Dynaamiset systeemit
Harjoitus 7, 2.3.2010

1. Osoita, että jokainen reaalinen 2×2-matriisi voidaan konjugoida johonkin seuraavista muodoista:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{tai } \rho \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

missä $\lambda, \mu, \rho, \theta \in \mathbb{R}$.

Kuvaus $f\colon X \to X$ on *lopulta kutistava*, jos joillakin $c \geq 0$ ja $0 < \lambda < 1$

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq c\,\lambda^n\, d(x,y)$$

jokaiselle $x, y \in X$.

2. Olkoon X metrinen avaruus, ja olkoon $f\colon X \to X$ lopulta kutistava kuvaus parametreillä c ja λ. Olkoon $1 > \mu > \lambda$. Osoita, että *Lyapunovin metriikka*

$$d_\mu(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d(f^i(x), f^i(x))}{\mu^i}$$

on metrikan d kanssa ekvivalentti metriikka, jolle f on kutistava vakiolla μ.

Olkoon

$$B = \begin{pmatrix} \log\rho & \theta \\ -\theta & \log\rho \end{pmatrix}.$$

3. Osoita, että

$$e^B = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

4. Osoita, että differentiaaliyhtälöparin $\dot{x} = Bx$ ratkaisuradat ovat spiraaleilla $r = Ce^{(\log(\rho)/\theta)\phi}$ tai ympyröillä.

5. Kuvaile matriisia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vastaavan lineaarikuvauksen dynamiikka. Mitä voit sanoa pisteen $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ radasta?

6. Olkoon $A\colon V \to V$ hyperbolinen lineaarikuvaus. Olkoon $x \in V \setminus (E_- \cup E_+)$. Osoita, että on $c > 0, \lambda > 1$, joille $\|A^n x\| \geq c\,\lambda^n$ suurilla $n \in \mathbb{N}$. Jos A on kääntyvä, osoita, että vastaava pätee myös negatiivisille iteraateille.