

Dynaamiset systeemit
Harjoitus 11, 6.4.2010

1. Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja $f: X \rightarrow X$ jatkuva kuvaus, ja olkoon

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq k \leq n} d(f^k(x), f^k(y)).$$

Osoita, että d_n on metriikka, joka määrää saman topologian kuin d .

2. Olkoon X kompakti metrinen avaruus, ja olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva kuvaus. Osoita, että

$$\text{span}(n, \epsilon, f) \leq \text{sep}(n, \epsilon, f) \leq \text{cov}(n, \epsilon, f).$$

Osoita, että topologisen entropian eri määritelmät ovat ekvivalentteja.

Metrisen avaruuden X *yläpallodimensio* on

$$\overline{\dim}_B(X) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\epsilon(X)}{-\log \epsilon},$$

missä $N_\epsilon(X)$ on pienin määrä ϵ -säteisiä palloja, joka peittää avaruuden X .

3. Olkoon X kompakti metrinen avaruus, jonka yläpallodimensio on äärellinen, ja olkoon $f: X \rightarrow X$ L -Lipschitz-kuvaus. Osoita, että

$$h_{\text{top}}(f) \leq \overline{\dim}_B(X) \max(0, \log L).$$

Homeomorfismi (vastaavasti jatkuva kuvaus) $f: X \rightarrow X$ on *ekspansiivinen*, jos on $\delta > 0$ siten, että jos kaikille $n \in \mathbb{Z}$ (vastaavasti kaikille $n \in \mathbb{N}$) pätee $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$, niin $x = y$. Tällöin δ on systeemin *ekspansiivisuusvakio*.

4. Osoita, että topologiset Markovin ketjut ovat ekspansiivisia.

5. Osoita, että toruksen hyperboliset automorfismit ovat ekspansiivisia homomorfismeja.

⁵Vihje: Tarkastele laajenevien ja kutistuvien aliavaruuksien kuvia toruksella.