

## Dynaamiset systeemit

### Harjoitus 9, 16.3.2010

1. Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz. Olkoon  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  autonomisen differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  määräämä kuvaus,

$$\phi(t, b) = \phi_t(b) = \psi_{0,b}(t),$$

missä  $\psi_{0,b}(t)$  on alkuarvotekhtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = b$  ratkaisu. Osoita, että

$$\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$$

kaikilla  $s, t \in \mathbb{R}$ .

2. Olkoon  $f: X \rightarrow X$  jatkuva avoin kuvaus. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- $f$  on topologisesti transitiivinen,
- avaruudessa  $X$  ei ole erillisiä avoimia epätyhjiä joukkoja,
- kaikki jatkuvat  $f$ -invariantit funktiot  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$  ovat vakioita.

3. Olkoon  $\omega \in \mathbb{R}^n$ . Olkoon  $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ , jolle  $k \perp \omega$ . Osoita, että joukko

$$\pi(k^\perp) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \perp k\} \pmod{\mathbb{Z}^n}$$

on toruksen  $\mathbb{T}^n$  suljettu aito  $\phi_t^\omega$ -invariantti osajoukko.

4. Osoita, että

$$G_\gamma = \overline{\mathcal{O}_{T_\gamma}(0)} = \{T_\gamma^k(0) : k \in \mathbb{Z}\}$$

on toruksen  $\mathbb{T}^n$  aliryhmä. Osoita, että pisteen  $x \in \mathbb{T}^n$  rata on sivuluokka  $G_\gamma x$ . Anna esimerkkejä tapauksista, joissa  $G_\gamma$  on

- toruksen  $\mathbb{T}^2$  0-ulotteinen aliryhmä.
- toruksen  $\mathbb{T}^2$  1-ulotteinen aliryhmä.
- toruksen  $\mathbb{T}^3$  2-ulotteinen aliryhmä.

Mitä osaat sanoa lineaarisen virtauksen  $\phi_t^\omega$  ratojen sulkeumista?

5. Olkoon  $A$  kokonaislukukertoiminen  $2 \times 2$ -matriisi, jonka determinantti on 1. Osoita, että

- $A$  määrää toruksen  $\mathbb{T}^2$  jatkuvan bijektion itselleen.
- matriisin  $A$  ominaisarvot ovat yksikköympyrällä tai ne ovat reaalisia irrationaalilukuja.
- jaksolliset pisteet ovat tiheässä toruksella  $\mathbb{T}^2$ .

6. Kuvaile matriisin  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  määräämän toruksen  $\mathbb{T}^2$  automorfismin dynamiikka.

---

<sup>3</sup>Vihje: Keksi vaikka sopiva jatkuva funktio.

<sup>4</sup>Vihje: Aliryhmän  $G_\gamma$  dimensio liittyy  $\mathbb{Q}$ -vektorialiavaruuden  $\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, 1 \rangle \subset \mathbb{R}$  dimensioon.