

JOHDATUS DYNAAMISIIN SYSTEEMEIHIN 2013

JOUNI PARKKONEN

Tämä kurssi antaa pikaisen johdannon joihinkin dynaamisten systeemien keskeisiin käsitteisiin. Kurssi on aineopintotasoinen, esitiedoiksi riittävät ensimmäisen vuoden analyysin ja lineaarialgebran kurssit ja perustiedot euklidisen avaruuden geometriasta ja topologiasta (avoimet ja suljetut joukot, tiheät joukot, jatkuvuus, raja-arvo jne.).

Suosittelavaa lukemista kurssin tueksi on lueteltu materiaalin lopussa olevassa lähdeluettelossa, hyviä oppikirjoja ovat muunmuassa [Dev], [HSD],[HK]. Tätä kurssia suunniteltaessa [HK] on ollut tärkeä lähde.

1. JOHDANTO

Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $f: X \rightarrow X$. Tällä kurssilla oletamme yleensä, että f on jatkuva. Diskreetillä dynaamisella systeemillä tarkoitetaan kuvauksen $f: X \rightarrow X$ iteraattien $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ kertaa}}$ ja eri pisteiden $x \in X$ ratojen

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\}$$

tarkastelua, kun $k \rightarrow \infty$. Muodollisesti sanomme, että kolmikko $((X, d), f, \mathbb{N})$ on diskreetti dynaaminen systeemi, missä $\mathbb{N}$ kertoo, mitä iteraatteja tarkastellaan. Jos f on bijektio, voidaan tarkastella myös sen negatiivisia iteraatteja $f^k = (f^{-1})^{-k}$ kaikille $k < 0$ ja pisteen $x \in X$ täyttää rataa

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\}$$

jolloin tarkasteltava dynaaminen systeemi on kolmikko $((X, d), f, \mathbb{Z})$.

Tarkasteltavat kysymykset liittyvät ratojen *asymptoottiseen käyttäytymiseen*. Esimerkiksi

- Onko jonolla $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ raja-arvoa?
- Onko rata $\mathcal{O}_f(x)$ tiheä?
- Miten lähekkäisten pisteiden radat käyttäytyvät toistensa suhteen?

Diskreetissä dynaamisessa systeemissä $((X, d), f, \mathbb{N})$ tai $((X, d), f, \mathbb{Z})$ on tapana ajatella, että $\mathbb{N}$ tai $\mathbb{Z}$ on *diskreetti aika*.

Jatkuva-aikainen dynaaminen systeemi koostuu *virtauksesta* $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$, missä $\phi: X \rightarrow X$ on homeomorfismi, joka toteuttaa ehdon

$$\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}$$

kaikilla $t, s \in \mathbb{R}$.

Jatkuva-aikaiseen dynaamiseen systeemiin $((X, d), (\phi^t)_{t \in \mathbb{R}})$ voidaan liittää diskreetti dynaaminen systeemi esimerkiksi tarkastelemalla ajanhetken 1 kuvausta ϕ^1 , joka määrää dynaamisen systeemin $((X, d), \phi^1, \mathbb{Z})$. Virtauksen määrittelevän ominaisuuden perusteella pätee $(\phi^1)^n = \phi^n$.

Tällä kurssilla tutustumme dynaamisiin systeemeihin suuressa määrin esimerkkien kautta. Kurssin aikana tapaamme myös joitakin dynamiikan sovelluksia muihin matematiikan aloihin kuten differentiaaliyhtälöiden teoriaan ja lukuteoriaan.

Esimerkki 1.1. (1) Olkoon $0 < k < 1$. Lineaarikuvauksella $K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Kx = kx$ on kiintopiste $0 \in \mathbb{R}$: $K0 = 0$. Lisäksi jokaiselle $x \in \mathbb{R}$ pätee $L^k x \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Kaikki radat siis suppenevat kohti puoleensavetävää (attraktiivista) kiintopistettä 0. (2) Olkoon $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus $L(x) = (2x_1, \frac{x}{2})$. Nyt $H^k(0, s) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$ kaikilla $s \in \mathbb{R}$ ja $\|(H^k(s, t))\| \rightarrow \infty$, kun $k \rightarrow \infty$ kaikilla $t \neq 0$.

Esimerkki 1.2. Parametrisoidaan ympyrä $\mathbb{S}^1$ kuvauksella $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$,

$$\Phi(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)).$$

Tällöin $\Phi(s+k) = \Phi(s)$ kaikilla $s \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Merkitään ympyrän pisteitä tämän kulmaparametrisoinnin avulla $[s] = \Phi(s) \in \mathbb{S}^1$.

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Ympyrän $\mathbb{S}^1$ kierto $R_\alpha: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ määritellään asettamalla $R_\alpha([s]) = [s + \alpha]$. Tämä määritelmä on hyvin asetettu, sillä jos $k \in \mathbb{Z}$, niin pätee

$$R_\alpha[s + k] = [s + k + \alpha] = [s + \alpha] = R_\alpha[s].$$

Kierron asymptoottinen käyttäytyminen riippuu vahvasti kulmasta α :

(1) Jos $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, missä $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja lukujen p ja q suurin yhteinen tekijä on 1, niin $R_\alpha^q([s]) = [s + p] = [s]$ kaikille s , joten kaikki pisteet $x \in \mathbb{S}^1$ ovat jaksollisia jaksolla q .

(2) Jos $\alpha \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}$, niin kaikki radat ovat tiheitä: Jos olisi $x \in \mathbb{S}$, jolle $\overline{\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(x)} \neq \mathbb{S}^1$, niin olisi avoin väli $\emptyset \neq U \subset \mathbb{S} - \overline{\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(x)}$. Olkoon U maksimaalinen tällainen väli. Tällöin $R_\alpha^k(U) \cap R_\alpha^\ell(U) = \emptyset$ kaikilla $k \neq \ell$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Jos nimittäin $R_\alpha^k(U) = R_\alpha^\ell(U)$, niin $R_\alpha^{k-\ell} = \text{id}$, mikä on mahdotonta. Koska U on valittu maksimaaliseksi, muunlainen leikkaaminen on myös mahdotonta. Mutta nythän joukko $\bigcup_{k=0}^\infty R_\alpha^k(U)$ koostuu keskenään samanpituusista erillisistä väleistä, joten sen pituus on ääretön. Tämä on mahdotonta, koska ympyrän pituus on 1. Huomaa, että käytämme tässä tietoa, että kierrot ovat ympyrän $\mathbb{S}^1$ isometrioita.

Esimerkki 1.3. Collatzin $(3n + 1)$ -ongelma on esimerkki hyvin yksinkertaisesta dynaamisesta systeemistä, jonka ilmeistä asymptoottista käyttäytymistä ei osata todistaa. Olkoon $C: \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ määritelty asettamalla

$$C(n) = \begin{cases} 3n + 1, & \text{kun } n \text{ on pariton} \\ \frac{n}{2}, & \text{kun } n \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Pisteen 1 rata on $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Kokeilemalla huomaamme, että kaikkien pisteiden radat näyttävät päätyvän lopulta tähän 3-jaksoiseen rataan. Tämä havainto on tarkastettu ainakin noin lukuun 5.76×10^{18} saakka. Collatzin ongelmasta voi lukea esimerkiksi artikkelista [Con] ja sen viittauksista.

Esimerkki 1.4. Olkoot $0 < \mu < 1 < \lambda$. Lineaarikuvaukset $\phi^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\phi^t(x) = (\lambda^t x_1, \mu^t x_2)$$

muodostavat tason virtauksen:

$$\phi^s \circ \phi^t(x) = (\lambda^s \lambda^t x_1, \mu^s \mu^t x_2) = (\lambda^{s+t} x_1, \mu^{s+t} x_2) = \phi^{s+t}(x)$$

kaikilla $s, t \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$. Huomaa, että ϕ^1 on Esimerkin 1.1 lineaarikuvaus kuvaus H , kun $\lambda = 2$ ja $\mu = \frac{1}{2}$. Siis pisteen x rata kuvauksen H määäämässä diskreetissä systeemissä sisältyy sen rataan virtauksessa $(\phi^t(x))_{t \in \mathbb{R}}$.

Piste 0 on virtauksen kiintopiste. Kaikille $b \in \mathbb{R}$ pätee $\phi^t(0, b) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow +\infty$ ja $\phi^t(b, 0) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow -\infty$. Jos $a \neq 0$, pätee $\|\phi^t(a, b)\| \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow +\infty$ ja $\|\phi^t(b, a)\| \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow -\infty$. Erityisesti siis koordinaattiakselien ulkopuolisten pisteiden radat menevät äärettömyyteen, kun $t \rightarrow \pm\infty$.

Esimerkki 1.5. Olkoon $T_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T_3(x) = \begin{cases} 3x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Miten rata $(T_3^k(x))_{k=0}^\infty$ käyttäytyy muuttujan x eri arvoilla?

- Jos $x < 0$, niin $T_3^k(x) = 3^k x$, ja tällaisen jonon raja-arvo on selvästi $-\infty$.
- Jos $x > 1$, niin $T_3(x) < 0$, joten näilläkin alkuarvoilla jonon raja-arvo on $-\infty$.
- Jos $x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, niin $T_3(x) > 1$, joten näilläkin alkuarvoilla jonon raja-arvo on $-\infty$.
- Jos $x \in]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$, niin $T_3(x) \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, joten $T_3^2(x) > 1$. Siis näilläkin alkuarvoilla jonon raja-arvo on $-\infty \dots$

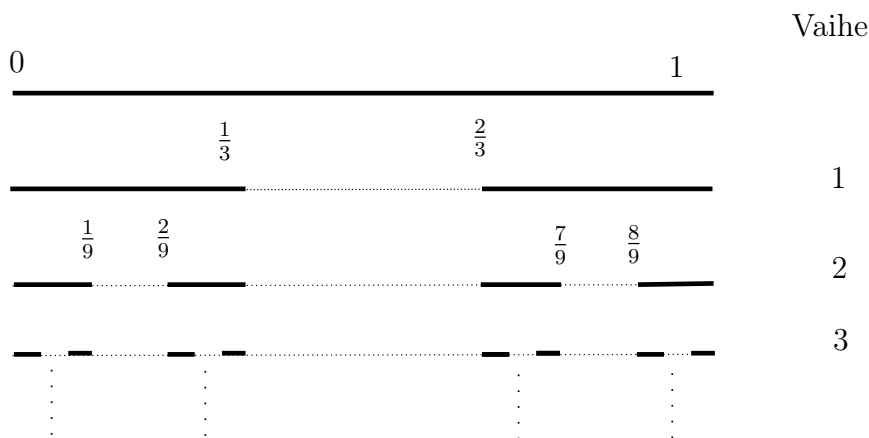
Kuitenkin joillakin alkuarvoilla käyttäytyminen on täysin erilaista:

- Systeemillä on kaksi kiintopistettä 0 ja $\frac{3}{4}$.
- $(T_3)^m(\frac{1}{3^m}) = 1$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Siis $(T_3)^M(\frac{1}{3^m}) = 0$ kaikilla $M \geq m$, joten nämä jonot ovat vakiojonoja suurilla indekseillä k .
- $T_3(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$, $T_3(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$, $T_3(\frac{1}{12}) = \frac{1}{4}$ ja niin edelleen.
- Systeemillä on runsaasti jaksollisia ratoja esimerkiksi $\frac{3}{10} \mapsto \frac{9}{10} \mapsto \frac{3}{10}$ ja $\frac{3}{28} \mapsto \frac{9}{28} \mapsto \frac{27}{28} \mapsto \frac{3}{28}$.

Cantorin joukko

$$\begin{aligned} K &= [0, 1] - \bigcup_{k=0}^{\infty} (T_3^k)^{-1}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} (T_3^k)^{-1}([0, 1]) = \{x \in \mathbb{R} : T_3^k(x) \in [0, 1] \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} : a_i \in \{0, 2\} \right\} \end{aligned}$$

koostuu niistä pisteistä, joiden radat sisältyvät väliin $[0, 1]$. Itse asiassa ne pysyvät joukossa K . Myöhemmin osoitamme, että systeemillä on ratoja, joiden sulkeuma on Cantorin joukko K .



Joukko $K_k = (T_3^k)^{-1}[0, 1]$ koostuu 2^k erillisestä suljetusta välistä $I_k^0, I_k^1, \dots, I_k^{2^k-1}$, joiden jokaisen pituus on $\frac{1}{3^k}$. Koska K on joukon K_k osajoukko jokaisella $k \in \mathbb{N}$, on K siis nollamittainen joukko.

Jos valitsemme sisäkkäisen jonon Cantorin joukon konstruktiossa esiintyviä jonoja $I_1^{k(1)} \supset I_2^{k(2)} \supset I_3^{k(3)} \supset \dots$, niin kurssilla Analyysi 1 käsiteltävän *sisäkkäisten välien periaatteen* nojalla $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i^{k(i)}$ on yhden pisteen joukko jokaisella tällaisella välien muodostamalla jonolla. Selvästi kahta eri jonoa vastaa kaksi eri pistettä koska jossain vaiheessa toiseen jonoon on valittu kahdesta mahdollisesta välistä oikeanpuoleinen ja toiseen vasemmanpuoleinen. Toisaalta jokainen piste määrää täsmälleen yhden jonon $(I_i^{k(i)})_{k=1}^{\infty}$.

Jokaiseen Cantorin joukon pisteeseen voidaan liittää yksikäsitteinen *osoite*, joka on jono $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, missä $a_k = 0$, jos k . vaiheessa valitaan vasemmanpuoleinen kahdesta mahdollisesta jonosta ja $a_k = 1$, jos k . vaiheessa valitaan oikeanpuoleinen väli. Jos $x \in I_k^{\ell}$, niin äärellisen pituiseksi katkaistu koodi $a_1 a_2 \dots a_k$ on luvun ℓ binääriesitys.

Edellä esitetty koodaus antaa bijektion Cantorin joukon ja jonoavaruuden $\Sigma = \{\omega : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$ välille. Cantorin diagonaalitodistuksen avulla on nyt helppo osoittaa, että K on ylinumeroituva.

2. KUTISTAVAT KUVAUKSET

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F: X \rightarrow Y$ on K -Lipschitz-kuvaus tai K -Lipschitz-jatkuva, jos

$$d_Y(F(x), F(y)) \leq K d_X(x, y)$$

kaikille $x, y \in X$. Jos F on K -Lipschitz jollain $K > 0$, niin sanotaan, että F on *Lipschitz-jatkuva*. Jos F on K -Lipschitz jollain $K < 1$, niin sanotaan, että F on (K) -kutistava.

Piste $x \in X$ on kuvauksen $F: X \rightarrow X$ *kiintopiste*, jos $F(x) = x$. Jos kuvauksen $F: X \rightarrow X$ kiintopisteellä x_0 on avoin ympäristö U , jonka kaikki pisteet ovat positiivisesti asympotoottisia pisteen x_0 kanssa, niin x_0 on (lokaalisti) *em puoleensavetävä* eli *attraktiivinen* kiintopiste. Jos taas kiintopisteellä x_0 on avoin ympäristö V siten, että kaikilla pisteillä $y \in V - \{x_0\}$ on $N(y) \in \mathbb{N}$ siten, että $F^{N(y)} \notin V$, niin x_0 on (lokaalisti) *hylkivä* kiintopiste.

Lause 2.1 (Kutistusperiaate eli Banachin kiintopistelause). *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Tällöin jokaisella kutistavalla kuvauksella $F: X \rightarrow X$ on täsmälleen yksi kiintopiste. Jos F on K -kutistava, niin $d(x_0, F^k(x)) \leq K^k d(x_0, x)$ kaikille $x \in X$.*

Todistus. Olkoon $x \in X$, ja olkoot $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(F^m(x), F^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k}(F(x))) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k} d(x, F(x)) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Siis jono $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono, ja koska X on täydellinen, jono $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$ suppenee kohti jotain pistettä $x_{\infty} \in X$.

Piste x_{∞} on kuvauksen F kiintopiste, sillä kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} d(x_{\infty}, F(x_{\infty})) &\leq d(x_{\infty}, F^j(x)) + d(F^j(x), F^{j+1}(x)) + d(F^{j+1}(x), F(x_{\infty})) \\ &\leq (1+K)d(x_{\infty}, F^j(x)) + K^j d(x, F(x)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $j \rightarrow \infty$. Metriikan positiivisuudesta seuraa, että $x_\infty = F(x_\infty)$.

Jos x_∞ ja y_∞ ovat kiintopisteitä, niin

$$Kd(x_\infty, y_\infty) \geq d(F(x_\infty), F(y_\infty)) = d(x_\infty, y_\infty),$$

joten $d(x_\infty, y_\infty) = 0$, ja siis $x_\infty = y_\infty$. $\square$

Jos $d(x_0, y_k) \leq K^k d(x_0, x)$ kaikille $x \in X$, niin sanotaan, että pisteet y_k lähestyvät pistettä x_0 *eksponentiaalisella nopeudella*. Kutistavalla kuvauksella on siis yksikäsitteinen kiintopiste, jota kaikki radat lähestyvät eksponentiaalisella nopeudella.

Propositio 2.2. *Olkkoon $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja olkkoon $x_0 \in I$ funktion $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ kiintopiste.*

(1) *Jos $|g'(x_0)| < 1$, niin on avoin g -invariantti väli $U \in I$, joka sisältää pisteen x_0 siten, että pisteet $F^k(x)$ lähestyvät pistettä x_0 eksponentiaalisella nopeudella kaikille $x \in U$.*

(2) *Jos $|g'(x_0)| > 1$, niin x_0 on lokaalisti hylkivä kiintopiste.*

Todistus. Kurssin Analyysi 2 tiedoilla. $\square$

Kutistusperiaatteen avulla voidaan todistaa esimerkiksi seuraavan klassisen numeerisen menetelmän toimiminen. Jos $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja funktiolla $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ on kiintopiste $x_0 \in I$ ja $g(x_0) = 0$, sanotaan, että kiintopiste x_0 on *superattraktiivinen*. Tällöin, jos g on riittävän siisti, vaikkapa kolme kertaa jatkuvasti differentioituva, $g^k(x) \rightarrow x_0$ *supereksponentiaalisella nopeudella*: Kaikille $K > 0$ ja kaikille pisteille x , jotka ovat riittävän lähellä kiintopistettä x_0 pätee

$$\frac{d(x_0, g^k(x))}{K^k d(x_0, x)} \rightarrow 0,$$

kun $k \rightarrow \infty$.

Lause 2.3 (Newtonin menetelmä). *Olkkoon I suljettu ja rajoitettu väli. Olkkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva. Oletetaan, että funktiolla f on nollakohta välillä I ja että sen derivaatalla ei ole nollakohtaa välillä I . Olkkoon $F: I \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Tällöin on jokin väli $J \subset I$ siten, että $F|_J$ on kutistava kuvaus ja jono $F^k(x)$ suppenee kohti funktion f nollakohtaa supereksponentiaalisella nopeudella kaikilla $x \in J$.

Todistus. Harjoitus 2. $\square$

Olkkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}$ avoimia joukkoja ja $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (jatkuva) kuvaus. Tällä kurssilla tarkastelemme *differentiaaliyhtälöryhmiä*

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, t),$$

ja niihin liittyviä alkuarvotehtäviä, joissa vaaditaan lisäksi $x(t_0) = x_0$ jollain $x_0 \in U$. Merkintä $\dot{x}(t) = x'(t)$ tarkoittaa vektoriarvoisen kuvauksen $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Delta \subset \mathbb{R}$

derivaattaa. Komponenteittain kirjoitettuna differentiaaliyhtälöryhmä (1) on

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1((x_1, \dots, x_n), t), \\ \dot{x}_2 = f_2((x_1, \dots, x_n), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n((x_1, \dots, x_n), t). \end{cases}$$

Yleensä kutsumme differentiaaliyhtälöryhmää yksinkertaisemmin *differentiaaliyhtälöksi*. Differentiaaliyhtälön (1) ratkaisu alkuarvolla $x(t_0) = x_0$ on differentioituva kuvaus $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jolle pätee $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ kaikilla $t \in \Delta$ ja $x(t_0) = x_0$.

Jos differentiaaliyhtälön oikean puolen kuvauksen arvo ei riipu muuttujan t arvosta, tämä riippuvuus jätetään pois ja tarkastellaan kuvauksen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ määräämää *autonomista* differentiaaliyhtälöä

$$(3) \quad \dot{x} = f(x)$$

Autonomisen differentiaaliyhtälön (3) ratkaisu alkuarvolla $x(t_0) = x_0$ on differentioituva kuvaus $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jolle pätee $\dot{x}(t) = f(x(t))$ $t \in \Delta$ ja $x(t_0) = x_0$.

Differentiaaliyhtälöiden kurssilla todistetaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden alkuarvotehtävien ratkaisujen olemasaolo- ja yksikäsitteisyyslause, OY-lause. Kutistusperiaatteen avulla osoitamme vastaavan tuloksen differentiaaliyhtälöryhmille. Tämä on sama todistus, ns. Picardin iteraatio, jolla lause on tapana todistaa differentiaaliyhtälöiden kurssilla, jossa ei kuitenkaan välttämättä todisteta kutistusperiaatetta yleisessä muodossa. Yksiuotteinen tapaus vastaa differentiaaliyhtälöiden kurssilla käsiteltävää tapausta.

Lause 2.4 (OY-lause). *Olko $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, ja olko $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olko $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus, jolle kuvaus $x \mapsto f(t, x)$ on M -Lipschitz jokaisella $t \in I$. Jokaisella $(a, b) \in I \times U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Todistamme lauseen tapauksessa, jossa $U = \mathbb{R}^n$ ja f on M -Lipschitz. Yleisen tapauksen todistus samalla idealla esitetään esimerkiksi Hasselblatin ja Katokin kirjassa.

Olko siis $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Valitaan $0 < \delta < \frac{1}{M}$. Olko $(a, b) \in]a - \delta, a + \delta[\times \mathbb{R}^n$. Picardin operaattori on kuvaus $\mathcal{P}_{a,b}: C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Teemme kaksi oleellista havaintoa Picardin operaattorista:

Lemma 2.5. *Kuvaus $\phi: [a - \delta, a + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on alkuarvotehtävän (4) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, jos ja vain jos se on Picardin operaattorin $\mathcal{P}_{a,b}$ kiintopiste.*

Todistus. Kuvaus ϕ on Picardin operaattorin kiintopiste, jos ja vain jos

$$(5) \quad \phi(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Jos ϕ on kiintopiste, se toteuttaa siis selvästi alkuehdon $\phi(a) = b$. Lisäksi kuvaus ϕ on differentioituva ja toteuttaa ehdon $\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t))$ analyysin peruslauseen nojalla.

Toisaalta, jos ϕ on alkuarvotehtävän (4) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, niin kaikilla $t \in]a - \delta, a + \delta[$ pätee

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s))ds = b + \int_a^t \dot{\phi}(s)ds = \phi(t),$$

joten ϕ on kiintopiste. □

Lemma 2.6. *Picardin kuvaus on kutistava.*

Todistus.

$$\|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - \mathcal{P}_{a,b}(\psi)\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \left\| \int_a^t (f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s)))ds \right\| \leq \delta M \|\phi - \psi\|. \quad \square$$

Lemman 2.6 ja Lauseen 2.1 mukaan Picardin operaattorilla on täsmälleen yksi kiintopiste. Lemman 2.5 mukaan tämä kiintopiste on tarkasteltavan alkuarvotehtävän (4) ainoa ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$. □

Lausetta 4 voi soveltaa aina, kun $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on C^1 , sillä $f|_B$ on Lipschitz-jatkuva, kun $B \subset U$ on suljettu pallo.

Seuraus 2.7 (Autonominen OY-lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -kuvaus. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu. □

Esimerkki 2.8. Vaikka tarkastelemmekin lähinnä korkeampiulotteisia tilanteita, on hyvä muistaa, miten Picardin iteraatio antaa alkuarvotehtävän $\dot{y} = y$, $y(0) = 1$ ratkaisun: Valitaan ensimmäiseksi arvaukseksi vakiofunktio $y_0(t) = 1$. Tällöin

$$y_1(t) = \mathcal{P}(y_0)(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t,$$

$$y_2(t) = \mathcal{P}(y_1)(t) = 1 + \int_0^t (1 + s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

ja induktiolla

$$y_k(t) = \mathcal{P}(y_{k-1})(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!}.$$

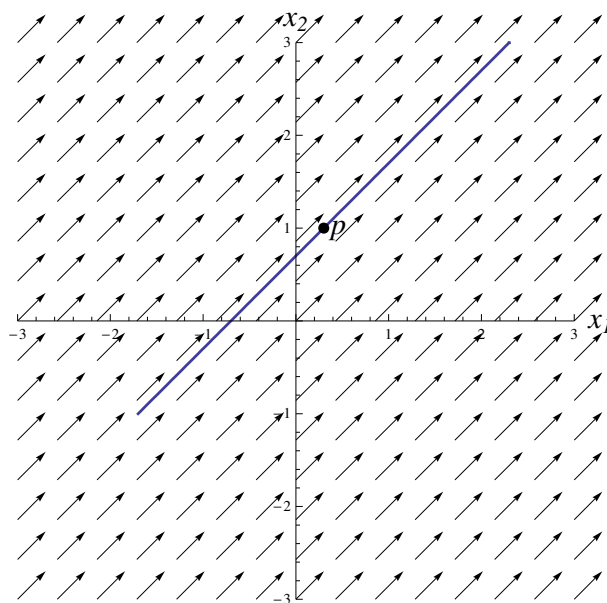
Kuvausten y_k muodostama jono suppenee kohti eksponenttifunktiota tasaisesti kompakteilla väleillä.

3. AUTONOMISET DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT JA VIRTAUKSET

Autonomisen differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ oikean puolen kuvaus f määrää *vektorikentän* joukossa U . Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu on differentioituva polku joukossa U , jonka tangenttivektori $\dot{x}(t)$ pisteessä $x(t)$ on vektorikentän f arvo (siis vektori). Lisäksi polku kulkee pisteen x_0 kautta ja toteuttaa $x(t_0) = x_0$.



KUVA 1. Vakiovektorikenttä $f(x) = (1, 1)$ tasossa ja alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = p = (1, 0.3)$ ratkaisu aikavälillä $t \in]-2, 2]$.

Esimerkki 3.1. Olkoot $\lambda, b \in \mathbb{R}^2$.

(1) Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \lambda$ tason vakiovektorikenttä. Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = b \end{cases}$$

ratkaisu on affiini suora $x_b(t) = b + t\lambda$. Kuvaukset $\phi^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\phi^t(b) = x_b(t) = b + t\lambda,$$

$t \in \mathbb{R}$ muodostavat tason virtauksen:

$$\phi^s \circ \phi^t(b) = (b + t\lambda) + s\lambda = b + (s + t)\lambda = \phi^{s+t}(b)$$

kaikille $b \in \mathbb{R}^2$.

(2) Tason lineaarisen alkuarvotehtävän

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = b_1, \\ x_2(0) = b_2, \end{cases}$$

ratkaisu on selvästi $x(t) = (b_1 e^{\lambda_1 t}, b_2 e^{\lambda_2 t})$. Kun $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, ratkaisut käyttäytyvät kuten kuvassa 2. Ratkaisut lähestyvät x_1 -akselia, kun $t \rightarrow \infty$ ja x_2 -akselia, kun $t \rightarrow -\infty$.

Asetetaan

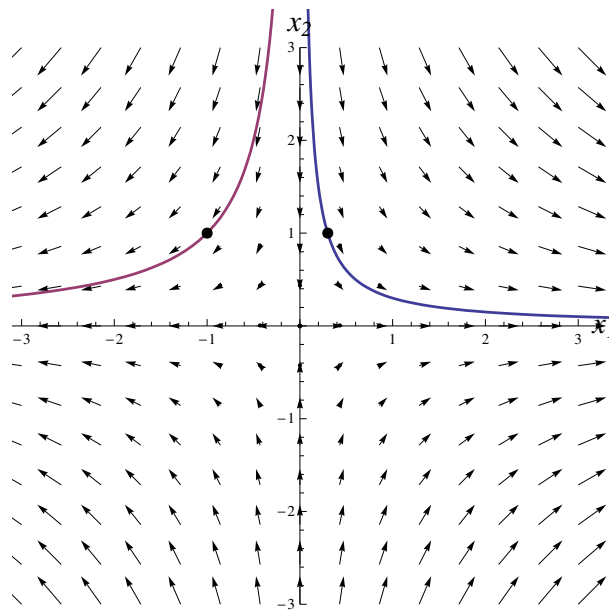
$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ja $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Tällöin yhtälö (7) saadaan matriisimuotoon $\dot{x} = Ax$.

Ensimmäisissä harjoituksissa tarkastettiin, että ratkaisujen määrittämät *aika-t-kuvaukset* $\phi^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\phi^t(b) = (b_1 e^{\lambda_1 t}, b_2 e^{\lambda_2 t})$$

muodostavat tason $\mathbb{R}^2$ virtauksen.



KUVA 2. Alkuarvotehtävän (7) vektorikenttä ja ratkaisuja.

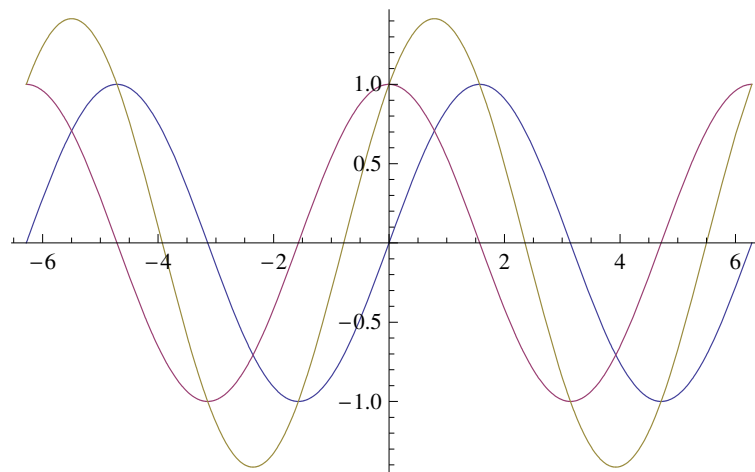
Esimerkki 3.2. Toisen asteen lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$(8) \quad y''(t) + y(t) = 0$$

kaikki ratkaisut saadaan funktioiden $\sin$ ja $\cos$ lineaarikombinaatioina. Jokaisella alkuarvotehtävällä

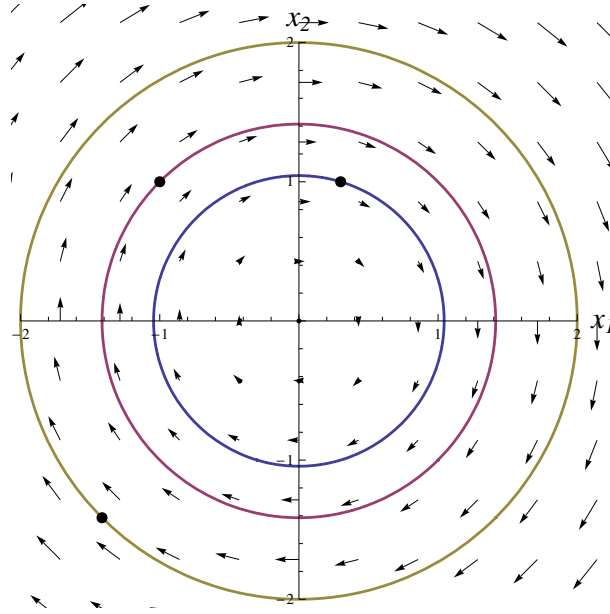
$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = a, \\ y'(0) = b, \end{cases}$$

on ratkaisu $y(t) = a \cos t + b \sin t$:



Differentiaaliyhtälö (8) voidaan muuntaa tason differentiaaliyhtälöksi: Asetetaan $x_1 = y$ ja $x_2 = y'$. Tällöin siis yhtälö (8) on

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$



KUVA 3. Differentiaaliyhtälön (9) vektorikenttä $f(x) = Ax$ ja ratkaisut alkuarvoilla $x_0 = (0.3, 1)$, $x_0 = (-1, 1)$ ja $x_0 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$:

Matriisimuodossa yhtälö (9) on siis $\dot{x} = Ax$, missä $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Yhtälö(pari)n (9) ratkaisu on siis luettavissa edeltä: Yleinen ratkaisu on

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cos t + b_2 \sin t \\ -b_1 \sin t + b_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Ensimmäisissä harjoituksissa osoitettiin, että ratkaisujen määrittämät aika- t -kuvaukset $\phi^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\phi^t(b) = (b_1 e^{\lambda_1 t}, b_2 e^{\lambda_2 t})$$

muodostavat tason $\mathbb{R}^2$ virtauksen.

Propositio 3.3. *Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä, jolle jokaisen alkuarvotehtävän*

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on $\mathbb{R}$. Tällöin kuvaus $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$,

$$(11) \quad \phi(t, x) = \phi^t(x) = \psi_{0,x}(t)$$

on joukon U bijektio jokaiselle $t \in \mathbb{R}$ ja jokaiselle $s, t \in \mathbb{R}$ pätee $\phi^s \circ \phi^t = \phi^{s+t}$.

Todistus. Olkoon ϕ määritelty lausekkeella (14). Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Tällöin kaikille $s \in \mathbb{R}$ ja $b \in U$

$$\phi(s, \phi(t, b)) = \phi^s \circ \phi^t(b) = \phi^s(\psi_{0,b}(t)) = \psi_{0,\psi_{0,b}(t)}(s) = \Psi_1(s)$$

ja

$$\phi(s+t, b) = \phi^{s+t}(b) = \psi_{0,b}(s+t) = \Psi_2(s)$$

Molemmat kuvaukset $\Psi_1, \Psi_2: \mathbb{R} \rightarrow U$ ovat differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisuja. Lisäksi

$$\Psi_1(0) = \psi_{0,\psi_{0,b}(t)}(0) = \psi_{0,b}(t) = \Psi_2(0),$$

joten yksikäsitteisyyslauseen nojalla $\Psi_1 = \Psi_2$. Siis yhtälö $\phi^s \circ \phi^t = \phi^{s+t}$ pätee.

Koska erityisesti

$$\phi^t \circ \phi^{-t} = \phi^0 = \text{id} = \phi^{-t} \circ \phi^t$$

kaikille $t \in \mathbb{R}$, niin $\phi^{-t} = (\phi^t)^{-1}$. Siis kuvaukset ϕ^t ovat bijektioita. $\square$

Osoitamme seuraavaksi, että toisiaan riittävän lähellä olevia alkuarvoja vastaavat ratkaisut pysyvät lähellä toisiaan. Koska Proposition 3.3 mukaan Lauseessa 3.7 tarkasteltu differentiaaliyhtälö määrää kuvausperheen, joka toteuttaa virtauksen määrittelyssä vaadittavan yhtälön, tämä havainto auttaa viimeistelemään tuloksemme differentiaaliyhtälöryhmien ja virtauksen yhteydestä. Käytämme yleistä metristen avaruuksien tulosta:

Propositio 3.4. *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus, ja olkoon Y metrinen avaruus. Olkoon $0 < K < 1$ ja olkoon $F: X \times Y \rightarrow X$ jatkuva kuvaus, jolle kuvaus $F_y = F(\cdot, y): X \rightarrow X$ on K -kutistava kuvaus jokaiselle $y \in Y$. Olkoon $g: Y \rightarrow X$ kuvaus, jonka arvo pisteessä y on kuvauksen F_y kiintopiste. Tällöin kuvaus g on jatkuva.*

Todistus. Havaitaan, että kaikille $x \in X$ pätee

$$d(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^k d(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) + d(F_y^{k+1}(x), g(y)) ,$$

joten

$$(12) \quad d(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} d(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) = \frac{1}{1-\lambda} d(x, F_y(x)),$$

sillä äärellinen summa on pienempi kuin $\frac{1}{1-\lambda} d(x, F_y(x))$ ja $d(F_y^{k+1}(x), g(y)) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$, koska $g(y)$ on kutistavan kuvauksen F_y kiintopiste. Valitaan $x = g(y') = F(g(y'), y')$, jolloin epäyhtälö (12) antaa

$$d(g(y'), g(y)) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(F(g(y'), y'), F(g(y'), y)) .$$

Koska kuvaus F on jatkuva, niin $d(F(g(y'), y'), F(g(y'), y)) \rightarrow 0$, kun $y' \rightarrow y$, mistä väite seuraa. $\square$

Olko $X = C^0([a-\delta, a+\delta], \mathbb{R}^n)$, $Y = \mathbb{R}^n$ ja $F: X \times Y \rightarrow X$,

$$F(\phi, b) = \mathcal{P}_{a,b}(\phi)$$

ja varustetaan $X \times Y$ metriikalla d_i , joka määritellään

$$d_1((\phi_1, b_1), (\phi_2, b_2)) = d_X(\phi_1, \phi_2) + d_Y(b_1, b_2) .$$

Propositio 3.5. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ M -Lipschitz- jatkuva. Olkoon $\Phi_{a,b}$ alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $f(a) = b$ ratkaisu. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on $\eta > 0$, jolle*

$$\|\Phi_{a,b} - \Phi_{a,b'}\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \|\Phi_{a,b}(t) - \Phi_{a,b'}(t)\| < \epsilon,$$

jos $\|b - b'\| < \eta$.

Todistus. Riittää osoittaa, että kuvaus F on jatkuva. Kolmioepäyhtälön avulla saamme

$$\begin{aligned} d_X(F(\phi_1, b_1), F(\phi_2, b_2)) &= \max_{t \in [a-\delta, a+\delta]} \|b_1 - b_2 + \int_a^t (f(\phi_1(s)) - f(\phi_2(s))) ds\| \\ &\leq \|b_1 - b_2\| + M\delta d_X(\phi_1, \phi_2) . \end{aligned}$$

Väite seuraa Propositioista 3.4. $\square$

Lause 3.6. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä, jolle jokaisen alkuarvotehtävän

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on $\mathbb{R}$. Tällöin $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$,

$$(14) \quad \phi(t, x) = \phi^t(x) = \psi_{0,x}(t)$$

on joukon U virtaus.

Todistus. Väite seuraa Propositioista 3.3 ja 3.5. □

Lauseen 3.6 antama virtaus on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ määräämä virtaus tai vektorikentän f määräämä virtaus. Voidaan osoittaa, että, jos C^1 -kuvaus $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ on virtaus joukossa U , niin se on vektorikentän $\frac{\partial}{\partial t} \phi(0, x)$ määräämä virtaus.

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssilla osoitetaan seuraava tulos:

Lause 3.7. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva vektorikenttä. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on yksikäsitteinen funktio $\psi_{a,x_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, joka on alkuarvotehtävän

$$(15) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

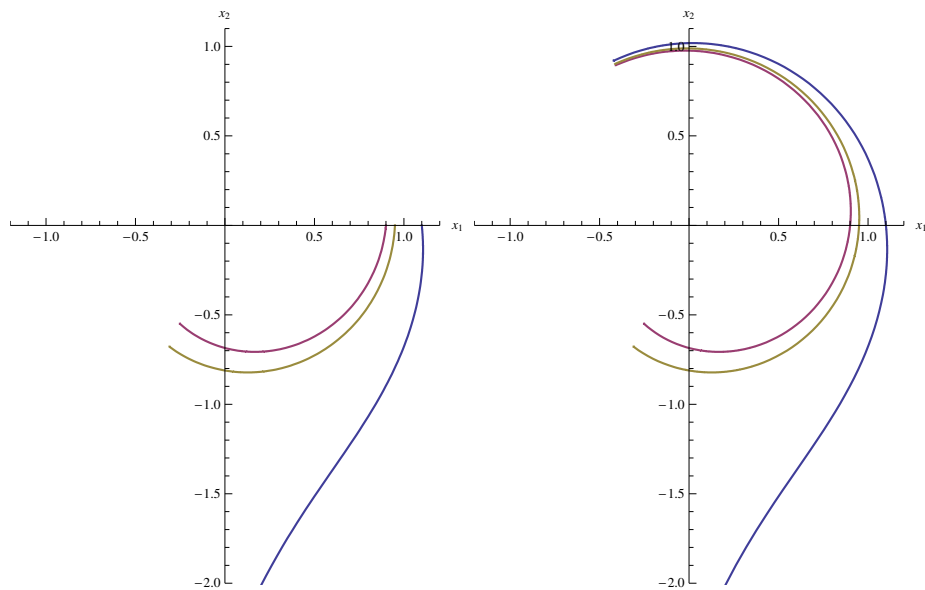
ratkaisu. □

Seuraus 3.8. Lipschitz-jatkuva vektorikenttä $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ määrää avaruuden $\mathbb{R}^n$ virtauksen. □

Esimerkki 3.9. Differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix}$$

ratkaisut alkuarvoilla $x_0 = (0.9, 0)$ ja $x_1 = (0.95, 0)$ käyttäytyvät samaan tapaan (itse asiassa kaikilla $t \in \mathbb{R}$), kun taas alkuarvolla $x_2 = (1.1, 0)$ käyttäytyminen on erilaista kuin alkuarvoilla x_0 ja x_1 , kun t kasvaa.



4. LINEAARISTEN AUTONOMISTEN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖIDEN DYNAMIIKKAA

Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi. Differentiaaliyhtälö $\dot{x} = Ax$ on *lineaarinen differentiaaliyhtälö*.

Luvussa 3 tarkastelimme kahta tason lineaarista differentiaaliyhtälöä $\dot{x} = Ax$, joiden ratkaisut käyttäytyvät selvästi eri tavoin: Esimerkin 7 differentiaaliyhtälön radat ovat nollan rataa lukuunottamatta rajoitettuja kun taas Esimerkin 3.2 radat ovat kaikki ympyröitä, siis rajoitettuja joukkoja.

Jos A on reaalinen $n \times n$ -matriisi, niin vektori $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ on matriisin A *ominaisvektori* ominaisarvolla $\lambda \in \mathbb{R}$, jos $Av = \lambda v$. Ominaisvektori on siis nollasta poikkeava vektori matriisia $A - \lambda I$ standardikannassa vastaavan lineaarikuvauksen ytimessä. Tästä nähdään, että matriisin A reaaliset ominaisarvot ovat matriisin A *karakteristisen polynomin*

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

reaaliset juuret. Lineaarialgebran kurssilla on tapana käsitellä ainoastaan reaalisia ominaisarvoja, mutta tällä kurssilla on luontevaa käsitellä myös karakteristisen polynomin kompleksisia juuria. Kutsumme näitäkin matriisin A ominaisarvoiksi, erityisesti *kompleksisiksi ominaisarvoiksi*.

Karakteristisen polynomin aste on n , joten Algebran peruslauseen (todistetaan Kompleksianalyysissa) mukaan karakteristisella polynomilla on algebrallinen kertaluku huomioiden n juurta. Ominaisarvon kertaluku karakteristisen polynomin juurena on sen *algebrallinen kertaluku*.

Matriisin A reaalista ominaisarvoa λ vastaavat ominaisvektorit muodostavat nolavektorin kanssa *ominaisavaruuden*

$$E_\lambda = E_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\}.$$

Ominaisavaruuden E_λ dimensio on ominaisarvon λ *geometrinen kertaluku*.

Esimerkki 4.1. (1) Matriisilla $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ei ole reaalisia ominaisarvoja. Sen karakteristinen polynomi on

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

joten sillä on kompleksiset ominaisarvot i ja $-i$.

(2) Matriisilla $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on yksi algebrallisesti kaksinkertainen ominaisarvo 1. Ominaisarvon 1 geometrinen kertaluku on 1: Ominaisvektorit määrittävä yhtälöryhmä $Av = v$ kutistuu yhtälöksi $v_2 = 0$, joka määrää 1-ulotteisen aliavaruuden.

Lineaarialgebrassa (LAG2) osoitetaan, että 2×2 -matriisi B on diagonalisoituva, jos sillä on kaksi eri (reaalista) ominaisarvoa. Toisaalta 2×2 -matriisi voi olla diagonalisoituva vaikka sillä olisi vain yksi ominaisarvo ($\lambda = \mu$ yllä), ja esimerkiksi matriisilla $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ei selvästi ole yhtään ominaisvektoria eikä siis yhtään reaalista ominaisarvoa, koska sitä standardikannassa vastaava lineaarikuvaus on kierto myötäpäivään kulman $\pi/2$ verran.

Jos $n \times n$ -matriisi A on diagonalisoituva, niin on avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta, joka koostuu matriisin A (tai sitä vastaavan lineaarikuvauksen $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L_A v = Av$) ominaisvektoreista. Erityisesti ominaisavaruuksien dimensioiden summa on n . Lineaarialgebran kurssilla osoitetuista tuloksista saadaan:

Propositio 4.2. $n \times n$ -matriisi A on diagonalisoituva, jos ja vain jos sen ominaisarvojen geometrinen kertalukujen summa on n

Jos A ja B ovat reaalisia $n \times n$ -matriiseja ja C on kääntyvä reaalinen $n \times n$ -matriisi, jolle $B = CAC^{-1}$, niin A ja B ovat toistensa *konjugaatteja* ja C on *konjugoiva matriisi*. Diagonalisoituva matriisi on siis jonkin diagonaalimatriisin konjugaatti. Lineaarialgebrassa osoitetaan seuraava tulos:

Propositio 4.3. *Olkoot A ja B reaalisia $n \times n$ -matriiseja, joille pätee $A = CBC^{-1}$ jollain kääntyvällä reaalisella $n \times n$ -matriisilla C . Tällöin*

- (1) *matriiseilla A ja B on samat ominaisarvot.*
- (2) *matriisia C vastaava lineaarikuvauksella $y = Cx$ kuvaa matriisin B ominaisvaruudet bijektiivisesti matriisin A ominaisvaruiksi.*

Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden yhteydessä konjugointi on usein kätevä väline seuraavan ominaisuuden vuoksi

Lemma 4.4 (Muuttujanvaihtolemma). *Olkoot A ja B $n \times n$ -matriiseja, joille pätee $A = CBC^{-1}$ jollain kääntyvällä C . Tällöin, jos x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisu alkuarvolla $x(0) = x_0$, niin $y = Cx$ on differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ ratkaisu alkuarvolla $y(0) = Cx_0$.*

Todistus. Ketjusäännön (Differentiaalilaskenta 1) nojalla

$$\dot{y}(x) = C\dot{x} = CBx = CBC^{-1}y. \quad \square$$

Esimerkki 4.5. Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 2 ja -2 . Sen ominaisvaruudet saadaan ratkaisemalla yhtälöparit $Av = 2v$ ja $Av = -2v$, jotka antavat vastaaville ominaisvaruuksille yhtälöt $v_1 = 3v_2$ ja $v_1 = -v_2$. Matriisi A voidaan diagonalisoida esimerkiksi matriisilla

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

jonka sarakkeet $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ovat ominaisvektoreita. Nythän, jos $B = \tilde{C}^{-1}A\tilde{C}$, niin

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{C}^{-1}A\tilde{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{C}^{-1}Aw_1 = \tilde{C}^{-1}2w_1 = 2\tilde{C}^{-1}w_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ja vastaavasti

$$(16) \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

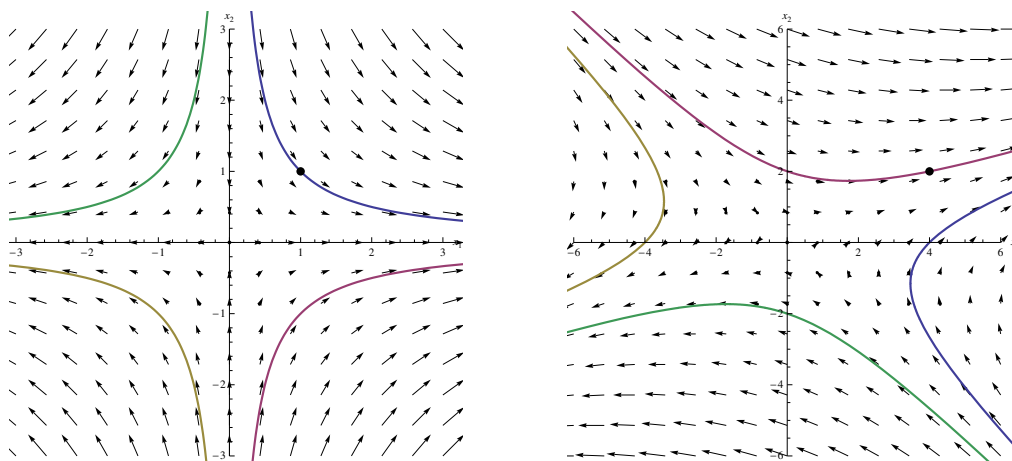
Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx, \\ x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases}$$

ratkaisu tunnetaan, se on $x(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{-2t} \end{pmatrix}$.

Lemman 4.4 mukaan

$$y(t) = \tilde{C}x(t) = \begin{pmatrix} 3ae^{2t} + be^{-2t} \\ ae^{2t} - be^{-2t} \end{pmatrix}$$



KUVA 4. Kaksi satulaa

on alkuarvotehtävän

$$(17) \quad \begin{cases} \dot{y} = Ax, \\ y(0) = \tilde{C} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases}$$

ratkaisu.

Matriisia $\tilde{C}$ vastaava lineaarikuvaus on siis muuttujanvaihto, joka liittää alkuarvotehtävät (16) ja (17), ja niiden ratkaisut toisiinsa.

Lause 4.6 (Konjugointilause). *Olko A reaalinen 2×2 -matriisi. Tällöin on käännettävä reaalinen 2×2 -matriisi C , jolle matriisi CAC^{-1} on*

- (1) *diagonaalimatriisi, jos matriisilla A on kaksi eri reaalista ominaisarvoa tai yksi geometrisesti kaksinkertainen reaalinen ominaisarvo,*
- (2) *muotoa $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, jos matriisilla A on yksi geometrisesti yksinkertainen reaalinen ominaisarvo, ja*
- (3) *vinosymmetrinen muotoa $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, jos matriisilla A ei ole reaalisia ominaisarvoja.*

Todistus. (1) Jos matriisilla A on kaksi eri ominaisarvoa, diagonalisoituvuus on todistettu kurssilla LAG2. Jos matriisilla A on geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo, koko taso $\mathbb{R}^2$ on sen ominaisavaruus ja A on diagonaalinen.

(2) Oletetaan, että matriisilla A on geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, ja olkoon u jokin ominaisvektori. Olkoon $v \in \mathbb{R}^2$ mikä tahansa vektori siten, että u ja v virittävät koko tason $\mathbb{R}^2$. Tällöin $Av = \mu u + \nu v$ joillekin $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$. Jos olisi $\nu \neq \lambda$, niin

$$A \left(\frac{\mu}{\nu - \lambda} u + v \right) = \lambda \frac{\mu}{\nu - \lambda} u + \mu u + \nu v = \nu \left(\frac{\mu}{\nu - \lambda} u + v \right),$$

joten $\nu \neq \lambda$ olisi ominaisarvo vastoin oletusta. Siispä $Av = \mu u + \lambda v$. Valitaan kannaksi u ja $w = v/\mu$. Tällöin $Au = \lambda u$ ja $Aw = \mu u/\mu + \lambda v/\mu = u + \lambda w$, joten matriisi on tässä kannassa haluttua muotoa.

(3) Oletetaan, että matriisilla A ei ole reaalisia ominaisarvoja. Tällöin sillä on kaksi kompleksista ominaisarvoa $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$. Ajatellaan A kompleksisena matriisina. Tällöin ominaisarvoa $\alpha + i\beta$ vastaa jokin ominaisvektori $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u \in \mathbb{C}^2$.

Havaitaan ensin, että $\operatorname{Re} u$ ja $\operatorname{Im} u$ ovat lineaarisesti riippumattomia reaalissa vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^2$: Jos näin ei ole, niin $\operatorname{Re} u = c \operatorname{Im} u$ jollain $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$(c + i)A \operatorname{Im} u = A((c + i) \operatorname{Im} u) = A(u) = (\alpha + i\beta)u = (\alpha + i\beta)(c + i) \operatorname{Im} u,$$

joten

$$A \operatorname{Im} u = (\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u,$$

mikä on mahdotonta, sillä $A \operatorname{Im} u$ on reaalinen vektori, kun taas $(\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u$ ei ole.

Kirjoitetaan matriisi Au komponenteittain kahdella tavalla: Koska A on reaalinen, pätee

$$Au = A(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = A(\operatorname{Re} u) + iA(\operatorname{Im} u).$$

Toisaalta

$$Au = (\alpha + i\beta)(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u + i(\beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u),$$

joten tarkastamalla reaali- ja imaginaariosat saadaan

$$A \operatorname{Re} u = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u$$

ja

$$A \operatorname{Im} u = \beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u.$$

Edellä oleva tarkastelu osoittaa, että avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannassa, jonka muodostavat vektorit $v_1 = \operatorname{Re} u$ ja $v_2 = \operatorname{Im} u$, matriisia A vastaava lineaarikuvauks käyttäytyy halutulla tavalla. Valitaan kannanvaihtomatriisiksi C matriisi, jonka sarakkeet ovat vektorien v_1 ja v_2 komponentit. Tällöin C on reaalinen, ja pätee

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_1 = C^{-1}(\alpha v_1 - \beta v_2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

ja

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_2 = C^{-1}(\beta v_1 + \alpha v_2) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad \square$$

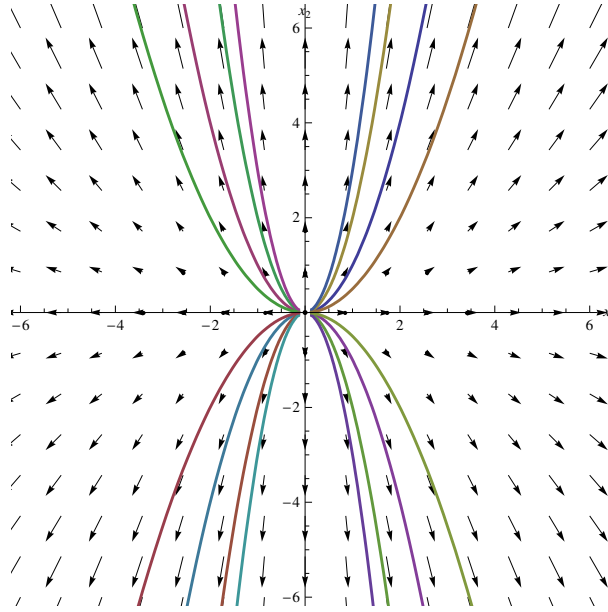
Tarkastelemme nyt tason lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja konjugaatioon antamissa eri tapauksissa. Seuraavassa A on 2×2 -matriisi:

Matriisi A on diagonalisoituva. Differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisut saadaan eksponenttifunktion avulla kuten esimerkissä 4.5. Ratkaisuja on ominaisarvojen merkeistä riippuen kolmea erilaista tyyppiä:

(1) Jos matriisilla A on kaksi ominaisarvoa, jotka ovat erimerkkisiä, ratkaisut käyttäytyvät kuten Esimerkissä 4.5. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *satulaksi*, katso kuvia Esimerkissä 4.5.

(2) Jos matriisilla A on kaksi negatiivista ominaisarvoa λ_1 ja λ_2 , ratkaisut saadaan samalla tavalla kuin esimerkissä 4.5. Ratkaisujen käyttäytyminen on kuitenkin erilaista: Differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisut alkuarvoilla, jotka ovat koordinaattiakseleilla, lähestyvät origoa eksponentiaalisesti akselia pitkin, kun $t \rightarrow \infty$. Muilla alkuarvoilla ratkaisut lähestyvät myös origoa, mutta kuvan mukaisia käyriä pitkin. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *nieluksi*. Huomaa, että ratkaisukäyrät ovat säteitä, kun $\lambda_1 = \lambda_2$.

(3) Jos matriisilla A on kaksi positiivista ominaisarvoa λ_1 ja λ_2 , ratkaisukäyrät ovat kuten nielulla, mutta ratkaisut liikkuvat vastakkaiseen suuntaan. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *lähteeksi*.



KUVA 5. Lähde

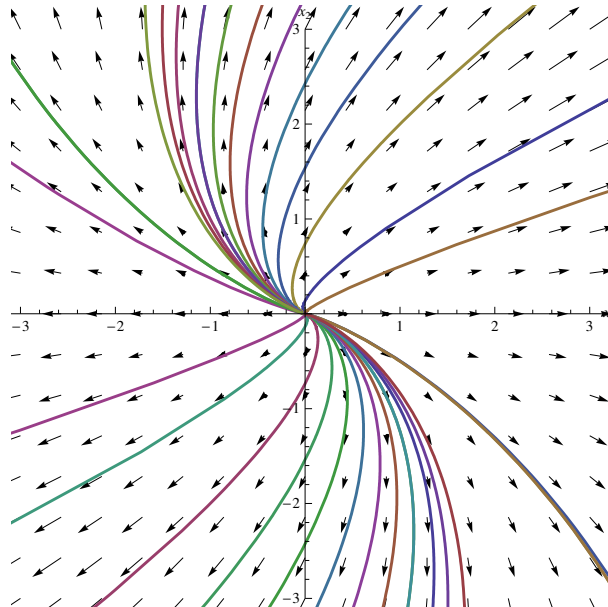
Matriisi A on konjugaatti matriisin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ kanssa. Kuvaus $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix}$$

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b)$.



KUVA 6. Surkastunut lähde

Jos matriisilla A on yksi ominaisarvo, jonka algebrallinen kertaluku on yksi ja geometrinen kertaluku on kaksi, niin Lauseen 4.6 nojalla A on matriisin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

konjugaatti jollain $\lambda \in \mathbb{R}$, ja differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisut saadaan Lemman 4.4 avulla. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *surkastuneeksi nieluksi*, jos $\lambda < 0$ ja *surkastuneeksi lähteeksi*, jos $\lambda > 0$.

Matriisi A on konjugaatti vinosymmetrisen matriisin kanssa Lauseen 4.6 mukaan kaikki reaaliset 2×2 -matriisit, jotka eivät ole diagonalisoituvia tai matriisin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ konjugaatteja jollain $\lambda \in \mathbb{R}$, ovat vinosymmetrisen matriisin $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ konjugaatteja joillain $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Kuvaus $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\alpha t} \left[a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} \right]$$

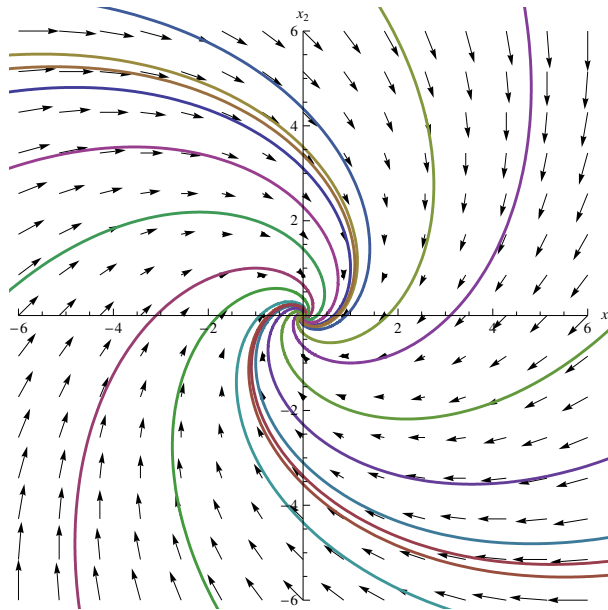
on alkuarvottehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$ ratkaisu.

(1) Jos $\alpha = 0$, niin ratkaisu on muotoa

$$x(t) = a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Tämä kuvaus parametrizoi ympyrän, jonka säde on $\sqrt{a^2 + b^2}$. Yleisessä tilanteessa ratkaisut parametrizovat ellipsin, joka saadaan kuvaamalla tämä ympyrä kannanvaihtokuvauksella. Tässä tapauksessa origo on *keskus*.

(2) Jos $\alpha < 0$, niin kerroin $e^{\alpha t}$ aiheuttaa sen, että ratkaisu lähestyy origoa, kun $t \rightarrow \infty$. Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella ja lähestyy sitä eksponentiaalisella nopeudella. Tässä tapauksessa origo on *spiraalinielu*.

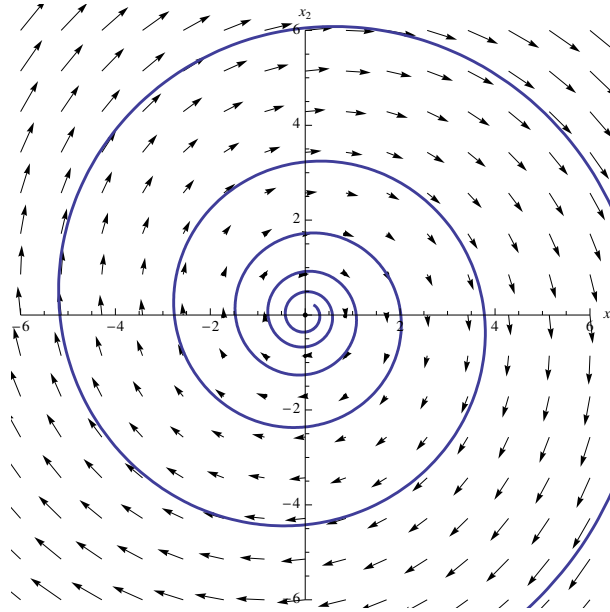


KUVA 7. Spiraalinielu

(3) Jos $\alpha > 0$, niin kerroin $e^{\alpha t}$ aiheuttaa sen, että ratkaisun normi kasvaa rajatta, kun $t \rightarrow \infty$. Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella ja etääntyy siitä eksponentiaalisella nopeudella. Tässä tapauksessa origo on *spiraallähde*.

Esimerkki 4.7. Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$



KUVA 8. Spiraalilähde

ominaisarvot ovat $\pm i$. Vektori $u = (1 + i, 1)$ on ominaisarvoa i vastaava ominaisvektori. Valitaan tason $\mathbb{R}^2$ kantavektoreiksi $\operatorname{Re} u = v_1 = (1, 1)$ ja $\operatorname{Im} u = v_2 = (1, 0)$ ja käytetään koordinaattimuunnosta

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyt siis

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisut parametrisoivat ympyröitä kuten edellä totesimme. Muuttujanvaihtoleman nojalla differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ ratkaisut ovat muotoa Cx , missä x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisu. Siis ratkaisut ovat ympyröiden kuvia lineaarikuvauksella C . Täsmällisemmin ne ovat käyriä, joiden pisteet toteuttavat yhtälön

$$r^2 = (C^{-1}x)^t C^{-1}x = x^t ((C^{-1})^t C)x = x^t Qx,$$

missä

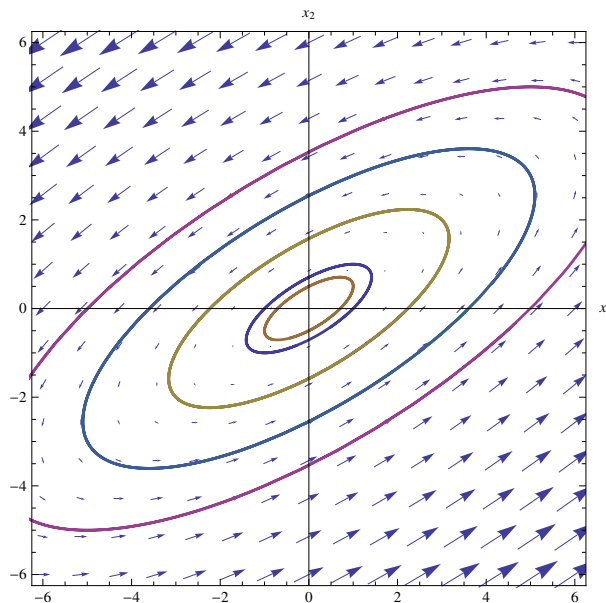
$$Q = (C^{-1})^t C = C^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

on symmetrinen matriisi ja kuvaus $x \mapsto x^t Qx$ on positiividefiniitti neliömuoto.

Matriisin Q ominaisarvot ovat $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ja niitä vastaaviksi ominaisvektoreiksi voimme valita (keskenään ortogonaaliset) vektorit $w_1 = (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)$ ja $w_2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)$. Matriisin Q ominaisvektoreiden muodostamassa kannassa neliömuoto on

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} z_1^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} z_2^2$$

joten ratakäyrät ovat standardimuotoisia ellipsejä vektoreiden w_1 ja w_2 muodostamassa ortogonaalisessa kannassa, katso kuva 4.



KUVA 9. Keskus

Esimerkki 4.8. Matriisia B

$$(18) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vastaava differentiaaliyhtälö $\dot{x} = Bx$ on helppo ratkaista, koska ensimmäiset kaksi koordinaattia muodostavat oman 2-ulotteisen systeeminsä: Kuvaus

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \\ ce^{-t} \end{pmatrix}$$

on ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Jos $c = 0$, niin ratkaisu pysyy x_1x_2 -tasossa ja on $\sqrt{a^2 + b^2}$ -säteisen ympyrän parametrisointi kuten esimerkissä 3.2. Jos taas $a = b = 0$, niin ratkaisu pysyy x_3 -akselilla ja lähestyy origoa eksponentiaalisella vauhdilla. Yleisen tilanteen ratkaisukäyrä kulkee sylinterillä

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}$$

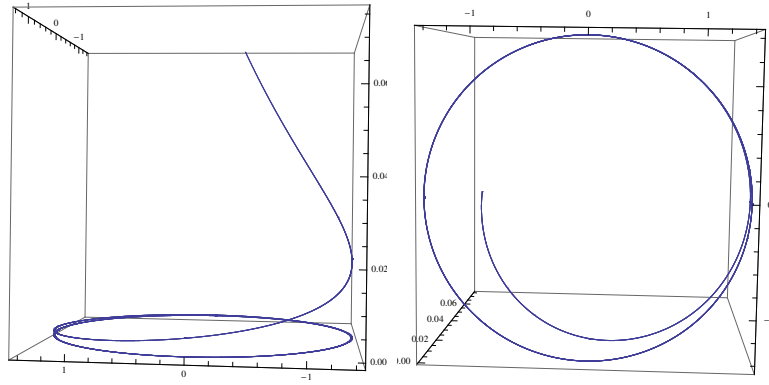
ja kasautuu kohti x_1x_2 -tason ympyrää

$$\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}.$$

Lause 4.6) on erikoistapaus tuloksesta, joka pätee kaikissa ulottuvuuksissa. Tämän yleisemmän tuloksen muotoilemiseksi tarvitsemme hieman terminologiaa: Jos $B_1, \dots, B_N$ ovat $n_1 \times n_1, \dots, n_N \times n_N$ -neliomatriiseja, ja $\sum_{i=1}^N n_i = n$, niin matriiseista $B_1, \dots, B_N$ muodostettu matriisi

$$\text{diag}(B_1, \dots, B_N) = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_N \end{pmatrix},$$

jossa loput $n^2 - \sum_{i=1}^N n_i^2$ kerrointa ovat nollia, on *blokkidiagonaalimatriisi*, jonka blokkeja ovat matriisit B_i . Blokin B_i koko on n_i .



KUVA 10. Kaksi eri näkymää differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisusta alkuarvolla $x(0) = (1, 1, 1)$, kun B on kaavan (18) matriisi.

Lause 4.9 (Jordanin kanoninen muoto). *Olkoon A reaalinen $n \times n$ -neliömatriisi, ja olkoot $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_M, \bar{\lambda}_M$ sen eri ominaisarvot. Olkoot a_i ja g_i ominaisarvon λ_i algebrallinen ja geometrinen kertaluku. Tällöin A voidaan konjugoida reaalisella matriisilla blokkidiagonaalimuotoon, jossa jokainen blokki on joko muotoa*

$$(\lambda_i) \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

jos λ_i on reaalinen, tai

$$C_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} C_{\lambda_i} & I_2 & & & \\ & C_{\lambda_i} & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & C_{\lambda_i} & I_2 \\ & & & & C_{\lambda_i} \end{pmatrix},$$

jos $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ ei ole reaaliluku. Reaalista ominaisarvoa λ_i vastaa g_i blokkia, joiden kokojen summa on a_i . Kompleksista ominaisarvoparia $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ vastaa g_i blokkia, joiden kokojen summa on $2a_i$.

Jordanin kanonisen muodon ja Lemman 4.4 avulla moniulotteiset tapaukset voidaan palauttaa helpommin käsiteltävään muotoon. Tällä kurssilla emme todista Lausetta 4.9, todistus esitetään monissa hieman edistyneemmän lineaarialgebran kirjoissa, esimerkiksi [HJ], [Ort].

5. KAAOS

Edellisten lukujen esimerkit ovat käsitelleet pääasiassa melko vakaata dynamiikka. Esimerkiksi kutistavien kuvausten tapauksessa kaikkien pisteiden radat lähestyvät samaa kiintopistettä eksponentiaalisella nopeudella. Tarkastelemme nyt monimutkaisempia systeemejä.

Diskreetti dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ diskreetti dynaaminen systeemi *topologisesti transitiivinen*, jos kaikille avoimille epätyhjille joukoille $U, V \subset X$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$. Yksi kaaokselta yleensä edellytettävistä piirteistä on *perhosefekti* eli herkkä riippuvuus alkuarvoista. Dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ *riippuu herkästi alkuarvoista*, jos on $\Delta > 0$ siten, että jokaisella $x \in X$ ja $\epsilon > 0$ on

$y \in B(x, \epsilon)$ ja $N \in \mathbb{N}$, joille $d(f^N(x), f^N(y)) \geq \Delta$. Herkkä riippuvuus alkuarvosta tarkoittaa, että pieni epätarkkuus lähtötilanteesta voi muuttaa tulevaisuuden kokonaan.

R. Devaney'n määritelmän mukaan dynaaminen systeemi on *kaoottinen*, jos

- (1) sen jaksollisten pisteiden joukko on tiheä,
- (2) se on topologisesti transitiivinen ja
- (3) se riippuu herkästi alkuarvoista.

Esimerkki 5.1. (1) Ympyrän kaikki pisteet ovat rationaalisen kierron jaksollisia pisteitä ja irrationaalinen kierto on topologisesti transitiivinen. Kuitenkaan kumpikaan näistä ei ole kaoottinen systeemi: Mikään ympyrän kierto ei riipu herkästi alkuarvosta sillä kierrot ovat ympyrän isometrioita: $d(R_\alpha(x), R_\alpha(y)) = d(x, y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{S}^1$.

(2) Lineaarikuvaus $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Lx = 2x$ riippuu herkästi alkuarvosta mutta ei ole kaoottinen: $\|L^k x - L^k y\| = 2^k \|x - y\| \rightarrow \infty$, kun $k \rightarrow \infty$, jos $x \neq y$.

Seuraava tulos osoittaa, että herkkä riippuvuus alkuarvoista seuraa kaoottisuuden määritelmän kahdesta ensimmäisestä kohdasta:

Lause 5.2. *Olko $f: X \rightarrow X$ jatkuva. Jos avaruus X ei koostu yhdestä jaksollisesta radasta ja f on kaoottinen, niin dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ riippuu herkästi alkuarvosta.*

Todistus. Katso [BBC⁺], [HK, Theorem 7.2.12]. □

Esimerkki 5.3. Olkoon $m \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Olkoon $E_m: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ kulman k -kertaistava kuvaus, jonka lauseke kulmaparametrin $s \in \mathbb{R}$ avulla lausuttuna on

$$E_m([s]) = [ms].$$

Kuvaus E_m on kaoottinen: Harjoituksissa tarkastimme, että E_2 on hyvin määritelty ja että jokaisella pisteellä $p \in \mathbb{S}^1$ on täsmälleen kaksi alkukuvaa kuvauksella E_2 . Yleisesti pätee vastaava tulos: E_m on jatkuva $m-1$ -kuvaus.

Olkoon $P_n(E_m) = \{x \in \mathbb{S}^1 : E_m^n(x) = x\}$. Kuten harjoituksissa tehtiin tapauksessa $m = 2$ voidaan tarkastaa, että

$$P_n(E_m) = \left\{ \left[\frac{k}{m^n - 1} \right] \in \mathbb{S}^1 : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Joukon P_n pisteet jakautuvat ympyrälle tasaisesti ja jakavat ympyrän $\mathbb{S}^1$ väleihin, joiden pituus on $\frac{1}{m^n - 1}$. On helppo tarkastaa, että jaksollisten pisteiden joukko

$$P(E_m) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n(E_m)$$

on tiheä.

Olkoon $U \subset \mathbb{S}^1$ avoin epätyhjä joukko. Tällöin U sisältää jonkin m -adisen välin

$$J = J_{m^N}^k = \left[\frac{k}{m^N}, \frac{k+1}{m^N} \right].$$

Siis $E_m(U) \subset E_m^N(J) = \mathbb{S}^1$. Siis kaikille epätyhjille $V \subset \mathbb{S}^1$ pätee $E_m^N(U) \cap V = V \neq \emptyset$, joten E_m on topologisesti transitiivinen.

Vaikka se ei loogisesti olekaan välttämätöntä Lauseen 5.4 nojalla, osoitetaan vielä herkkä riippuvuus alkuarvoista: Koska jokainen piste $x \in X$ sisältyy äärettömän moneen sisäkkäiseen m -adiseen väliin, jotka kuvautuvat koko ympyräksi kuvauksen E_m sopivilla iteraateilla, on jokaisella tällaisella välillä piste, joka kuvautuu toiselle puolelle ympyrää kuin x .

Esimerkin 5.3 lopussa osoitimme itse asiassa, että kuvaus E_m on *topologisesti sekoittava*: kaikille avoimille epätyhjiille joukoille $U, V \subset X$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ kaikille $n \geq N$.

Tarkastelemme seuraavaksi topologista transitiivisuutta. Metrinen avaruus X on *separoituva*, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko. Esimerkiksi $\mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$, $\mathbb{S}^1 = \overline{\{[q] : q \in \mathbb{Q}\}}$. Toisaalta, jos Y on ylinumeroituva joukko varustettuna *diskreetillä metriikalla* $d(a, b) = 1$ kaikilla $a \neq b$, niin Y ei ole separoituva.

Piste $x \in X$ on *eristetty*, jos $B(x, r)$ on äärellinen joukko jollain $r > 0$. Esimerkiksi kaikkien diskreettien metrinen avaruuksien kaikki pisteet ovat eristettyjä.

Lause 5.4. *Olko $f: X \rightarrow X$ jatkuva. Jos systeemillä $f: X \rightarrow X$ on tiheä rata ja avaruudessa X ei ole eristettyjä pisteitä, niin f on topologisesti transitiivinen. Jos X on täydellinen ja separoituva ja f on topologisesti transitiivinen, niin sillä on tiheä rata.*

Todistus. Oletetaan, että on $x \in X$, jolle $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$. Olkoot U ja V epätyhjiä avoimia joukkoja. Tällöin on $n_U \in \mathbb{N}$ siten, että $y_U = f^{n_U}(x) \in U$. Pisteen y_U rata on tiheä koska metrisessä avaruudessa X ei ole eristettyjä pisteitä. Siis on N_V siten, että $f^{N_V}(y_U) \in V$, mikä osoittaa, että f on topologisesti transitiivinen.

Oletetaan sitten, että f on topologisesti transitiivinen. Olkoon A metrisen avaruuden X numeroituva tiheä osajoukko. Olkoon

$$\{U_k : k \in \mathbb{N}\} = \{B(a, r) : a \in A, r \in \mathbb{Q}_+\}.$$

Osoitamme, että on $x \in X$, jolle $\mathcal{O}_f^+(x) \cap U_k \neq \emptyset$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Koska jokainen avoin joukko sisältää ainakin yhden joukon kokoelmasta $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ (itse asiassa äärettömän monta joukkoa), niin tällaisen pisteen x rata on tiheä.

Topologisen transitiivisuuden nojalla on $N_1 \in \mathbb{N}$, jolle $f^{N_1}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Valitaan $a_i \in A$ ja $0 < r_1 \leq \frac{1}{2}$ siten, että $\overline{B}(a_1, r_1) \subset U_1 \cap f^{-N_1}(U_2)$. Samoin on $N_2 \in \mathbb{N}$ siten, että $B(a_1, r_1) \cap f^{-N_2}(U_3)$ on avoin epätyhjä joukko. Valitaan $a_2 \in A$ ja $0 < r_2 < 2^{-2}$, jne. Näin saadaan Cauchyn jono (a_k) , joka täydellisyyden nojalla suppenee kohti raja-arvoa $a \in X$. Konstruktiosta seuraa, että $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B(a_k, r_k)$, joten $f^{N_k}(a) \in U_{k+1}$ kaikilla $k \geq 1$. $\square$

Esimerkki 5.5. Lauseen 5.4 nojalla kulman m -kertaistavalla kuvauksella $E_m: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ on tiheä rata. Todistus ei anna esimerkkiä pisteestä, jonka rata on tiheä, mutta sellainen voidaan antaa melko helposti.

Tarkastellaan kuvausta E_2 . Jokainen ympyrän piste voidaan esittää muodossa

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i} \right]$$

ja kuvaus E_2 sopii tämän esityksen kanssa hyvin yhteen:

$$E_2\left(\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}\right]\right) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{2^i}\right].$$

Olko $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ jono, joka saadaan luettelemalla kaikki äärelliset jonot, jotka voidaan muodostaa numeroista 0 ja 1:

$$(19) \quad 01000110110000001010011100101110111 \dots$$

Olko

$$p = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \right] \in \mathbb{S}^1.$$

Huomaamme, että

$$J_{2^N}^k = [\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}] = \{ [\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}] : \sum_{i=1}^N b_i = k \}.$$

Siis sopivalla $M \in \mathbb{N}$ pätee $E_2^M(p) \in J_{2^N}^k$ mille tahansa dyadiselle välille, joten pisteen p rata on tiheä. Vastaavalla tavalla voidaan antaa esimerkki tiheästä radasta kuvaukselle E_m , kun $m \geq 3$, luettelemalla kaikki äärelliset jonot, jotka voidaan muodostaa numeroista 0, 1 ja 2.

Jonon (19) avulla saadaan esimerkki ehkä vielä mielenkiintoisemmasta radasta kuvaukselle E_3 : Kaikille jonoille $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ pätee

$$E_3([\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}]) = [\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{3^i}],$$

joten näemme Esimerkissä 1.5 esitellyn Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukon K kuva

$$[K] = \{[x] \in \mathbb{S}^1 : x \in K\}$$

on E_3 -invariantti.

Olkkoon

$$q = [\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2a_i}{3^i}] \in \mathbb{S}^1.$$

Kuten kuvauksen E_2 tapauksessa näemme, että sopivalla $M \in \mathbb{N}$ pätee $E_3^M(q) \in I_N^k$ mille tahansa $N \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Siis pisteen q radan sulkeuma on Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukon K kuva ympyrällä $\mathbb{S}^1$.

6. KONJUGOINTI JA SEMIKONJUGOINTI

Käytimme muuttujanvaihtolemmaa 4.4 apuna lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Muuttujanvaihto saattoi differentiaaliyhtälön sellaiseen muotoon, jossa se oli helppo ratkaista ja alkuperäisen tehtävän ratkaisu saatiin konjugoidun differentiaaliyhtälön ratkaisusta muuttujanvaihtokuvauksen avulla. Tässä luvussa tarkastelemme vastaavaa hieman yleisempää tekniikkaa diskreeteille systeemeille

Kuvaus $g: Y \rightarrow Y$ on kuvauksen $f: X \rightarrow X$ *topologinen tekijä*, jos on jatkuva surjektio $s: X \rightarrow Y$ siten, että $g \circ s = s \circ f$. Kuvaus s on *semikonjugoiva kuvaus*.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Jos kuvaus s on homeomorfismi, niin kuvaukset f ja g ovat *konjugaatteja* ja s on *konjugoiva kuvaus*.

Propositio 6.1. *Olkkoot $f: X \rightarrow X$ ja $g: Y \rightarrow Y$ jatkuvia kuvauksia ja olkkoon g kuvauksen f topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $s: X \rightarrow Y$. Tällöin*

- (1) *s kuvaa kuvauksen f jaksolliset radat kuvauksen g jaksollisiksi radoiksi.*
- (2) *s kuvaa kuvauksen f tiheet radat kuvauksen g tiheiksi radoiksi.*
- (3) *jos f on topologisesti transitiivinen, niin g on topologisesti transitiivinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraus 6.2. *Olkkoot $f: X \rightarrow X$ ja $g: Y \rightarrow Y$ jatkuvia kuvauksia ja olkkoon g kuvauksen f topologinen tekijä. Jos Y ei koostu yhdestä jaksollisesta radasta ja f on kaoottinen, niin g on kaoottinen.*

Todistus. Seuraa Propositioista 6.1 ja Lauseesta 5.2. □

Esimerkki 6.3. Tšebyšovin (Chebyshev) polynomi P_n on se yksikäsitteinen polynomi, jolle pätee

$$P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

kaikille $\theta \in \mathbb{R}$. Polynomien P_n lausekkeet saadaan de Moivren kaavasta:

$$P_2(x) = 2x^2 - 1, \quad P_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad P_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

ja niin edelleen.

Kuvaus $P_m: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ on kaoottinen. Tämä seuraa Seurauksesta 6.2, koska $P_m|_{[-1, 1]}$ on (määritelmänsä mukaan) kulman m -kertaistaistavan kuvauksen $E_m: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $s: \mathbb{S}^1 \rightarrow [-1, 1]$, $s([t]) = \cos(2\pi t)$.

Esimerkki 6.4. Telttakuvaus $T_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ja logistinen kuvaus $F_4: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $F_4(x) = 4x(1 - x)$ ovat semikonjugaatteja. Kuvaus F_4 on kuvauksen T_2 topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $s: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$s(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi t)) :$$

Nyhtäen, jos $x \in [0, \frac{1}{2}]$, pätee

$$s \circ T(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi t)) = 1 - \cos^2(2\pi x)$$

ja jos $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, niin kosinin jaksollisuuden ja parillisuuden nojalla pätee

$$s \circ T(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi(2 - 2t))) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi(-2t))) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi t)).$$

Toisaalta

$$F_4 \circ s(t) = 4(\frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi t)))(1 - \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi t))) = 1 - \cos^2(2\pi x).$$

Esimerkki 6.5. Olkoon $[K] \subset \mathbb{S}^1$ Esimerkissä 5.5 konstruoitu E_3 -invariantti Cantorin joukko. Olkoon $s: [K] \rightarrow \mathbb{S}^1$,

$$s([\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}]) = [\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i/2}{2^i}] = [\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}].$$

Kuvaus s on jatkuva (!) surjektio, jolle pätee $s \circ E_3 = E_2 \circ s$. Siis kuvaus $E_2: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ on kuvauksen $E_3: [K] \rightarrow [K]$ topologinen tekijä.

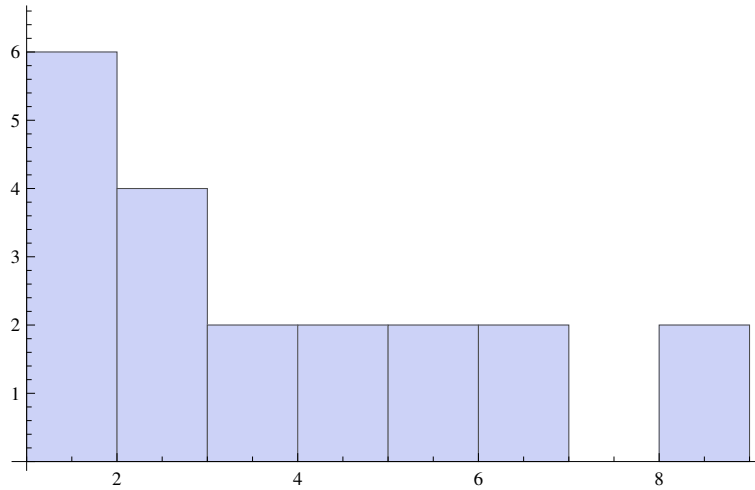
7. TASAINEN JAKAUTUMINEN

Luvun 2 kaksikymmentä ensimmäistä potenssia ovat 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576. Näiden lukujen ensimmäisten numeroiden jakauma joukossa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ näyttää mielenkiintoiselta

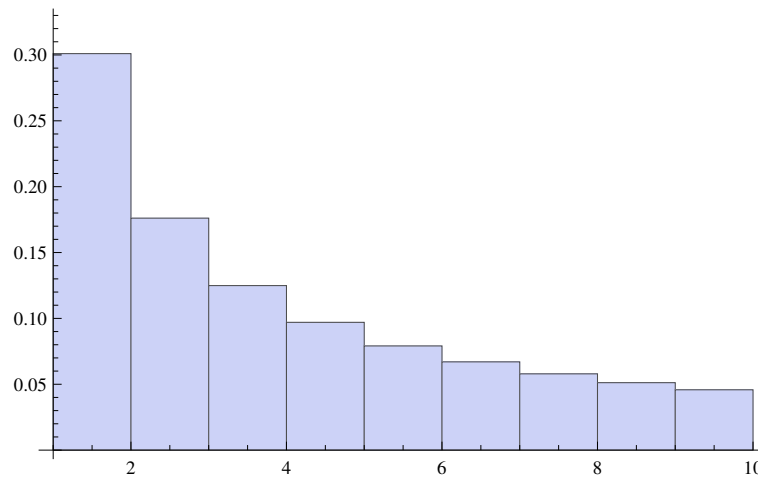
ja 10000 ensimmäisen näin muodostetun numeron jakauma esitettynä eri numeroiden suhteellisena esiintymistiheytenä näyttää vakiintuvan kohti tiettyä jakaumaa:

Luvun 2^n ensimmäinen numero on $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$, jos ja vain jos

$$k \cdot 10^\ell \leq 2^n \leq (k + 1) \cdot 10^\ell$$



KUVA 11. Lukujen 2^n ensimmäisten numeroiden jakauma, $1 \leq n \leq 20$.



KUVA 12. Suhteelliset taajuudet $\rho_{L_k}(0, 10000)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, kierrolle $R_{\log_{10}(p)}$,

eli

$$(20) \quad \log_{10} k + \ell \leq n \log_{10} 2 < \log_{10}(k+1) + \ell.$$

Dynaamisen tulkinnan kannalta mielenkiintoinen havainto on, että epäyhtälöpari (20) voidaan ilmaista ympyrälle kuvattuna muodossa

$$(21) \quad R_{\log_{10} 2}^n([0]) = [n \log_{10} 2] \in [\log_{10} k, \log_{10}(k+1)[= L_k.$$

Välit L_k , $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$ jakavat ympyrän $\mathbb{S}^1$ kymmeneen osaan, joiden pituudet ovat $\log_{10}(k) - \log_{10}(k-1)$. Näistä pituuksista muodostettu pylväsdiagrammi muistuttaa hyvin tarkasti Kuvan 12 jakaumaa. Huomaa, että $\log_{10} 2 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

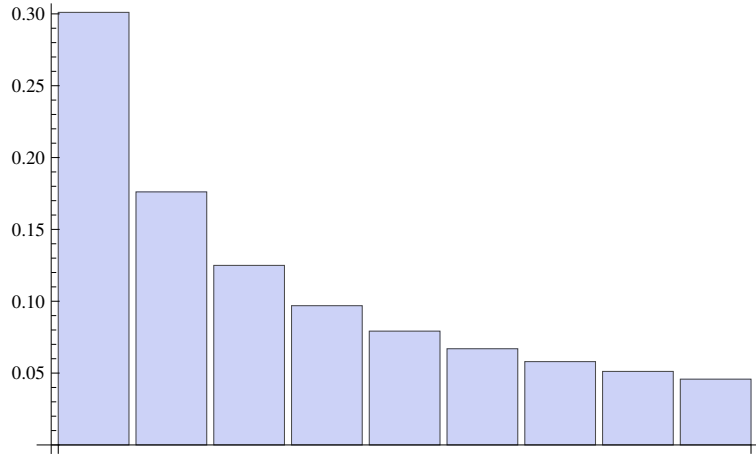
Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Olkoon $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ väli ja olkoon

$$\mathcal{N}_\Delta(n, x) = \#\{k \in [0, n] \cap \mathbb{N} : R_\alpha^n(x) \in \Delta\}.$$

Funktio $\rho: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$,

$$\rho_\Delta(n, x) = \frac{1}{n} \mathcal{N}_\Delta(n, x)$$

on *suhteellinen taajuus*, jolla pisteen x radan alkuosa iteraattiin $R_\alpha^n(x)$ saakka vieräilee välillä Δ . Olkoon välin $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ pituus $\lambda(\Delta)$.



Lemma 7.1. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ja olkoot $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{S}^1$ välejä. Jos Δ_1 on lyhyempi kuin Δ_2 , niin on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\mathcal{N}_{\Delta_1}(n, x) \leq \mathcal{N}_{\Delta_2}(n + N, x)$ kaikille $x \in \mathbb{S}^1$.*

Todistus. Harjoitus 5. □

Haluamme osoittaa, että jono $(\rho_\Delta(n, x))_{n \in \mathbb{N}-1}$ suppenee kohti raja-arvoa, joka on riippumaton pisteestä $x \in \mathbb{S}^1$. Tässä tarkastelussa on sujuvaa käyttää reaalilukujonon $(a_n)_{n \in \mathbb{N}-\{1\}}$ *yläraja-arvoa*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} a_m = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} a_m$$

ja *aläraja-arvoa*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} a_m = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} a_m,$$

jotka jokaisella jonolla on laajennetussa reaalilukujen joukossa

$$[-\infty, \infty] = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Reaalilukujonolla $(a_n)_{n \in \mathbb{N}-\{1\}}$ on raja-arvo täsmälleen silloin, kun sen ylä- ja alaraja-arvot yhtyvät. Tällöin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Lemma 7.2. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ja olkoot $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{S}^1$ välejä. Jos $\lambda(\Delta) = \frac{1}{k}$, niin*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(x, n) \leq \frac{1}{k-1}.$$

Todistus. Olkoot $V_j = [\frac{j-1}{k-1}, \frac{j}{k-1}] \subset \mathbb{S}^1$. Lemman 7.1 nojalla on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\mathcal{N}_\Delta(x, n) \leq \mathcal{N}_{V_j}(x, n + N)$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $j \in 1, 2, \dots, k-1$. Siispä

$$(k-1)\mathcal{N}_\Delta(x, n) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \mathcal{N}_{V_j}(x, n + N) = \mathcal{N}_{\mathbb{S}^1}(x, n + N) = n + N,$$

joten

$$(k-1)\rho_\Delta(n, x) \leq \frac{n + N}{n},$$

mistä väite seuraa. □

Ensimmäisten numeroiden jakauma selittyy seuraavan tuloksen avulla: Osoitamme, että irrationaalisen kierron rata on *tasaisesti jakautunut* ympyrällä.

Lause 7.3. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Olkoon $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ väli. Tällöin*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(n, x) = \lambda(\Delta).$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoon Δ' väli, joka sisältää välin Δ siten, että

$$\lambda(\Delta') = \frac{\ell}{k} < \lambda(\Delta) + \epsilon.$$

Nyt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Delta}(x, n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Delta'}(x, n) \leq \frac{\ell}{k-1} \leq (\lambda(\Delta) + \epsilon) \frac{k}{k-1}$$

Lemman 7.2 ja suhteellisen taajuuden additiivisuuden nojalla. Kun $\epsilon \rightarrow 0$, välttämättä $k \rightarrow \infty$, joten

$$(22) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Delta}(x, n) \leq \lambda(\Delta).$$

Välin Δ komplementin tarkasteleminen antaa

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{S}^1 - \Delta}(x, n) \leq \lambda(\mathbb{S}^1 - \Delta).$$

Koska aina pätee $\rho_{\Delta}(x, n) + \rho_{\mathbb{S}^1 - \Delta}(x, n) = 1$, niin

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Delta}(x, n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{S}^1 - \Delta}(x, n) = 1,$$

ja saamme

$$(23) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Delta}(x, n) \geq 1 - \lambda(\mathbb{S}^1 - \Delta) = \lambda(\Delta).$$

Väite seuraa epäyhtälöistä (22) ja (23). $\square$

Itse asiassa edellä tehty todistus käyttää luvusta 2 ainoastaan sitä ominaisuutta, että $\log_{10} 2$ on irrationaaliluku. Sama pätee kaikille luonnollisille luvuille, jotka eivät ole muotoa 10^m jollain $m \in \mathbb{N}$.

Seuraus 7.4. *Olkoon $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ ja oletetaan, että b ei ole luvun 10 monikerta. Tällöin*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{m \in \mathbb{N} \cap [0, n] : \text{luvun } b^n \text{ ensimmäinen numero on } k\}}{n} = \log_{10}(k) - \log_{10}(k-1).$$

Todistus. Yhdistä Lauseen 7.3 yleistys epäyhtälöparin (21) kanssa. $\square$

Lauseen 7.3 väite yleistyy välien karakterististen funktioiden avulla:

Lause 7.5. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Kaikille Riemann-integroituville funktioille $\phi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ pätee*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(R_{\alpha}^n(x)) = \int_{\mathbb{S}^1} \phi(s) ds.$$

Todistus. Olkoon $\mathbb{1}_A$ joukon A karakteristinen funktio eli indikaattorifunktio, joka saa arvon 1 joukossa A ja arvon 0 sen komplementissa. Ehto $R_{\alpha}^k(x) \in \Delta$ on yhtäpitävä ehdon $\mathbb{1}_{\Delta}(R_{\alpha}^k(x)) = 1$ kanssa. Siispä Lauseen 7.3 väite on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\Delta}(R_{\alpha}^n(x)) = \int_{\mathbb{S}^1} \mathbb{1}_{\Delta}(s) ds.$$

Funktion ϕ Riemann-integraali määritellään muotoa

$$\sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{\Delta_k}$$

olevien porraskätkien avulla, joille väite pätee lineaarisuuden nojalla. Yksityiskohtainen todistus esitetään esimerkiksi lähteessä [HK, Thm. 4.1.15]. $\square$

8. DYNAAMISTEN SYSTEEMIEN PARAMETRISOITUJA PERHEITÄ.

Tässä luvussa tarkastelemme esimerkkien avulla, miten pienet tai hieman suuremmatkin muutokset dynaamisissa systeemeissä muuttavat systeemin luonnetta. Samalla tutustumme joihinkin reaalilukujen joukon dynaamisten systeemien erityisominaisuuksiin.

Määrittelemme aluksi ratojen asymptoottista käyttäytymistä kuvaavia käsitteitä. Olkoon $f: X \rightarrow X$ dynaaminen systeemi. Piste x on *positiivisesti (tai eteenpäin) asymptoottinen pisteen p kanssa*, jos $d(f^n(x), f^n(p)) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow +\infty$ ja jos f on homeomorfismi, niin x on *negatiivisesti (tai taaksepäin) asymptoottinen pisteen p kanssa*, jos $d(f^n(x), f^n(p)) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow -\infty$. Pisteen p kanssa positiivisesti asymptoottiset pisteet muodostavat *pisteen p vakaan joukon* $W^s(p) = W_f^s(p)$ ja negatiivisesti asymptoottiset pisteet muodostavat *pisteen p epävakaa joukon* $W^u(p) = W_f^u(p)$.

Propositio 8.1. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja olkoon $x_0 \in I$ funktion $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ kiintopiste. Jos $|g'(x_0)| < 1$, niin on avoin g -invariantti väli $U \subset I$, joka sisältää pisteen x_0 siten, että pisteet $F^k(x)$ lähestyvät pistettä x_0 eksponentiaalisella nopeudella kaikille $x \in U$. Erityisesti $U \subset W^s(x_0)$. Puoleensavetävän kiintopisteen x_0 vakaa joukko on avoin.*

Todistus. Harjoitus 2. Avoimuus seuraa derivaatan jatkuvuudesta. □

Propositio 8.1 yleistyy moniulotteiseen tilanteeseen oleellisesti samalla todistuksella. Olkoon seuraavassa Dg kuvauksen $g: U \rightarrow U$ differentiaali.

Propositio 8.2. *Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko ja olkoon $x_0 \in V$ kuvauksen $g \in C^1(U, U)$ kiintopiste. Jos $\|Dg(x_0)\| < 1$, niin on g -invariantti avoin joukko $U \subset V$, joka sisältää pisteen x_0 siten, että pisteet $g^k(x)$ lähestyvät pistettä x_0 eksponentiaalisella nopeudella kaikille $x \in U$. Erityisesti $U \subset W^s(x_0)$. Puoleensavetävän kiintopisteen x_0 vakaa joukko on avoin.* □

Esimerkki 8.3. (a) Jos f on kutistava, niin kaikki pisteet ovat positiivisesti asymptoottisia yksikäsitteisen kiintopisteen kanssa.

(b) Olkoon $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Lx = (2x_1, \frac{1}{2}x_2)$. Kaikki pisteet $x \in \mathbb{R}^2$, joille $x_1 \neq 0$ ovat positiivisesti asymptoottisia pisteen $(x_1, 0)$ kanssa:

$$W_L^s(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 = x_1\}.$$

Vastaavasti, jos $x_2 \neq 0$, niin

$$W_L^u(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = x_2\}.$$

Jos x_0 on kuvauksen $f \in C^1(I, I)$ p -jaksollinen piste, niin

$$(f^p)'(x_0) = \prod_{x \in \mathcal{O}_f^+(x_0)} f'(x)$$

on vakio kaikille jaksollisen radan pisteille. Jos x_0 on kuvauksen f^p puoleensavetävä kiintopiste, niin sama pätee kaikille radan pisteille. Tällöin pisteen x_0 rata on *puoleensavetävä rata*.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli. Kuvauksen $f: I \rightarrow I$ dynamiikkaa on joskus hyödyllistä havainnollistaa *graafisella analyysillä*:

- (1) Piirretään samaan kuvaan tarkasteltavan funktion ja identtisen funktion kuvaajat.
- (2) Valitaan piste $x \in I$.
- (3) Piirretään pystysuora jana $[(x, x), (x, f(x))] \subset I \times I$.

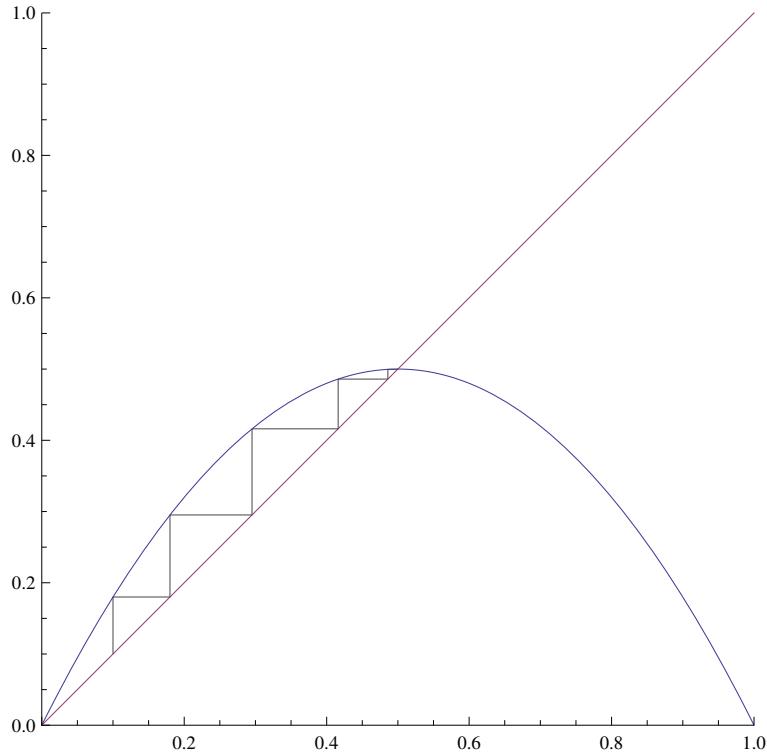
- (4) Piirretään vaakasuora jana $[(x, f(x)), (f(x), f(x))] \subset I \times I$.
 (5) Palataan vaiheeseen (3) ja korvataan $x \rightarrow f(x)$.

Graafisen analyysin ensimmäinen vaihe näyttää kuvauksen f kiintopisteet.

Seuraava tulos voi olla hyödyllinen graafisen analyysin paikkansapitävyyden perustelussa.

Lemma 8.4. *Olko $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli ja olko $f: I \rightarrow I$ monotoninen funktio. Tällöin jokaiselle $x \in I$ on kuvauksen f kiintopiste $p(x) \in I$, jolle pätee $f^k(x) \rightarrow p(x)$, kun $k \rightarrow \infty$.*

Todistus. Harjoitus 6. □



KUVA 13. Jos x_0 on kiintopiste, $|f'(x_0)| < 1$ ja alkuarvo x on riittävän lähellä pistettä x_0 , niin $f^n(x) \rightarrow x_0$ eksponentiaalisella nopeudella, jolloin kuva on esimerkiksi tällainen.

(Yhdestä parametrasta riippuva) *parametrisoitu perhe kuvauksia* välillä $I \subset \mathbb{R}$ on kahden muuttujan sileä funktio $G: \Lambda \times I \rightarrow I$,

$$G(\lambda, x) = g_\lambda(x)$$

missä $\Lambda \subset \mathbb{R}$ on väli ja $g_\lambda: I \rightarrow I$ on sileä funktio jokaisella $\lambda \in \Lambda$.

Useamman muuttujan differentiaalilaskennan perustuloksien avulla saamme osoitettua kiintopisteiden vakauden erikoispisteiden komplementissa:

Propositio 8.5. *Olko $G: \Lambda \times I \rightarrow I$ sileä kuvausperhe. Olkoot $\lambda_0 \in \Lambda$ ja $x_0 \in I$ siten, että x_0 on kuvauksen g_{λ_0} kiintopiste, $g'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$. Tällöin on avoimet välit $L \subset \Lambda$ ja $J \subset I$ siten, että $(\lambda_0, x_0) \in L \times J$ ja sileä funktio $p: L \rightarrow J$ siten, että $p(\lambda_0) = x_0$, $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ kaikille $\lambda \in L$ ja kuvauksella f_λ ei ole muita kiintopisteitä välillä I .*

Todistus. Olkoon $\tilde{G}(\lambda, x) = G(\lambda, x) - x$. Oletuksen nojalla $\tilde{G}(\lambda_0, x_0) = 0$ ja $\partial_x \tilde{G}(\lambda, x) = \partial_x G(\lambda, x) - 1 = g'_\lambda(x) - 1 \neq 0$. Implisiittifunktiolausesta voidaan nyt soveltaa, ja sen

mukaan on kuvaus $p: L \rightarrow J$, jolle $\tilde{G}(\lambda, p(\lambda)) = 0$ kaikilla $\lambda \in L$ riittävän pienillä L ja J kuten väitteessä. Lisäksi muille $(\lambda, x) \in L \times J$ pätee $\tilde{G}(\lambda, p(\lambda)) \neq 0$ $\square$

Vaikka Proposition 8.5 ehto toteutuu, kiintopisteen luonne voi muuttua parametrin liikkua ja lisäksi voi tapahtua erilaisia bifurkaatioita, esimerkiksi voi ilmaantua uusia jaksollisia ratoja. Seuraava esimerkki havainnollistaa, miten dynamiikka voi muuttua parametrisoidussa perheessä.

Esimerkki 8.6. Tarkastellaan *logististen kuvausten* perhettä $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu \in [1, \infty[$. Kuten teltafunktion T_3 tapauksessa havaitsimme, että kaikille $x \in \mathbb{R} - [0, 1]$ pätee $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$, kun $n \rightarrow \infty$, joten kaikki mielenkiintoinen dynamiikka tapahtuu yksikköväliä. Kun $1 \leq \mu \leq 4$, kuvauksen F_μ maksimi toteuttaa

$$0 \leq \max_{x \in [0,1]} F_\mu(x) = F_\mu\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1$$

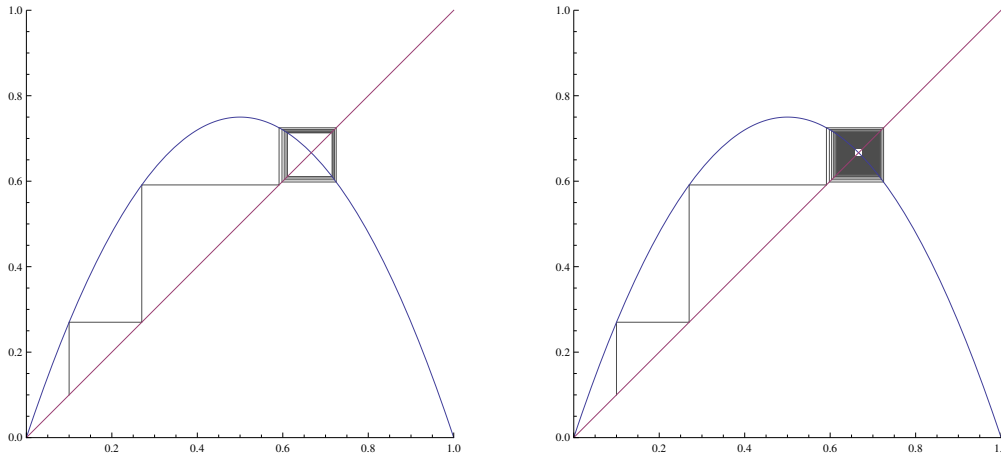
ja voimme rajoittua tarkastelemaan dynaamista systeemiä $F_\mu: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

On helppo tarkastaa, että 0 on kuvauksen F_1 epämääräinen kiintopiste: se hylkii negatiivisia lukuja ja vetää puoleensa kaikkia yksikkövälin pisteitä. Kuvauksella F_μ on kaksi kiintopistettä 0 ja $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$, kun $\mu > 1$.

Kun $\mu > 0$, niin 0 on hylkivä kiintopiste. Toinen kiintopiste p_μ on Proposition 2.2 nojalla puoleensavetävä kiintopiste, kun $1 < \mu < 3$ koska tällöin

$$|F'_\mu(p_\mu)| = |\mu - 2\mu p_\mu| = |2 - \mu| < 1.$$

Kun $\mu = 3$, $F'_\mu(p_\mu) = -1$ ja osoittautuu, että $p_3 = \frac{2}{3}$ on puoleensavetävä koko avoimella yksikköväliä. Nyt se ei kuitenkaan vedä pisteitä puoleensa eksponentiaalisella nopeudella vaan huomattavasti hitaammin. Kuva näyttää graafisen analyysin ensimmäiset 10 iteraatiota ja ensimmäiset 500 iteraatiota.

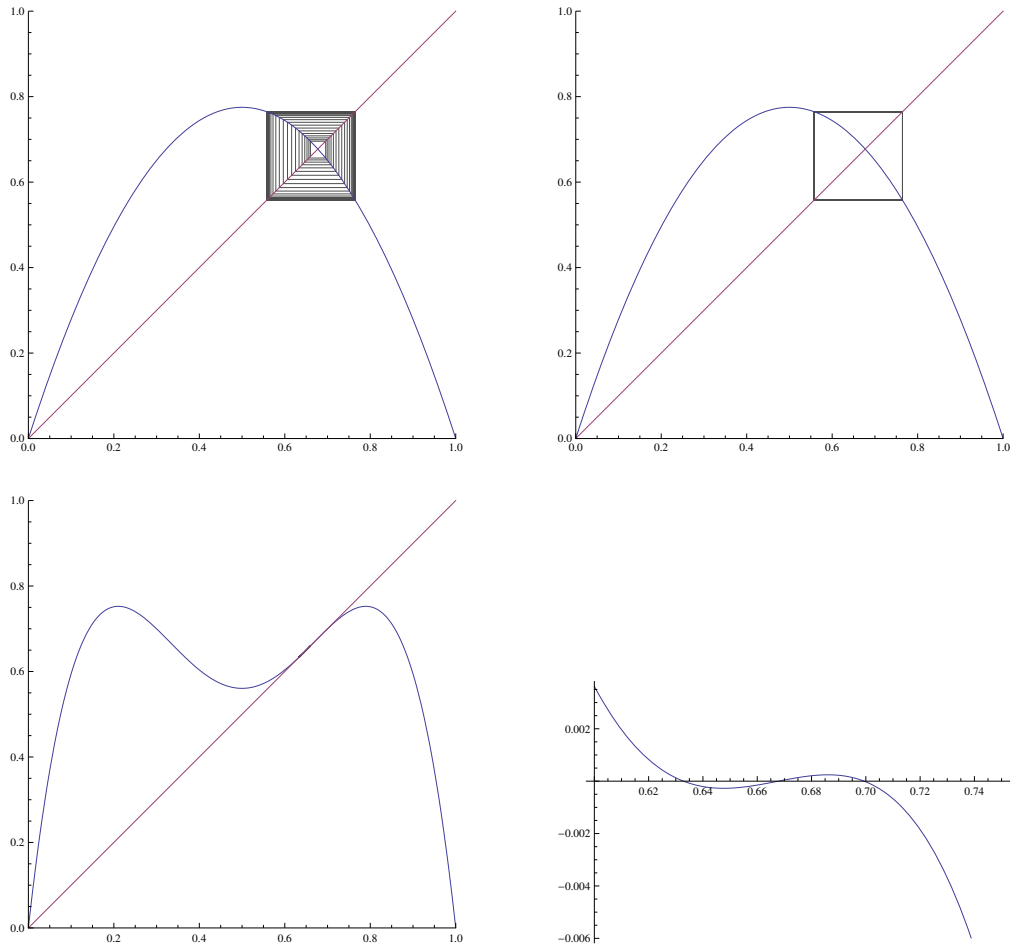


Kun $\mu > 0$, niin $|F'_\mu(p_\mu)| > 1$, joten p_μ on hylkivä. Tämän huomaa myös graafisella analyysillä. Vasen kuva näyttää 500 ensimmäistä iteraatiota alkuarvolla $x = 0.66$, joka on lähellä kiintopistettä ja oikeanpuoleinen kuva näyttää iteraatiot 450-500.

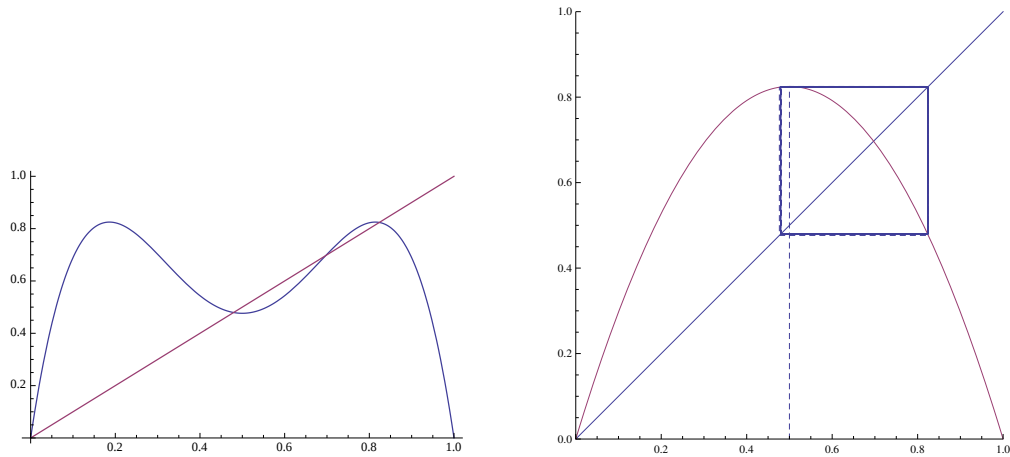
Radat lähestyvät nyt *puoleensavetävää rataa*, jonka jakso on 2. Tätä ilmentävät myös kuva funktion f^2 graafista ja erotuksesta $f^2 - \text{id}$ (Kuva 14).

Kun parametria μ kasvatetaan edelleen, dynamiikka säilyy luonteeltaan samanaikaisena, kuva 15 esittää tilannetta, kun $\mu = 3.3$.

Kun $\mu = 1 + \sqrt{6} \approx 3.4495$, ensimmäisten iteraatioiden perusteella näyttää, että dynamiikka on muuttunut, mutta jos jätämme radan alkuosan pois ja tarkastelemme vain iteraatioita 4950–5000, havaitsimme, että systeemillä näyttäisi olevan edelleen puoleensavetävä rata, jonka jakso on 2. Lasku osoittaa, että tällainen rata koostuu



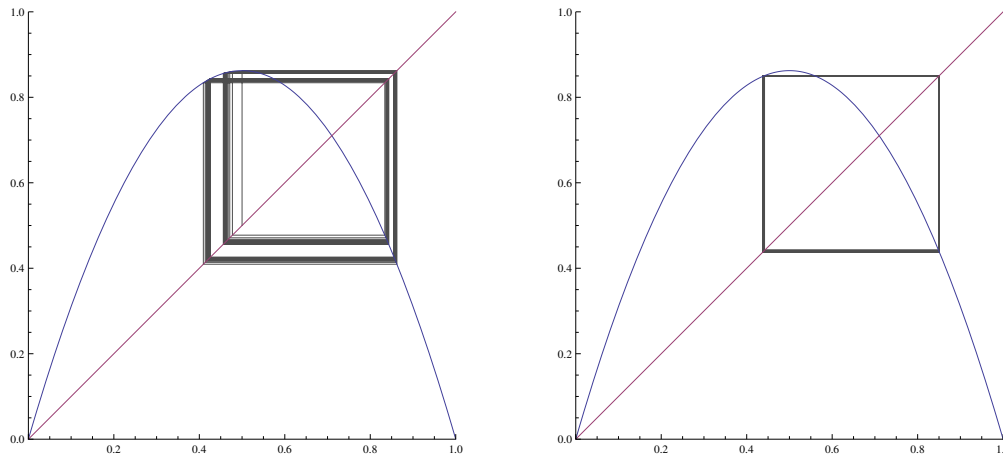
KUVA 14. Funktion $F_{3,1}$ toinen iteraatti.



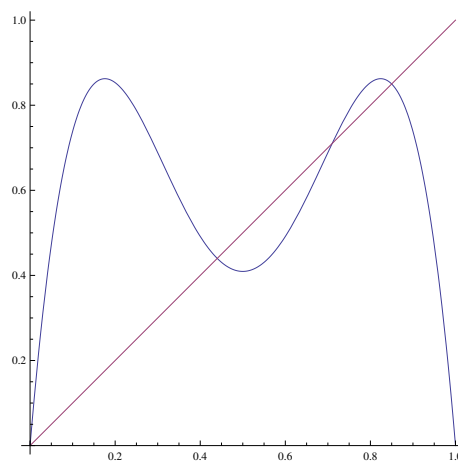
KUVA 15. $\mu = 3.3$.

pisteistä $1/10(4 + \sqrt{6} \pm \sqrt{14 - 4\sqrt{6}})$, joissa $(F_\mu^2)' = -1$, joten rata ei ole vahvasti puoleensavetävä, mikä on yhteensopiva edellä tekemämme havainnon kanssa.

Kun parametria μ kasvatetaan edelleen, ilmestyy 4-jaksollinen puoleensavetävä rata. Näillä parametreilla kuvauksella F_μ on edelleen myös kiintopiste ja 4-jaksolliseen rataa sisältämätön 2-jaksollinen rata, jotka ovat nyt kuitenkin hylkiviä. Parametrilla $\mu \approx 3.5440903596$ 4-jaksollinen rata muuttuu hylkiväksi ja ilmestyy puoleensavetävä 8-jaksollinen rata. Parametrilla $\mu = 3.55$ 8-jaksollinen puoleensavetävä rata



KUVA 16. $\mu = 1 + \sqrt{6}$.



KUVA 17. Kuvauksen $F_{\mu=1+\sqrt{6}}$ toinen iteraatti.

erottuu hyvin. Mutta mitä on tapahtunut parametrilla $\mu = 3.6$? Molemmista kuvissa on jätetty alusta noin 5000 iteraatiota huomioimatta.

Osoittautuu, että on ääretön kasvava parametrijono $(\mu_k)_{k=0}^\infty = 1, 3, 1 + \sqrt{6}, \dots$, jolla on se ominaisuus, että Kuvauksella F_μ on puoleensavetävä 2^k -jaksollinen rata, kun $\mu_{k-1} < \mu \leq \mu_k$. Lisäksi kuvauksella F_μ on 2^ℓ -jaksollinen hylkivä rata jokaisella $0 \leq \ell < k$. Tätä hallittua logistisen funktion dynamiikan monimutkaistumista parametrin kasvaessa kutsutaan *jakson kaksinkertaistavaksi sarjaksi* bifurkaatioita. Jono $(\mu_k)_{k=0}^\infty$ suppenee kohti raja-arvoa $\mu_\infty \approx 3.58$

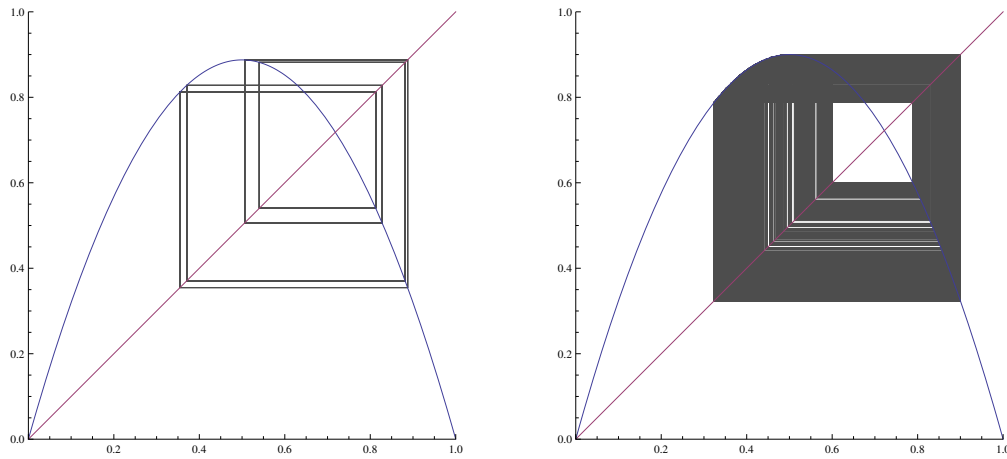
Saamme melko hyvän kuvan dynamiikan kehittymisestä piirtämällä *bifurkaatio-kaavion* Lasketaan tasavälisesti valituille parametriarvoille $\mu \in [0, 4]$ funktion F_μ kriittisen pisteen rataa melko pitkälle. Jos kuvauksella F_μ on "kohtuullisen mitainen" puoleensavetävä rata, niin pisteet $F_\mu^k(\frac{1}{2})$ ovat lähellä tätä rataa, kun k on riittävän suuri (Proposition 8.9 nojalla). (Olettaen tietenkin, että pyöristykset eivät aiheuta mainittavia laskuvirheitä.)

Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ *Schwarzin derivaatta* on

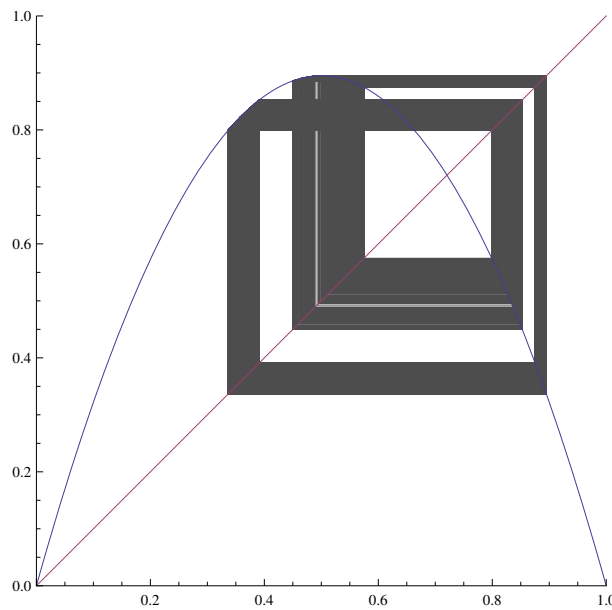
$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Lemma 8.7. Jos $f, g: I \rightarrow I$ ovat sileitä ja $Sf, Sg < 0$, niin $S(f \circ g) < 0$.

Todistus. Seuraa ketjusäännöstä. □



KUVA 18. $\mu = 3.55$ ja $\mu = 3.6$



KUVA 19. $\mu = 3.58 \approx \mu_\infty$

Lemma 8.8. Jos $Sf < 0$, niin funktiolla f' ei ole positiivista lokaalia maksimia eikä negatiivista lokaalia minimiä.

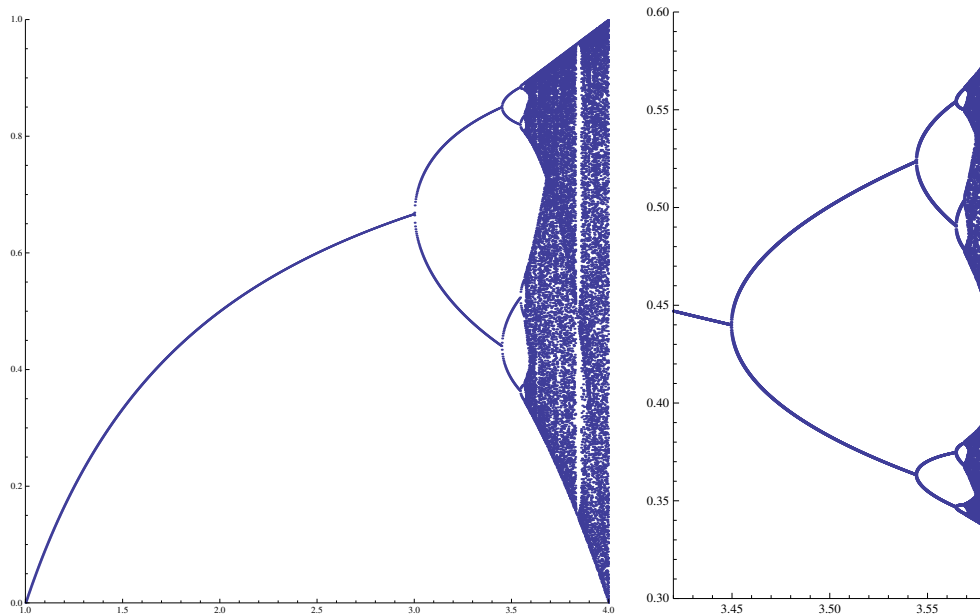
Todistus. Jos $f'(y_0) = f''(y_0) = 0$, niin $\frac{f'''(y_0)}{f'(y_0)} < 0$. Jos y_0 on derivaatan maksimi, niin $f'''(y_0) > 0$, joten $f'(y_0) < 0$. $\square$

Bifurkaatiadiagrammin uskottavuus perustuu Proposition 8.9. Sanotaan, että p -jaksollisen pisteen x_0 rata on *vahvasti puoleensavetävä*, jos $|(f^p)'(x_0)| < 1$.

Propositio 8.9. Jos kuvauksella F_μ on vahvasti puoleensavetävä jaksollinen rata, niin kriittinen piste $\frac{1}{2}$ sisältyy sen vakaaseen joukkoon.

Todistus. Olkoon x_0 puoleensavetävän p -jaksollisen radan piste ja olkoon $J =]c, d[\subset W^s(x_0) \subset I$ maksimaalinen avoin väli. Jos mikään väleistä $J, f(J), \dots, f^{p-1}(J)$ ei sisällä kriittistä pistettä, niin $f^p|_J$ on monotoninen. Oletetaan, että se on kasvava, toinen tapaus todistetaan samaan tapaan. Tällöin päätepisteet c ja d ovat p -jaksollisia koska ne eivät sisälly vakaaseen joukkoon.

Oletuksen mukaan $0 < (f^p)'(x_0) < 1$ ja suljetulla välillä $[c, d]$ ei ole muita kiintopisteitä. Väliarvolauseen nojalla on pisteet $c < c' < x_0 < d' < d$, joissa



KUVA 20. Logistisen perheen bifurkaatiokaavio, kun $\mu \in [1, 4]$ ja yksityiskohta.

$(f^p)'(c') = f(f^p)'(d') = 1$. Koska $SF_\mu < 0$, niin Lemmojen 8.7 ja 8.8 nojalla funktion F_μ^p derivaatalla ei ole positiivista maksimia, sillä on oltava nollakohta y_0 välillä $[c', d']$. Ketjusäännön mukaan pisteen y_0 rata sisältää funktion F_μ kriittisen pisteen. $\square$

Seuraus 8.10. Kuvauksella $F_\mu: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ on korkeintaan yksi vahvasti puoleen-savetävä rata. $\square$

Luonnollisten lukujen Sarkovskin järjestys määritellään

$$1 \prec 2 \prec 4 \prec \dots \prec 2^k \prec 2^{k+1} \prec \dots \\ \dots \prec 2^3 \cdot 5 \prec 2^3 \cdot 3 \dots \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \dots \prec 14 \prec 10 \prec 6 \dots \prec 7 \prec 5 \prec 3.$$

Lause 8.11 (Sarkovskin lause). Jos kuvauksella $f: I \rightarrow I$ on k -jaksollinen piste, niin sillä on ℓ -jaksollinen piste kaikilla $\ell \prec k$. Erityisesti, jos kuvauksella f on 3-jaksollinen piste, niin sillä on ℓ -jaksollinen piste kaikilla $\ell \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Todistus. Osoitamme vain jälkimmäisen väitteen. Koko väitteen todistus on esimerkiksi Devaney'n kirjassa [Dev, Thm. 10.2]. Aloitamme määritelmillä ja teknisillä tuloksilla, joita tarvitaan myös yleisen tilanteen tarkastelussa.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu väli ja olkoon $f: I \rightarrow I$ jatkuva. Väli $J \subset I$ välejä peittää välin $K \subset I$, jos $K \subset f(J)$. Jos J peittää välin K , merkitään $J \rightarrow K$.

Lemma 8.12. Jos $J \rightarrow I$, niin kuvauksella f on kiintopiste.

Todistus. Harjoitus 2. $\square$

Lemma 8.13. Jos $J \rightarrow K$, niin on väli $L \subset J$ siten, että $f(L) = K$.

Todistus. Harjoitus. $\square$

Lemma 8.14. Olkoot $A_0, A_1, \dots, A_n \subset I$ suljettuja välejä siten, että $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$. Tällöin on väli $\Delta \subset \bigcap_{i=1}^n f^{-i} A_i$ siten, että $f^n(\Delta) = A_n$.

Todistus. Lemman 8.13 nojalla on $\Delta_1 \subset A_0$, jolle $f(\Delta_1) = A_1$. Koska $\Delta_1 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$, niin Lemman 8.13 nojalla on $\Delta_2 \subset \Delta_1$, jolle $f^2(\Delta_2) = A_2$. Väite seuraa induktiolla. $\square$

Palaamme Lauseen 8.11 todistukseen. Oletetaan, että pisteet $a < b < c$ muodostavat 3-jaksoisen radan siten, että $f(a) = b$, $f(b) = c$ ja $f(c) = a$. Olkoot $I_0 = [a, b]$ ja $I_1 = [b, c]$. Välien I_0 ja I_1 peittämisrelaatiot voidaan kuvata kätevästi *Markovin graafilla*

$$I_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} I_1 \begin{array}{c} \hookrightarrow \\ \hookleftarrow \end{array} .$$

Lemman 8.12 nojalla välillä I_1 on kiintopiste. Lemman 8.13 nojalla on $I'_0 \subset I_0$, jolle pätee $f(I'_0) = I_1$. Väli I'_0 sisältää kuvauksen f^2 kiintopisteen x_2 Lemman 8.12 nojalla koska $I'_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I'_0$. Koska $f(I'_0) = I_1$, niin x_2 voi olla kuvauksen f kiintopiste vain, jos $x_2 = b$, mutta b ei ole kiintopiste, joten x_2 on 2-jaksollinen piste.

Olkoon sitten $n \geq 4$. Käytämme Lemmaa 8.13 useita kertoja. Olkoon $A_0 = I_1$. Koska $A_0 \rightarrow A_0$, niin on väli $A_1 \subset A_0$, jolle $f(A_1) = A_0$. Koska $A_1 \rightarrow A_1$, niin on väli $A_2 \subset A_1$, jolle $f(A_2) = A_1$. Induktiivisesti konstruoinimme välit $A_k \subset A_{k-1}$ siten, että $f(A_k) = A_{k-1}$ kaikille $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$. Nyt siis $f^{n-2}(A_{n-2}) = A_0 = I_1$, joten $I_0 \subset f^{n-1}(A_{n-12})$. Siis on $A_{n-1} \subset A_{n-2}$, jolle $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$.

Oletuksen mukaan $I_0 \rightarrow I_1$, joten Lemman 8.13 nojalla (sovellettuna kuvaukseen f^n) väli A_0 sisältää kuvauksen f^n kiintopisteen x_n . Koska $x_n, f(x_n), \dots, f^{n-2}(x_n) \in I_1$ ja $f^{n-1}(x_n) \in I_0$, niin piste x_n on n -jaksollinen.

□

VIITTEET

- [BBC⁺] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. On Devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99(4):332–334, 1992.
- [Con] J. H. Conway. On unsharable arithmetical problems. *Amer. Math. Monthly*, 120(3):192–198, 2013.
- [Dev] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Studies in Nonlinearity. Westview Press, Boulder, CO, 2003. Reprint of the second (1989) edition.
- [HK] B. Hasselblatt and A. Katok. *A first course in dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2003. With a panorama of recent developments.
- [HSD] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2004.
- [HJ] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.
- [Ort] J. M. Ortega. *Matrix theory*. The University Series in Mathematics. Plenum Press, New York, 1987. A second course.