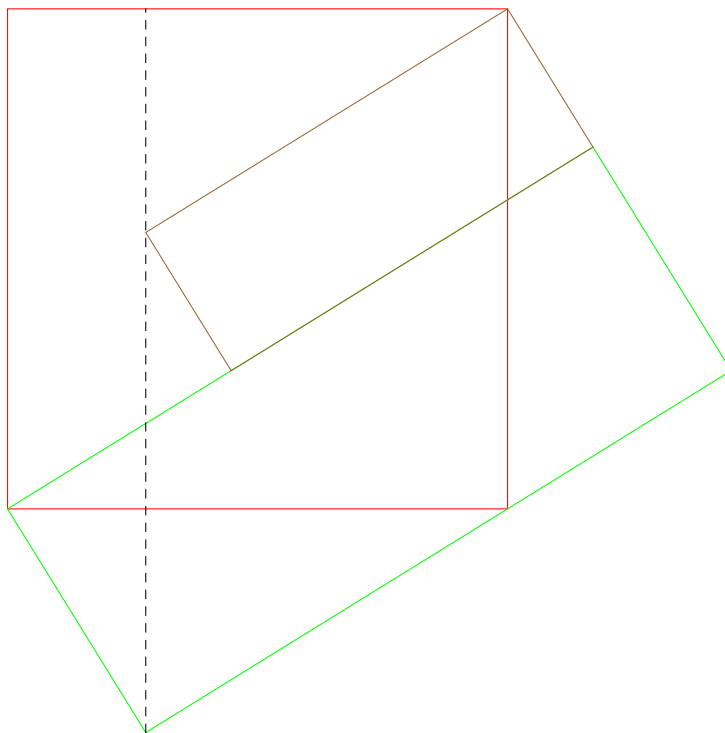
Kissakuvausta kannattaa ajatella hieman abstraktimmin. Määritellään tasossa ekvivalenssirelaatio $\sim$ asettamalla $x \sim y$, jos ja vain jos $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Tämän ekvivalenssirelaation ekvivalenssiluokat muodostavat tekijäjoukkona *toruksen* $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$, joka voidaan varustaa tekijämetriikalla

$$d_\sim(x, y) = \min\{d(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x} \in x, \tilde{y} \in y\}.$$

Ajattelemme kissakuvauksen kuvauksena $\bar{L}: \mathbb{R}^2\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\mathbb{Z}^2$. Kuvaus $\bar{L}$ on hyvin määritelty: jos $x - y \in \mathbb{Z}^2$, niin $Lx - Ly = L(x - y) \in \mathbb{Z}^2$ koska matriisin L kertoimet ovat kokonaislukuja. Kissakuvaus ja sen käänteiskuvaus ovat jatkuvia tekijämetriikan suhteen, kissakuvaus on siis toruksen homeomorfismi. Yleisemmin jokainen kokonaislukukertoaminen 2×2 -matriisi, jonka determinantti on 1 määrää tällaisen kuvauksen.

Kissakuvaus on topologisesti sekoittava ja sen jaksolliset pisteet ovat tiheässä (Harjoitus 3). Lisäksi 0 on ilmeisesti kiintopiste, joten L on kaoottinen kuvaus.

Kuvausta $\bar{L}$ kutsutaan kissakuvaukseksi koska sitä on perinteisesti havainnollistettu seuraamalla yksikköneliön piirretyn kissan kuvan muuttumista kuvauksessa. Wolfram Demonstrations -Projectin sivuilta voi löytää tämänhenkisen havainnollistuksen, jossa on käytetty Henri Poincarén kuvaa. Tällaiset demonstraatiot antavat yleensä virheellisen mutta viihdyttävän käsityksen, että $\bar{L}$ olisi jaksollinen kuvaus. Virhe johtuu siitä, että pisteet, joiden molemmat koordinaatit ovat rationaalisia, ovat kuvauksen $\bar{L}$ jaksollisia pisteitä ja havainnollistuksessa käytettävän kuvan pikselit ovat toki rationaalilukuja.



KUVA 22. Suorakulmiot R_1 ja R_2 .

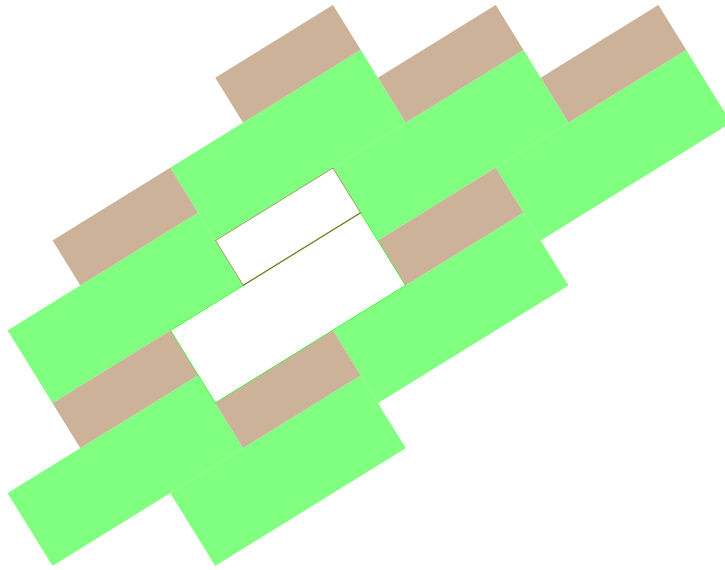
Koodaamme kissakuvauksen topologisen Markovin ketjun avulla. Yksikköneliö ei sovellu koodaukseen kovin hyvin, joten valitsemme kaksi suljettua suorakulmiota

- R_1 , jonka kärjet ovat $0, (\frac{5-\sqrt{5}}{10}, -\frac{1}{\sqrt{5}}), (1 + \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{5-\sqrt{5}}{10})$ ja $(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10})$ ja
- R_2 , jonka kärjet ovat $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{5-\sqrt{5}}{10}), (\frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}), (1, 1)$ ja $(\frac{5-\sqrt{5}}{10}, 1 - \frac{1}{\sqrt{5}})$.

Suorakulmioiden R_1 ja R_2 sivut ovat ominaisavaruuksien E^s ja E^u suuntaisia ja joiden yhdiste sisältää edustajan jokaisesta ekvivalenssiluokasta. Koska valitsemme suljetut suorakulmiot, joillakin pisteillä on kaksi edustajaa joukossa $R_1 \cup R_2$.

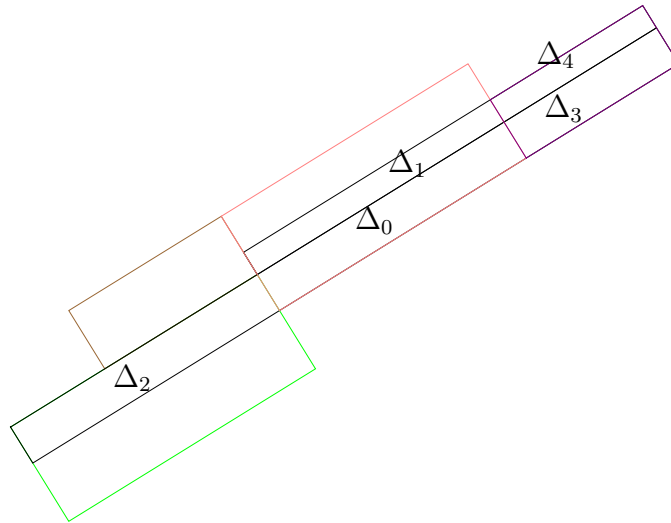
Jokaisella toruksen $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ pisteellä on vähintään yksi ja korkeintaan kolme edustajaa joukossa $R_1 \cup R_2$ ja voidaan tarkastaa, että joukon $R_1 \cup R_2$ siirrot kokonaislukuvektoreilla laatoittavat tason siten, että joukot $R_1 \cup (R_2 + k_1)$ ja $R_1 \cup (R_2 + k_2)$

ovat erillisiä tai niiden leikkaus sisältyy kahden affiinin suoran yhdisteeseen kaikilla $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2$.



KUVA 23. Tason laatoitus laatoilla $R_1 + k$ ja $R_2 + k$, $k \in \mathbb{Z}^2$.

Suorakulmiot R_1 ja R_2 sopivat hyvin yhteen kuvauksen L kanssa kuten näemme kuvassa 24. $L(R_1)$ leikkaa täsmälleen suorakulmioita R_1 , $R_1 + (1, 1)$ ja $R_2 + (2, 1)$.



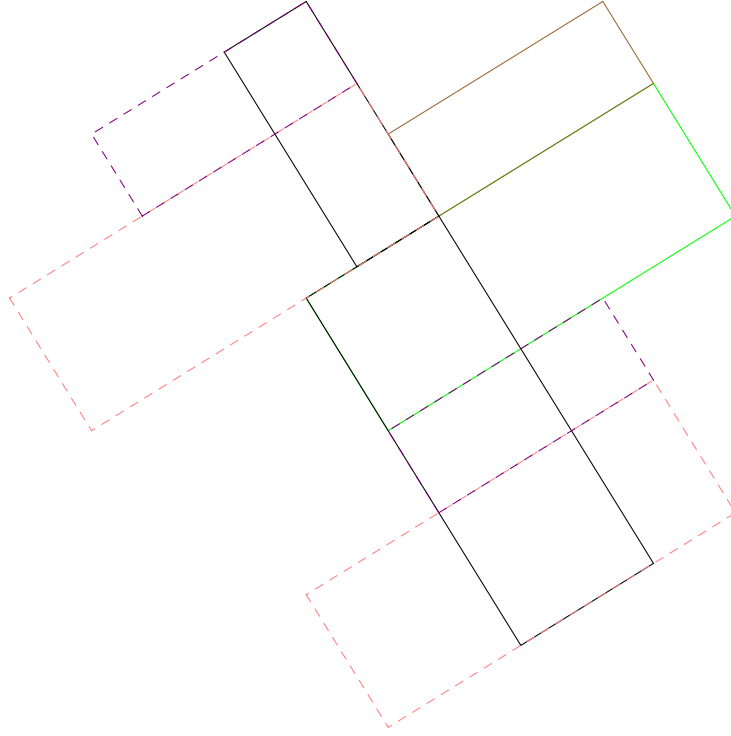
KUVA 24. Suorakulmioiden R_1 ja R_2 kuvautuminen kuvauksella L .

Koodaamista varten jaamme suorakulmion R_1 kolmeen ja suorakulmion R_2 kahteen osaan: Olkoot

$$\begin{aligned}\Delta_0 \cup \Delta_2 &= R_1 \cap \overline{L}R_1, \\ \Delta_1 &= R_1 \cap \overline{L}R_2, \\ \Delta_3 &= R_2 \cap \overline{L}R_1, \\ \Delta_4 &= R_2 \cap \overline{L}R_2.\end{aligned}$$

Laatat Δ_0 , Δ_1 ja Δ_2 jakavat laatan R_1 kolmeen viipaleeseen, jotka kulkevat laatan R_1 päästä päähän epävakaan aliavaruuden suuntaan ja laatat Δ_3 ja Δ_4 jakavat laatan R_2 kahteen vastaavanlaiseen viipaleeseen.

Myös käänteiskuvas L^{-1} on yhteensopiva laattojen R_1 ja R_2 kanssa vastaavalla tavalla.



KUVA 25. Suorakulmioiden R_1 ja R_2 kuvautuminen kuvauksella L^{-1} .

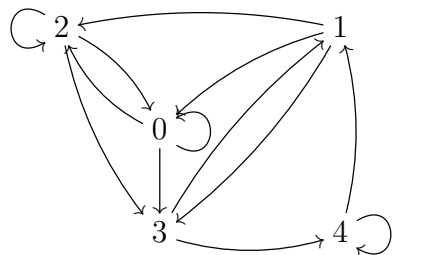
Reittikuvaus voidaan nyt määritellä kaikille pisteille, joiden rata ei leikkaa minäkään suorakulmion Δ_i reunaa ja saatavat koodit sisältyvät kaksipuoliseen jonoavaruuteen Ω_A matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Määritellään kuvaus $s: \Omega_A \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ asettamalla

$$s(\omega) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} L^{-n} \Delta_{\omega_n}.$$

Koska L kutistaa vakaa aliavaruuden suunnassa ja L^{-1} kutistaa epävakaan aliavaruuden suunnassa, niin s on jatkuva surjektio. Määritelmästä seuraa, että $s \circ \sigma = L \circ s$, joten s on semikonjugaatio.



13. PERRONIN LAUSE

Tässä luvussa todistamme lineaarialgebran tuloksen, joka on hyvin käyttökelpoinen symbolisessa dynamiikassa. Todistus yhdistää aineksia dynamiikasta, geometriasta ja lineaarialgebrasta.

Määritellään normi $\|\cdot\|_1$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja $\text{Mat}(n, n; \mathbb{R})$ asettamalla jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ ja $A \in \text{Mat}(n, n; \mathbb{R})$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{ja} \quad \|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|.$$

Olkoon

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1, x_i \geq 0 \text{ kaikilla } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikkösimpleksi. Simpleksin C sisuksen C° Hilbertin metriikka (katso esimerkiksi [dlH]) määritellään asettamalla kaikille $x \neq y \in C^\circ$

$$(24) \quad d(x, y) = \log \frac{(y - x_\partial)(y_\partial - x)}{(x - x_\partial)(y_\partial - y)},$$

missä pisteet x_∂ ja y_∂ ovat pisteiden x ja y kautta kulkevan suoran L_{xy} leikkauspisteet simpleksin C reunan kanssa siten, että ne ovat suoralla L_{xy} järjestyksessä $x_\partial, x, y, y_\partial$. Lausekkeen (24) arvo lasketaan käyttämällä jotain suoran L_{xy} affinia parametrizointia ja se on riippumaton parametrizoinnista. Jos $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ on affiinin suoran parametrizointi ja jos $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus, jonka ydin ei leikkaa suoraa L_{xy} , niin $B \circ \gamma$ on affiinin suoran parametrizointi. Tästä seuraa *kaksoisuhteen*

$$\frac{(y - x_\partial)(y_\partial - x)}{(x - x_\partial)(y_\partial - y)}$$

invarianssi tällaisilla lineaarikuvauksilla.

Lause 13.1 (Perronin lause). *Olkoon $A \in \text{Mat}(N, N; \mathbb{R})$ transitiivinen matriisi, jonka kertoimet eivät ole negatiivisia. Tällöin*

- (1) *matriisilla A on positiivinen ominaisvektori $v_{\max}$,*
- (2) *v_0 on matriisin A ainoa positiivinen ominaisvektori,*
- (3) *vektoria $v_{\max}$ vastaava ominaisarvo $\lambda_{\max}$ on positiivinen ja algebrallisesti yksinkertainen,*
- (4) *jos λ on jokin toinen matriisin A ominaisarvo, niin $|\lambda| < \lambda_{\max}$.*

Todistus. Aloitamme osoittamalla, että voimme olettaa, että A on positiivinen matriisi. Olkoon A transitiivinen. Tällöin on $n \in \mathbb{N}$, jolle $A^n > 0$. Oletetaan, että λ_0 on matriisin A geometrisesti yksinkertainen maksimaalinen ominaisarvo ja että v_0 on positiivinen ominaisvektori, joka virittää ominaisarvoa λ_0 vastaavan ominaisavaruuden. Oletetaan, että kaikille muille matriisin A^n ominaisarvoille λ pätee $|\lambda| < \lambda_0$. Nyt

$$A^n(Av_0) = A(A^n v_0) = A(\lambda_0 v_0) = \lambda_0 Av_0.$$

Siis $Av_0 > 0$ on matriisin A^n ominaisvektorina vektorin v_0 monikerta. Tällöin $\sqrt[n]{\lambda_n}$ on matriisin A maksimaalinen ominaisarvo ja $Av_0 = \sqrt[n]{\lambda_0} v_0$.

Oletetaan siis $A > 0$. Matriisi A määrää kuvauksen $\bar{A}: C \rightarrow C$ asettamalla

$$\bar{A}(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}.$$

Koska pätee

$$\begin{aligned} \frac{(By - (Bx)_\partial)((By)_\partial - Bx)}{(Bx - (Bx)_\partial)((By)_\partial - By)} &< \frac{(By - (Bx_\partial))((By_\partial) - Bx)}{(Bx - (Bx_\partial))((By_\partial) - By)} \\ &= \frac{(y - x_\partial)(y_\partial - x)}{(x - x_\partial)(y_\partial - y)}, \end{aligned}$$

niin kuvaus A on *heikosti kutistava* simpleksin C sisuksessa. Koska $\overline{A}(C) \subset C^\circ$ on kompakti, niin $\overline{A}|_{\overline{A}(C)}$ on K -kutistava jollain $K < 1$, joten sillä on yksikäsitteinen kiintopiste $v_{\max} \in C^\circ$ Banachin kiintopistelauseen (Lause 2.1) nojalla. Tämä vektori on ominaisvektori sillä

$$Av_{\max} = \overline{A}v_{\max} \|Av_{\max}\|_1 = v_{\max} \|Av_{\max}\|_1.$$

Olemme osoittaneet kohdat (1)–(3) lukuunottamatta ominaisarvon $\lambda_{\max}$ algebrallista yksinkertaisuutta.

Kohdassa (4) käydään läpi erilaiset vaihtoehdot, jotka muodostavat väitteen negaation ja johdetaan ristiriitoja. Oletetaan, että matriisilla A on ominaisarvo $\mu > \lambda_{\max}$. Olkoon u ominaisarvoa μ vastaava ominaisvektori. Koska $v_{\max}$ on positiivinen on $\epsilon > 0$ siten, että $w = v_{\max} + \epsilon u > 0$. Siispä alkuosan todistuksen nojalla vektorin $A^k(w)$ suunta lähestyy vektorin $v_{\max}$ suuntaa, kun $k \rightarrow \infty$. Toisaalta, koska $\mu > \lambda_{\max}$, vektorin $A^k(w)$ suunta lähestyy vektorin $v_{\max}$ suuntaa, kun $k \rightarrow \infty$. Tämä on ristiriita. Muut tapaukset eliminoidaan vastaavalla tavalla. Katso esimerkiksi [KH, Thm. 1.9.11].

Jos ominaisarvo $\lambda_{\max}$ ei olisi algebrallisesti yksinkertainen, niin Jordanin kanonisen muodon (Lause 4.9) nojalla on $u \in \mathbb{R}^n$, joka ei ole suoralla, jonka $v_{\max}$ virittää ja jolle pätee $Au = \lambda_{\max}(u + v_{\max})$. Valitaan jälleen $\epsilon > 0$ siten, että $w = v_{\max} + \epsilon u > 0$. Tällöin

$$A^k w = \lambda_{\max}^k ((1 - k\epsilon)v_{\max} - \epsilon u).$$

Kun $k \rightarrow \infty$, niin vektorin $A^k w$ suunta lähestyy siis vektorin $-v_{\max}$ suuntaa, mikä on mahdotonta. $\square$

Propositio 13.2. *Olkoon A transitiivinen siirtymämatriisi. Tällöin $\lambda_{\max}(A) > 1$.*

Todistus. Harjoitus 4. $\square$

Jos funktioille $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ pätee $\frac{f(n)}{g(n)} \rightarrow 1$, kun $n \rightarrow \infty$, merkitsemme $f \sim g$.

Seuraus 13.3. *Olkoon A transitiivinen siirtymämatriisi. Tällöin*

$$\#\mathcal{P}_n(\sigma|_{\Sigma_A}) = \#\mathcal{P}_n(\sigma|_{\Omega_A}) \sim \lambda_{\max}^n$$

kun $n \rightarrow \infty$.

Todistus. Matriisin jälki on sen ominaisarvojen summa kertaluvut huomioiden, katso esimerkiksi [HJ, Thm. 1.2.12] tai [Gre, §7]. Jos matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, niin matriisiin A^n ominaisarvot ovat $\lambda_1^n, \dots, \lambda_N^n$. Väite seuraa Propositionista 11.4 ja Perronin lauseesta. $\square$

Esimerkki 13.4. Siirtymämatriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat $\lambda_{\max} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ ja $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$, joten

$$\#\mathcal{P}_n(\sigma|_{\Sigma_A}) = \#\mathcal{P}_n(\sigma|_{\Omega_A}) \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

kun $n \rightarrow \infty$.

Olkoon $f: X \rightarrow X$ dynaaminen systeemi, jolle $\mathcal{N}(n) = \#\mathcal{P}_n(f)$ on äärellinen kaikille $n \in \mathbb{N}$. Dynaamisen systeemin $f: X \rightarrow X$ ζ -funktio on muodollinen potenssisarja

$$\zeta_f(t) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}(k)}{k} t^k,$$

Zetafunktio sisältää siis kaiken tiedon jaksollisten pisteiden lukumäärästä. Määritelmän nojalla on ilmeistä, että zetafunktio on konjugaatioinvariantti:

Propositio 13.5. *Jos $f: X \rightarrow X$ ja $g: Y \rightarrow Y$ ovat konjugaatteja dynaamisia systeemejä, joiden zetafunktio on määritelty, niin $\zeta_f = \zeta_g$.* $\square$

Lähtökohtaisesti zetafunktio on muodollinen potenssisarja mutta seuraava tulos osoittaa, että topologisen Markovin ketjun zetafunktio on itse asiassa rationaalifunktio.

Propositio 13.6. *Olkoon A siirtymämatriisi. Äärellisen tyypin alisiirtojen Σ_A ja Ω_A ζ -funktioille pätee*

$$\zeta_A(t) = \frac{1}{\det(I - tA)}.$$

Todistus. Olkoon A $N \times N$ -matriisi ja olkoot sen ominaisarvot $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, missä moninkertaiset ominaisarvot esiintyvät kertalukunsa ilmoittaman monta kertaa. Proposition 11.4 mukaan

$$\begin{aligned} \zeta_A(t) &= \exp \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N \frac{(\lambda_j t)^k}{k} = \exp \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_j t)^k}{k} \\ &= \exp \left(- \sum_{j=1}^N \log(1 - \lambda_j t) \right) = \prod_{j=1}^N (1 - \lambda_j t)^{-1}, \end{aligned}$$

koska

$$\log(1 - x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Väite seuraa tästä sillä matriisin determinantti on sen ominaisarvojen tulo. $\square$

Matriisin A karakteristinen polynomi on $\chi_A(s) = \det(sI - A)$. Olkoon d_A ominaisarvon 0 kertaluku, joka on 0, jos 0 ei ole matriisin A ominaisarvo ja olkoon $\chi_A(s) = s^{d_A} \chi_A^*(s)$. Oletetaan, että $\lambda_1 = \dots = \lambda_{d_A} = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} \chi_A^*(s) &= \prod_{i=d_A}^d (s - \lambda_i) = s^{N-d_A} \prod_{i=d_A}^d \left(1 - \frac{\lambda_i}{s}\right) = s^{N-d_A} \prod_{i=1}^d \left(1 - \frac{\lambda_i}{s}\right) \\ &= s^{N-d_A} \det\left(I - \frac{1}{s}A\right). \end{aligned}$$

Siis

$$\zeta_A(t) = \frac{1}{t^{N-d_A} \chi_A^*\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Esimerkki 13.7. Siirtymämatriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat $\lambda_{\max} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ ja $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$, joten

$$\zeta_A(t) = \det(I - tA)^{-1} = ((1 - t\phi)(1 + \frac{t}{\phi}))^{-1} = \frac{1}{1 - t - t^2}.$$

kun $n \rightarrow \infty$.

14. BLOKKIKOODIT

Tässä luvussa tarkastelemme topologisten Markovin ketjujen ja hieman yleisempien dynaamisten systeemien välisiä semikonjugaatioita ja konjugaatioita.

Jos $\sigma: X \rightarrow X$ ja $\sigma: Y \rightarrow Y$ ovat symbolisia dynaamisia systeemejä ja kuvaus $c: X \rightarrow Y$ on semikonjugaatio, sanotaan, että c on *koodi*. Injektiivistä koodia sanotaan *upotukseksi* ja bijektiivistä koodia sanotaan *isomorfismiksi*.

Esimerkki 14.1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$\mathcal{W}_2(A) = \{00, 01, 10\}$$

Määritellään kuvaus $\beta: \mathcal{W}_2(A) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ asettamalla

$$\beta(00) = 0, \quad \beta(01) = 1, \quad \text{ja} \quad \beta(10) = 2,$$

ja sen avulla kuvaus $\tilde{\beta}: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_3$ asettamalla

$$\tilde{\beta}(\omega)(i) = \beta(\omega(i)\omega(i+1))$$

Nyt siis $\tilde{\beta}(\bar{0}) = \bar{0}$, $\tilde{\beta}(1\bar{0}) = 2\bar{0}$, $\tilde{\beta}(01\bar{0}) = 12\bar{0}$ ja niin edelleen.

Kuvaus $\tilde{\beta}$ on jatkuva (Harjoitus 5) ja se kommutoi vasemman siirron kanssa: Koska $\sigma(\omega)(i) = \omega(i+1)$, pätee

$$\tilde{\beta} \circ \sigma(\omega)(i) = \beta(\omega(i+1)\omega(i+2)).$$

Toisaalta koska $\tilde{\beta}(\omega)(i) = \beta(\omega(i)\omega(i+1))$ kaikille i , niin

$$\sigma \circ \tilde{\beta}(\omega)(i) = \tilde{\beta}(\omega)(i+1) = \beta(\omega(i+1)\omega(i+2)).$$

Kuvaus $\tilde{\beta}$ myös injektio koska β on injektio. Kuvaus $\tilde{\beta}$ ei kuitenkaan ole surjektio, sillä konstruktioista seuraa, että symbolia 0 voi seurata vain 0 tai 1 koska seuraavan symbolin alkukuvan on oltava sana, joka alkaa symbolilla 0. Tekemällä vastaava tarkastelu muille symboleille saadaan $\tilde{\beta}(\Sigma_A) = \Sigma_B$ matriisille

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Olkoon

$$\mathcal{W}_n(X) = \{\omega(i)\omega(i+1)\cdots\omega(i+n-1) : \omega \in X\}$$

symbolisen dynaamisen systeemin $\sigma: X \rightarrow X$ niiden sallittujen sanojen joukko, joiden pituus on n . Oletetaan, että $X \subset \Omega_N$ jollain N . Olkoot $k, \ell \in \mathbb{N}$ siten, että $n = k + 1 + \ell$, $\mathcal{A}$ äärellinen aakkosto ja olkoon $\beta: \mathcal{W}_n(X) \rightarrow \mathcal{A}$ kuvaus. Kuvaus $\tilde{\beta}: X \rightarrow \omega_{\mathcal{A}}$, joka määritellään asettamalla

$$\tilde{\beta}(\omega)(i) = \beta(\omega(i-k)\omega(i-k+1)\cdots\omega(i)\cdots\omega(i+\ell)),$$

on (k, ℓ) -*blokkikoodi*. Jos taas $X \subset \Sigma_N$ jollain N , voidaan jokaiselle ℓ määritellä $(0, \ell)$ -blokkikoodi eli ℓ -blokkikoodi samalla tavalla kuin kaksipuolisille jonoavaruuksille. Jos $\mathcal{A} = \mathcal{W}_n(X)$ ja β on bijektio, niin $\tilde{\beta}$ on on *korkeampi blokkiesitys*.

Esimerkissä 14.1 kuvaus $\tilde{\beta}$ on 1-blokkikoodi ja topologisen Markovin ketjun Σ_A korkeampi blokkiesitys.

Lemma 14.2. *Blokkikoodit ovat koodeja.*

Todistus. Harjoitus 5. □

Propositio 14.3. *Korkeampi blokkiesitys on upotus.*

Todistus. Harjoitus 5. □

Propositio 14.4. *Olkoon X suljettu symbolinen dynaaminen systeemi ja olkoon $c: X \rightarrow Y$ koodi. Tällöin c on blokkikoodi.*

Todistus. Tarkastellaan kaksipuolisten jonojen tapausta. Olkoon $c: X \rightarrow Y$ koodi. Olkoon $\mathcal{A}$ aakkosto, jolle $Y \subset \Omega_{\mathcal{A}}$. Olkoon $\beta_0: X \rightarrow \mathcal{A}$ kuvaus $\beta_0(\omega) = c(\omega)(0)$. Kuvaus β_0 on jatkuva, koska se on jatkuvien kuvausten c ja $\omega' \mapsto \omega'(0)$ yhdistetty kuvaus.

Koska X on kompakti, niin β_0 on tasaisesti jatkuva, joten on $\ell \in \mathbb{N}$ siten, että $\beta_0(\omega_1) = \beta_0(\omega_2)$, jos $\omega_1|_{[-\ell, \ell]} = \omega_2|_{[-\ell, \ell]}$. Voimme siis määritellä kuvauksen $\beta: \mathcal{W}_{2\ell+1}(X) \rightarrow \mathcal{A}$ asettamalla $\beta(a_{-\ell} \cdots a_{\ell}) = \beta_0(\omega)$ mille tahansa $\omega \in X$, jolle $\omega|_{[-\ell, \ell]} = a_{-\ell} \cdots a_{\ell}$.

Kuvaus β määrää blokkikoodin $\tilde{\beta}: X \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}$, jolle pätee

$$\tilde{\beta}(\omega)(i) = \beta(\omega(i - \ell) \cdots \omega(i + \ell)) = c(\sigma^i \omega)(0) = \sigma^i \circ c(\omega)(0) = c(\omega)(i)$$

kaikille $\omega \in X$ ja kaikille $i \in \mathbb{Z}$. Siis $c = \tilde{\beta}$. □

Esimerkki 14.5 (Weissin parillinen systeemi). Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kuvauksen $\beta_0: \mathcal{W}_2(A) \rightarrow \{0, 1\}$ kuvaus

$$01 \mapsto 0, \quad 10 \mapsto 0, \quad 11 \mapsto 1$$

määräämä $(0, 1)$ -blokkikoodi $\tilde{\beta}$ ei ole injektio ($\tilde{\beta}(\overline{01}) = \tilde{\beta}(\sigma(\overline{01}))$) eikä surjektio. Kuvajoukko $\tilde{\beta}(\Sigma_A)$ koostuu jonoista, joissa esiintyy vain parillisen monta symbolia 0 peräkkäin. Se on σ -invariantti, koska $\tilde{\beta}$ kommutoi siirtojen kanssa: $\sigma(\tilde{\beta}(\omega)) = \tilde{\beta}(\sigma(\omega))$ kaikille $\omega \in \Sigma_A$. On helppo tarkastaa, että näin muodostettu systeemi ei ole topologinen Markovin ketju.

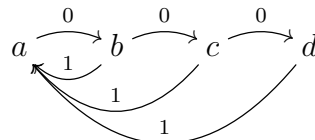
Blokkikoodia $\tilde{\beta}$ voi havainnollistaa *laputtamalla* Markovin graafin $\mathcal{G}(A)$ sivut symboleilla 0 ja 1:

$$0 \begin{matrix} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{0} \end{matrix} 1 \begin{matrix} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{0} \end{matrix} 1 \quad .$$

Yleisemmin, jos $\mathcal{G}(A)$ on Markovin graafi ja $\mathcal{A}$ on äärellinen aakkosto, niin kuvaus $L: \mathcal{W}_2(A) = E(\mathcal{G}(A)) \rightarrow \mathcal{A}$ on graafin $\mathcal{G}(A)$ *laputus*. Laputus määrää koodit $c_L: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_{\mathcal{A}}$ ja $c_L: \Omega_A \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}$

$$c_L(\omega)(i) = L(\omega(i)\omega(i+1)).$$

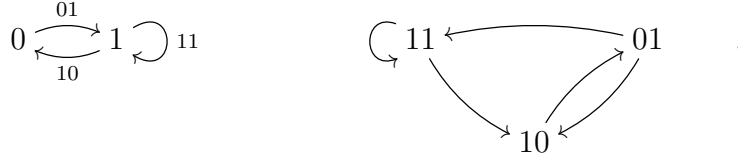
Esimerkki 14.6. Laputettu graafi



määrää kahden symbolin yksi- ja kaksipuoliset jonoavaruudet, joiden alkioissa 1 ei esiinny kahta kertaa peräkkäin ja nolla esiintyy korkeintaan kolme kertaa peräkkäin. Tällaisia ja muunmuassa vastaavalla tavalla laputetun kahdeksasta kärjestä muodostetun graafin avulla muodostettua jonoavaruutta on käytetty datan kirjoittamiseen magneettisille tallentimille kuten magneettinauhoille ja levyille.

Jonoavaruudessa Σ_A tai Ω_A määritelty 1-blokkikuvaus $\tilde{\beta}$ voidaan tulkita geometrisesti: Sallitut sanat, joiden pituus on 2 ovat Markovin graafin $\mathcal{G}_A$ suunnattuja sivuja. Määritellään Markovin graafin $\mathcal{G}(A)$ sivuilla indeksoitu matriisi B siten, että se kertoo, mitkä sivut voivat olla peräkkäin ja sen avulla muodostetun suunnatun graafin kärjet vastaavat siis graafin $\mathcal{G}_A$ sivuja. Graafissa $\mathcal{G}_B$ kärki a yhdistetään nuolella kärkeen b , jos ja vain jos kärkeä b vastaava nuoli voi seurata kärkeä a vastaavaa nuolta suunnatussa graafissa $\mathcal{G}_A$.

Esimerkin 14.1 tapauksessa



Näin muodostettua jonoavaruutta Σ_B tai Ω_B kutsutaan graafin $\mathcal{G}_A$ *sivusiirroksi* ja tässä yhteydessä jonoavaruutta Σ_A tai Ω_A kutsutaan graafin $\mathcal{G}_A$ *kärkisiirroksi*.

Yleistämme tämän: Äärellinen suunnattu multigraafi $\mathcal{G}$ koostuu äärellisen monesta kärjestä ja nuolesta. Jokainen nuoli e lähtee jostain kärjestä $o(e)$ ja päättyy johonkin kärkeen $t(e)$, joka voi olla sama kuin $o(e)$. Olkoon kärkien joukko V ja nuolien joukko E . Toisin kuin suunnatussa graafissa kuvaus $\Phi: v \mapsto (o(e), v(e))$ ei välttämättä ole injektio. Suunnatun multigraafin *naapurimatriisi* on $\#V \times \#V$ -matriisi A , jossa a_{ij} on parin (i, j) alkukuva kuvauksella Φ .

Määritellään multigraafin $\mathcal{G}$ sivuilla indeksoitu matriisi B siten, että se kertoo, mitkä sivut voivat olla peräkkäin. Graafissa $\mathcal{G}_B$ kärki a yhdistetään nuolella kärkeen b , jos ja vain jos kärkeä b vastaava nuoli voi seurata kärkeä a vastaavaa nuolta suunnatussa multigraafissa $\mathcal{G}$.

Edellä tulimme osoittaneeksi

Propositio 14.7. *Multigraafin $\mathcal{G}$ sivusiirto on isomorfinen topologisen Markovin ketjun kanssa. Jokainen topologinen Markovin ketju on isomorfinen sivusiirron kanssa.* $\square$

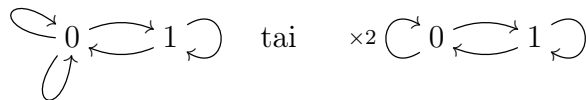
Esimerkki 14.8. (a) Täyden N -siirron multigraafi vastaa 1×1 -matriisia (N) .

$$\times N \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} 0$$

(b) Matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

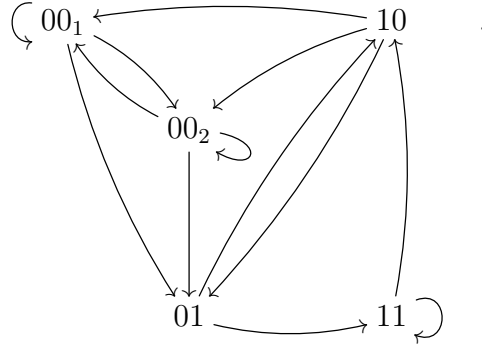
vastaava suunnattu multigraafi on



Selvitetään tämän multigraafin sivusiirto: Sivuilla $00_1, 00_2, 01, 11$ ja 10 indeksoitu siirtymämatriisi on

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tämä siirto on konjugaatti luvussa 12 Arnoldin kissakuvauksen koodaamiseen käytetyn matriisin kanssa



15. ÄÄRELLISEN TYYPIN ALISIIRROT

Olkoon $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{W}_n(I_N)$ jokin täyden siirron *kielen* $\{\epsilon\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{W}_n(I_N)$ osajoukko, jota kutsumme *kiellettyjen sanojen joukoksi*. (Tässä ϵ on *tyhjä sana*, jossa ei ole yhtään symbolia.) Olkoot

$$\Omega_N(\mathcal{F}) = \{\omega \in \Omega_N : \omega|_{[i, i+\ell]} \notin \mathcal{F} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}\}$$

ja

$$\Sigma_N(\mathcal{F}) = \{\omega \in \Sigma_N : \omega|_{[i, i+\ell]} \notin \mathcal{F} \text{ kaikilla } i, \ell \in \mathbb{N}\}.$$

Lemma 15.1. *Joukot $\Omega_N(\mathcal{F})$ ja $\Sigma_N(\mathcal{F})$ ovat siirtainvariantteja.*

Sanomme avaruuksia $\Omega_N(\mathcal{F})$ ja $\Sigma_N(\mathcal{F})$ $\mathcal{F}$ -siirtoavaruuksiksi.

Olkoon $X \subset \Omega_N$ σ -invariantti. Jos on äärellinen joukko $\mathcal{F} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n(I_N)$, jolle $X = \Omega_N(\mathcal{F})$ tai $\Sigma_N(\mathcal{F})$, niin X on *äärellisen tyypin alisiirto*. Jos $\mathcal{F} \subset \bigcup_{n=1}^{k+1} \mathcal{W}_n(I_N)$, niin X on *k askeleen äärellisen tyypin alisiirto*. Jos X on *k askeleen äärellisen tyypin alisiirto* ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{W}_k(I_N)$ siten, että $X = \Omega_N(\mathcal{F})$ tai $X = \Sigma_N(\mathcal{F})$, niin $\mathcal{W}_k(X) = \mathcal{W}_k(I_N) - \mathcal{F}$.

Topologiset Markovin ketjut ovat 1 askeleen äärellisen tyypin alisiirtoja. Itse asiassa mikä tahansa äärellisen tyypin alisiirto voidaan esittää topologisena Markovin ketjuna:

Lause 15.2. *Äärellisen tyypin alisiirrot ovat konjugaatteja topologisten Markovin ketjujen kanssa.*

Todistus. Voimme olettaa, että kaikkien kiellettyjen sanojen pituus on $k+1$. Määritellään suunnattu graafi $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$, jonka kärkien joukko on $\mathcal{W}_k(X)$. Graafin sivut määritellään asettamalla $o(v) = a$ ja $t(v) = b$, jos

$$ab_k = a_1b \in \mathcal{W}_{k+1}(X).$$

Graafin $\mathcal{G}$ kärkisiirto on topologinen Markovin ketju. Sallittujen sanojen joukon $\mathcal{W}_k(X)$ määräämä blokkikoodi on isomorfismi siirtojen $\sigma: X \rightarrow X$ ja topologisen Markovin ketjun Σ_A tai Ω_A kanssa.

□

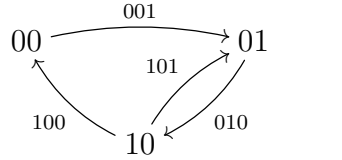
Esimerkki 15.3. Olkoon X kaksipuolinen jonoavaruus, jonka määrittelee kiellettyjen sanojen joukko $\mathcal{F} = \{000, 011, 110, 111\}$. Tällöin

$$\mathcal{W}_3(X) = \{001, 010, 100, 101\}$$

ja

$$\mathcal{W}_2(X) = \{00, 01, 10\}.$$

Lauseen 15.2 antama Markovin graafi on siis



Olkoon X äärellisen tyyppin alisiirto ja olkoon Y symbolinen dynaaminen systeemi. Jos on koodi $c: X \rightarrow Y$, niin Y on *sofic-systeemi* eli äärellisen tyyppin alisiirron tekijä.

Esimerkin 14.5 systeemi $\sigma: \tilde{\beta}(\Sigma_A) \rightarrow \tilde{\beta}(\Sigma_A)$ on äärellisen tyyppin alisiirron tekijä, joka ei ole äärellisen tyyppin alisiirto. On selvää, että kiellettyjen sanojen joukkoa ei voi esittää äärellisen joukon avulla koska se sisältää muunmuassa sanat 101, 10001, 1000001, joista mikään ei ole toisensa alisana. Sen sijaan sanat 10, 1000, 100000 ja 01, 0001, 000001 ovat sallittuja. Tämä esimerkki osoittaa siis, että äärellisen tyyppin alisiirron tekijä ei välttämättä ole äärellistä tyyppiä.

Äärellisen tyyppin alisiirtojen ja niiden tekijöiden kokoelma on numeroituva. Voidaan kuitenkin osoittaa, että jonoavaruuksilla Σ_N ja Ω_N on ylinumeroituva joukko alisiirtoja.

Lause 15.4. *Äärellisen tyyppin siirtojen tekijät ovat siirtoavaruuksia.*

Todistus. Katso esimerkiksi [LM, Theorem 1.5.13] □

Esimerkki 15.5. Kontekstivapaa jonoavaruus

$$X = \{\omega \in \Omega_3 : \text{jos } \omega_{[i, i+k]} = 0\bar{1}_\ell \bar{2}_m 0, \text{ niin } \ell = m\}$$

ei ole äärellisen tyyppin alisiirron tekijä.

16. INVARIANTIT MITAT

Olkoon $p \in \mathbb{R}^N$ positiivinen vektori, jolle pätee $\|p\| = \sum_{i=1}^N p_i = 1$, jota kutsutaan *todennäköisyysvektoriksi*. Jonoavaruude Σ_N tai Ω_N sylinterin $C_\alpha^{n_1, n_2, \dots, n_K}$ p -mitta on

$$\mu_p(C_\alpha^n) = \prod_{i=1}^K p_{\alpha_i}.$$

Näin saadaan erityisesti määriteltyä avointen ja suljettujen pallojen mitat koska nämä joukot ovat Lemman 9.5 mukaan sylintereitä. Mitta μ_p voidaan laajentaa kaikkien Borel-joukkojen sigma-algebraan $\mathcal{B}$, joka on pienin avaruuden Σ_N tai Ω_N osajoukkojen kokoelma, joka sisältää sylinterit ja on suljettu äärettömän yhdisteen ja komplementin ottamisen suhteen, katso esimerkiksi [Coh]. Mitta μ_p on siis Borel-mitta, jollaisia käsitellään mitta- ja integraaliteorian kurssin jälkimmäisen osassa. Kokoelman $\mathcal{B}$ alkioita sanotaan *Borel-joukoiksi*.

Määritelmästä on ilmeistä, että koko avaruuden mitta on 1, joten μ_p on *todennäköisyysmitta*.

Esimerkki 16.1. Todennäköisyysvektori $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ määrää mitan $\mu_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ avaruudessa Σ_2 , jolle pätee $\mu_p(C_\alpha^{[0, K]}) = 2^{-K+1}$.

Jos $f: X \rightarrow X$ on dynaaminen systeemi ja avaruudessa X on määritelty Borel-mitta μ , niin μ on f -invariantti, jos kaikille Borel-joukoille $B \subset X$ pätee

$$\mu(F^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Propositio 16.2. Mitta μ_p on σ -invariantti avaruuksissa Σ_N ja Ω_N kaikille todennäköisyysvektoreille $p \in \mathbb{R}^N$.

Todistus. □

Olkoon μ mitta avaruudessa Y . Jos $\mu(\{y\}) > 0$ jollekin $y \in Y$, niin y on mitan μ atomi.

Propositio 16.3. *Olkoon $p \in \mathbb{R}^N$ todennäköisyysvektori, jolla on ainakin kaksi nollasta poikkeavaa koordinaattia. Tällöin mitalla μ_p ei ole atomeja.*

Todistus. Harjoitus 6. □

Propositio 16.4. *Olkoon $p \in \mathbb{R}^N$ ja olkoon $\mathcal{B}$ avaruuden Σ_N tai Ω_N Borel-joukkojen kokoelma. Tällöin kaikille $A, B \in \mathcal{B}$ pätee*

$$\mu_p(\sigma^{-k}(A) \cap B) \rightarrow \mu_p(A)\mu_p(B).$$

Todistus. Tarkastellaan yksipuolisia jonoavaruuksia. Riittää osoittaa väite sylintereille $A = C_\alpha^{[0,m]}$ ja $B = C_\beta^{[0,n]}$. Nyt $\sigma^{-k}(A) = C_\alpha^{[k,m+k]}$, joten riittävän suurille k pätee

$$\mu_p(\sigma^{-k}(A) \cap B) = \mu_p(C_{\beta\alpha}^{[0,n] \cup [k,m+k]}) = \prod_{i=0}^n \beta_i \prod_{j=0}^m \alpha_j = \mu_p(B)\mu_p(A). \quad \square$$

Koska Propositio 16.4 pätee, sanomme, että täysi siirto on *sekoittava*. Tämä mittallisen dynamiikan käsite vastaa topologista sekoittavuutta: Propositiossa 9.8 osoitimme, että täydet siirrot ovat topologisesti sekoittavia: Mille tahansa avoimille epätyhjille joukoille U ja V yksi- tai kaksipuolisessa jonoavaruudessa on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$ kaikille $n \geq N$.

Olkoon A transitiivinen $N \times N$ -siirtymämatriisi ja olkoon π $N \times N$ -matriisi siten, että $\pi_{ij} = 0$, jos $A_{ij} = 0$ ja jolle pätee

$$\sum_{i=0}^{N-1} \pi_{ij} = 1$$

kaikille $j \in [0, N-1] \cap \mathbb{N}$. Tällöin sanomme, että π on transitiivinen *stokastinen* matriisi.

Propositio 16.5. *Transitiivisella stokastisella matriisilla π on yksikäsitteinen positiivinen ominaisvektori v^π ominaisarvolla 1, joka on yksinkertainen maksimaalinen ominaisarvo. Lisäksi $\pi^k \rightarrow (v^\pi, v^\pi, \dots, v^\pi)$, kun $k \rightarrow \infty$.*

Todistus. Seuraa Perronin lauseesta (Lause 13.1). Huomaa, että nyt P kuvaa yksikösimpleksin itselleen ja yleisemmin se kuvaa jokaisen yhtälön $\sum_{i=0}^{N-1} x_i = b$ määräämän hypertason itselleen. Koska muut ominaisarvot ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin 1, niin π^k lähestyy projektiota vektorin v^π virittämälle ominaisavaruudelle. Koska jokainen kantavektori kuvautuu vektorin v^π virittämään avaruuteen ja sarakesumman on oltava 1, matriisi $(v^\pi, v^\pi, \dots, v^\pi)$ on ainoa mahdollisuus. □

Olkoon π stokastinen matriisi ja olkoon v^π sen positiivinen ominaisvektori, jolle pätee $\|v^\pi\|_1 = 1$. Matriisia π vastaava *Markovin mitta* määritellään asettamalla $\mu_\pi(C_i^0) = v_i^\pi$ ja sylintereille $C_\alpha^{[0,m]}$ (siis avoimille/suljetuille palloille

$$\mu_\pi(C_\alpha^{[0,m]}) = \left(\prod_{i=0}^{m-1} \pi_{\alpha_i \alpha_{i+1}} \right) v_{\alpha_m}^\pi.$$

Propositio 16.6. *Mitta μ_π on hyvin määritelty σ -invariantti todennäköisyysmitta.*

Todistus.

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mu_{\pi}(C_i^0) = \sum_{i=0}^{N-1} v_i^{\pi} = \|v^{\pi}\| = 1.$$

Koska v^{π} on ominaisvektori, pätee kaikille $i \in \mathcal{A}$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mu_{\pi}(C_{ij}^{01}) = \sum_{j=0}^{N-1} \pi_{ij} v_j^{\pi} = v_i^{\pi} = \mu_{\pi}(C_i^0).$$

Itoimalla tätä huomaamme, että sylinterien mitat on määritelty johdonmukaisesti ja että se on todennäköisyysmitta.

Lisäksi jokaiselle sylinterille pätee

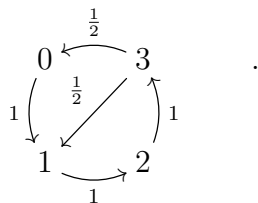
$$\begin{aligned} \mu_{\pi}(\sigma^{-1}(C_{\alpha}^{[0,m]})) &= \mu_{\pi}\left(\bigcup_{i=0}^{N-1} C_{i\alpha}^{[0,m+1]}\right) = \sum_{i=0}^{N-1} \mu_{\pi}(C_{i\alpha}^{[0,m+1]}) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \pi_{i\alpha_0} \prod_{k=0}^{m-1} \pi_{\alpha_k \alpha_{k+1}} v_{\alpha_m}^{\pi} = \prod_{k=0}^{m-1} \pi_{\alpha_k \alpha_{k+1}} v_{\alpha_m}^{\pi} = \mu(C_{\alpha}^{[0,m]}) \end{aligned}$$

koska π on stokastinen. □

Esimerkki 16.7. Matriisi

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

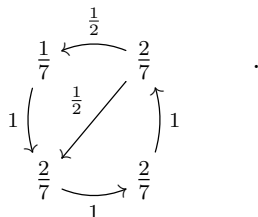
on transitiivinen ja stokastinen. Matriisia π voi (ja kannattaakin) ajatella niin, että sylinterin C_j^0 massasta siirtyy osuus π_{ij} sylinterille C_i^0 .



Matriisin π positiivista ominaisvektoria p , jolle pätee $\|p\|_1 = 1$ voi ajatella mitan μ_{π} invarianttina massajakaumana

$$p = (\mu_{\pi}(C_0), \mu_{\pi}(C_1), \mu_{\pi}(C_2), \mu_{\pi}(C_3)).$$

Seuraava kaavio havainnollistaa massojen siirtymistä ja on helppo tarkastaa, että ominaisvektorin antama massajakauma todellakin pysyy vakiona.



Lause 16.8. Vasen siirto σ on sekoittava transitiivista stokastista matriisia π vastaavan mitan μ_{π} suhteen.

Todistus. Tarkastellaan yksipuolisia jonoavaruuksia. Riittää osoittaa väite avaruuden Σ_A sylinterille $A = C_\alpha^{[0,m]}$ ja $B = C_\beta^{[0,n]}$. Nyt $\sigma^{-k}(A) = C_\alpha^{[k,m+k]}$, joten riittävän suurille k pätee

$$\begin{aligned}\mu_\pi(\sigma^{-k}(A) \cap B) &= \mu_\pi(C_{\beta\alpha}^{[0,n] \cup [k,m+k]}) = \left(\prod_{i=0}^n \beta_i\right) (\pi^{k-n})_{\beta_n\alpha_0} \left(\prod_{j=0}^m \alpha_j\right) v_{\alpha_m}^\pi \\ &\rightarrow \left(\prod_{i=0}^n \beta_i\right) v_{\beta_n}^\pi \left(\prod_{j=0}^m \alpha_j\right) v_{\alpha_m}^\pi = \mu_\pi(B) \mu_\pi(A). \quad \square\end{aligned}$$

Jokaisella transitiivisella topologisella Markovin ketjulla on siis ylinumeroituva kokoelma sekoittavia siirtainvariantteja todennäköisyysmittoja, joiden kantaja on koko avaruus. Tarkastellaan kurssin lopuksi yhtä tällaista mitta, jolla on erityisiä ominaisuuksia.

Olkoon f transitiivisen matriisin A transpoosin A^T ominaisvektori maksimaalisella ominaisarvolla λ . Stokastinen matriisi

$$\pi_{ij}^P(A) = \frac{A_{ij} f_i}{\lambda f_j}$$

on *Parryn matriisi* ja sen avulla määritelty todennäköisyysmitta topologisille Markovin ketjuille Σ_A ja Ω_A on *Parryn mitta* μ^P .

Lemma 16.9. *Olkoon v matriisin A ominaisvektori maksimaalisella ominaisarvolla λ . Tällöin vektori $vf = (v_i f_i)$ on Parryn matriisin ominaisvektori maksimaalisella ominaisarvolla 1.*

Todistus. Harjoitus 6. $\square$

Propositio 16.10. *Jokaiselle sylinterille $C = C_\alpha^{[m,n]}$ pätee*

$$\mu^P(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\#(\mathcal{P}_k \cap C)}{\#\mathcal{P}_k}.$$

Todistus. Valitaan ominaisvektorit v ja f siten, että niiden sisätulolle pätee $(v|f) = 1$. Näin voi valita, koska molemmat vektorit ovat positiivisia.

Olkoon λ matriisin A suurin ominaisarvo. Tällöin $\frac{A}{\lambda}$ on matriisin $\frac{A}{\lambda}$ suurin ominaisarvo. On helppo tarkastaa, että A kuvaa kaikki affinit hypertasot

$$H_b = \{x \in \mathbb{R}^N : (x|f) = b\}$$

jokaisella $b \in \mathbb{R}$ itselleen. Perronin lauseesta seuraa, että 1 on geometrisesti ja algebrallisesti yksinkertainen kaikki muut ominaisarvot kuin 1 ovat itseisarvoltaan aidosti pienempiä kuin 1. Siis jono $(\frac{A}{\lambda})^k$ suppenee kohti projektiokuvausta vektorin v virittämälle suoralle, joka kuvaa jokaisen hypertason H_b yhdelle pisteelle. Tämän kuvauksen matriisi on $v_\alpha f_\beta$. Erityisesti $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(A^k)_{\alpha\beta}}{\lambda^k} = v_\alpha f_\beta$. Lisäksi Seurauksen 13.3 nojalla $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{tr } A^k}{\lambda^k} = 1$.

Olkoon $k \geq n - m$. Tällöin

$$\frac{\#(\mathcal{P}_k \cap C)}{\#\mathcal{P}_n} = \frac{(\prod_{i=m}^{n-1} A_{\alpha_i \alpha_{i+1}}) (A^{k-(n-m)})_{\alpha_n \alpha_m}}{\text{tr } A^n}.$$

Edellä tekemiemme havaintojen nojalla

$$\begin{aligned} \frac{(\prod_{i=m}^{n-1} A_{\alpha_i \alpha_{i+1}}) (A^{k-(n-m)})_{\alpha_n \alpha_m}}{\text{tr } A^n} &\rightarrow \left(\prod_{i=m}^{n-1} A_{\alpha_i \alpha_{i+1}} \right) \frac{v_{\alpha_m} f_{\alpha_n}}{\lambda^{n-m}} \\ &= \left(\prod_{i=m}^{n-1} \pi_{\alpha_i \alpha_{i+1}}^P \right) v_{\alpha_n} f_{\alpha_n} = \mu^P(C), \end{aligned}$$

kun $k \rightarrow \infty$. Väite seuraa tästä. □