Dynaamiset systeemit
Harjoitus 8, 9.3.2010

Kuvaus $f\colon X \to X$ on *lopulta kutistava*, jos joillakin $c \geq 0$ ja $0 < \lambda < 1$

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq c\,\lambda^n\, d(x,y)$$

jokaiselle $x, y \in X$.

1. Olkoon X metrinen avaruus, ja olkoon $f\colon X \to X$ lopulta kutistava kuvaus parametreillä c ja λ. Olkoon $1 > \mu > \lambda$. Osoita, että *Lyapunovin metriikka*

$$d_\mu(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d(f^i(x), f^i(x))}{\mu^i}$$

on metrikan d kanssa ekvivalentti metriikka, jolle f on kutistava vakiolla μ.

———

2. Olkoon $A\colon V \to V$ hyperbolinen lineaarikuvaus. Olkoon $x \in V \setminus (E_- \cup E_+)$. Osoita, että on $c > 0, \lambda > 1$, joille $\|A^n x\| \geq c\,\lambda^n$ suurilla $n \in \mathbb{N}$. Jos A on kääntyvä, osoita, että vastaava pätee myös negatiivisille iteraateille.

3. Olkoon $\phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ autonomisen differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ määräämä kuvaus,

$$\phi_t(b) = \psi_{0,b}(t),$$

missä $\psi_{0,b}(t)$ on alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = b$ ratkaisu. Osoita, että

$$\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$$

kaikilla $s, t \in \mathbb{R}$.

4. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, ja olkoon X täydellinen. Olkoon $f\colon X \times Y \to X$ jatkuva kuvaus, jolle kuvaus $x \overset{f_y}{\mapsto} f(x,y)$ on kutistava vakiolla $\lambda < 1$ jokaisella $y \in Y$. Olkoon $k(y)$ kuvauksen f_y kiintopiste. Osoita, että kuvaus $k\colon Y \to X$ on jatkuva.

5. Olkoon $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$ tekijäkuvaus. Olkoon $S = \pi(\{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{T}^2$. Olkoon $\omega \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ja olkoon $f_\omega\colon S \to S$ lineaarista virtausta ϕ_t^ω vastaava *ensimmäisen paluun kuvaus*: jos

$$t(x) = \min\{t > 0 : \phi_t^\omega(x) \in S\},$$

niin $f_\omega(x) = \phi_{t(x)}^\omega(x)$.

Määritä kuvaus f_ω. Kuvaile sen dynamiikka. Mitä voit tämän perusteella päätellä lineaarisen virtauksen ϕ_t^ω dynamiikasta?