

Dynaamiset systeemit

Harjoitus 6, 23.2.2010

1. Olkoon $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ suunnistuksen säilyttävä homeomorfismi, jonka kiertoluku on irrationaalinen, ja joka ei ole topologisesti transitiivinen.

- Olkoon $I \subset \mathbb{S}^1 \setminus \omega_f$ väli. Osoita, että kaikki välin I iteraatit ovat erillisiä.
- Osoita, että jokainen joukon $\mathbb{S}^1 \setminus \omega_f$ piste on positiivisesti ja negatiivisesti asymptoottinen joukon ω_f kanssa: $d(f^n(\xi), \omega_f) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \pm\infty$.

2. Olkoon f suunnistuksen säilyttävä homeomorfismi, jonka kiertoluku on rationaalinen, ja jonka kaikki pisteet eivät ole jaksollisia. Osoita, että kaikilla riittävän lähellä kuvausta f olevilla homeomorfismeilla g , joille $f \prec g$ tai $g \prec f$, on sama kiertoluku kuin kuvauksella f .

3. Olkoon $F = F_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_{a,b}(x) = x + a + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x),$$

missä a ja b ovat reaalityyppisiä lukuja.

- Millä vakion b arvoilla kuvaus F määrää ympyrän homeomorfismin?
- Olkoon $b_0 > 0$ vakio, jolle kaikki kuvaukset $F_{a,b}$, $(a, b) \in [0, 1] \times [0, b_0]$, määräävät ympyrän homeomorfismin. Osoita, että joukot

$$T_{b,\rho} = \{(a, b) \in [0, 1] \times [0, b_0] : \rho(F_{a,b}) = \rho\}$$

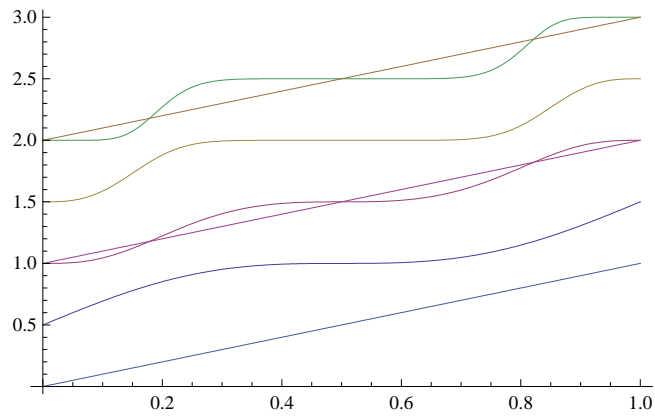
ovat suljettuja kaikilla $\rho \in \mathbb{R}$.

- Osoita, että jokaisella $b \in [0, b_0]$ ja jokaisella $\rho \in]0, 1[$ on $a \in]0, 1[$, jolle $\rho(F_{a,b}) = \rho$.
- Mitä osaat sanoa kuvauksesta $a \mapsto \rho(F_{a,b})$, kun $b \in [0, b_0]$?

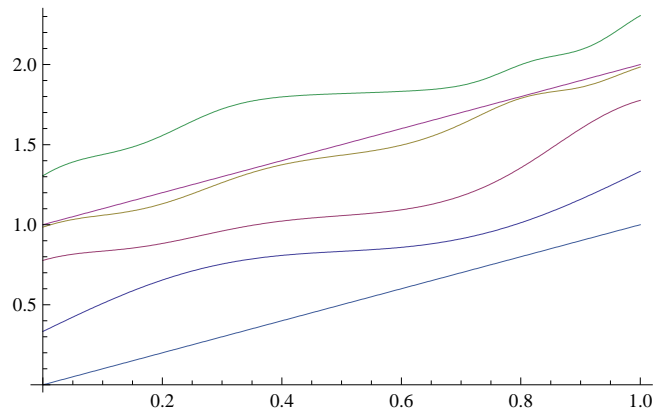
4. Osoita, että jokainen reaalinen 2×2 -matriisi voidaan konjugoida johonkin seuraavista muodoista:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ tai } \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

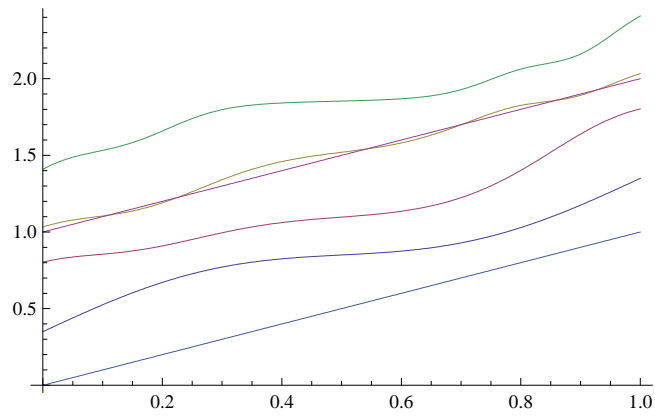
missä $\lambda, \mu, \rho, \theta \in \mathbb{R}$.



KUVA 1. Kuvauksen $F_{\frac{1}{2},1}$ neljä ensimmäistä iteraattia.



KUVA 2. Kuvauksen $F_{\frac{1}{3},0.8}$ kolme ensimmäistä iteraattia.



KUVA 3. Kuvauksen $F_{0.35,0.8}$ kolme ensimmäistä iteraattia.