

Dynaamiset systeemit
Harjoitus 4, 9.2.2010

1. Osoita, että telttakuvaus $T_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kun } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \text{kun } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

on kaoottinen.

2. Olkoon $S = \mathbb{S}^1 \times [0, 1] = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times [0, 1]$, ja olkoon $T : S \rightarrow S$,

$$T(x, y) = (x + y, y).$$

- Riippuuko dynaaminen systeemi $T : S \rightarrow S$ herkästi alkuarvoista?
- Onko sillä tiheää rataa?
- Ovatko jaksolliset pisteet tiheässä?

3. Olkoon $f : X \rightarrow X$ topologisesti sekoittava. Olkoon

$$\text{diam } X = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}$$

avaruuden X halkaisija. Osoita, että f riippuu herkästi alkuarvoista, ja että jokainen $0 < \Delta < \frac{1}{2} \text{diam } X$ on sen herkkyysvakio.

4. Päteekö edellisen tehtävän väite kaikille $0 < \Delta < \text{diam } X$?

—————

5. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva kasvava funktio. Miten pisteen $x \in \mathbb{R}$ rata voi käyttäytyä?

—————

6. Olkoon $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ jatkuva kuvaus, ja olkoon $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sen nosto. Osoita, että luku $F(x + 1) - F(x)$ ei riipu pisteestä $x \in \mathbb{R}$.