

Dynaamiset systeemit

Harjoitus 5, 16.2.2010

1. Olkoon $F = F_{b,p,q,r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = x + \frac{p}{q} + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi r q x),$$

missä b on pieni reaaliluku, p ja q ovat suhteellisia alkulukuja ja r on luonnollinen luku. Kuvaile funktion F määräämän ympyrän homeomorfismin dynamiikka parametrin q ja r arvoilla $q \in \{1, 2, 3\}$, $r \in \{1, 2\}$.

2. Olkoot f ja h ympyrän homeomorfismeja, ja olkoot F ja H niiden nostoja. Osoita, että $H \circ F \circ H^{-1}$ on kuvauksen $h \circ f \circ h^{-1}$ nosto.

3. Olkoot f ja g ympyrän homeomorfismeja, jotka ovat topologisesti konjugaatteja. Osoita, että niillä on sama kiertoluku: $\rho(f) = \rho(g)$.

4. Olkoon f ympyrän homeomorfismi, jonka kiertoluku on irrationaalinen. Olkoon $x \in \mathbb{S}^1$, ja $I = [f^n(x), f^m(x)]$ joillakin $m, n \in \mathbb{N}$. Osoita, että jokainen rata $\mathcal{O}_f(x)$ leikkaa väliä I .

5. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu väli, ja olkoon $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että kuvauksella f on kiintopiste, jos $f(I) \subset I$ tai $f(I) \supset I$.

³Vihje: Muista, että kiertoluvun määrittelyssä käytettävä raja-arvo on tarkasteltavasta pisteestä riippumaton. Esimerkiksi kuvauksen f kiertolukua laskettaessa voi siirtyä tarkastelemaan pistettä $H^{-1}(x)$ kesken laskun...