Dynaamiset systeemit
Harjoitus 10, 23.3.2010

1. Olkoon A kokonaislukukertoiminen 2×2-matriisi, jonka determinantti on 1. Osoita, että

- A määrää toruksen $\mathbb{T}^2$ jatkuvan bijektion itselleen.
- matriisin A ominaisarvot ovat yksikköympyrällä tai ne ovat reaalisia irrationaalilukuja.
- jaksolliset pisteet ovat tiheässä toruksella $\mathbb{T}^2$.

2. Kuvaile matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ määräämän toruksen $\mathbb{T}^2$ automorfismin dynamiikka.

3. Kuvaile matriisin $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ määräämän toruksen $\mathbb{T}^2$ automorfismin dynamiikka.

4. Kuvaile matriisin $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ määräämän toruksen $\mathbb{T}^2$ automorfismin dynamiikka.

---

5. Olkoon $A = (a_{ij})$ $N \times N$-matriisi, jolle $a_{ij} \in \{0,1\}$ kaikilla $i, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Osoita, että

$$\Omega_A = \{\omega \in \Omega_N : a_{\omega_i \omega_{i+1}} = 1 \text{ kaikilla } i \in \mathbb{Z}\}$$

on kaksipuolisen jonoavaruuden Ω_N suljettu σ-invariantti osajoukko.