Dynaamiset systeemit
Harjoitus 1, 19.1.2010

Kuvaus $f\colon X \to X$ on *kutistava*, jos on $\lambda < 1$, jolle

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x,y)$$

kaikille $x, y \in X$.

1. Olkoon $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jatkuva funktio, jolle kuvaus $x \mapsto f(t_0, x)$ on M-Lipschitz kaikilla $t_0 \in \mathbb{R}$. Olkoot $t_0 \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ ja $\delta < 1/M$. Olkoon $\mathscr{P}\colon\ \mathrm{C}^0([t_0-\delta, t_0+\delta]) \to \mathrm{C}^0([t_0-\delta, t_0+\delta])$ *Picardin kuvaus*

$$\mathscr{P}[\phi](t) = b + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds.$$

(1) Osoita, että Picardin kuvaus on kutistava, kun avaruudessa $\mathrm{C}^0([a-\delta, a+\delta])$ käytetään sup-normin antamaa metriikkaa.

(2) Osoita, että alkuarvotehtävällä $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = b \end{cases}$ on yksikäsitteinen ratkaisu välillä $]t_0-\delta, t_0+\delta[$.

Kuvaus $f\colon X \to X$ on *heikosti kutistava*, jos

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y)$$

kaikille $x, y \in X$, $x \neq y$.

2. Anna esimerkki täydellisestä metrisestä avaruudesta X ja heikosti kutistavasta kuvauksesta $f\colon X \to X$, jolla ei ole kiintopistettä, ja jolle $d(f^n(x), f^n(y))$ ei suppene nollaan joillain x, y, kun $n \to \infty$.

Kuvaus $f\colon X \to X$ on *topologisesti transitiivinen*, jos kaikille epätyhjille avoimille joukoille $U, V \subset X$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$. Piste $x \in X$ on eristetty, jos joukko x on avoin. Todistamme myöhemmin seuraavan tuloksen:

Olkoon X separoituva lokaalisti kompakti metrinen avaruus, ja olkoon $f\colon X \to X$ jatkuva kuvaus, jossa ei ole eristettyjä pisteitä. Tällöin kuvauksella f on tiheä rata, jos ja vain jos f on topologisesti transitiivinen.

Kuvaus $f\colon X \to X$ on *topologisesti sekoittava*, jos kaikille avoimille, epätyhjille joukoille $U, V \subset X$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ kaikille $n \geq N$.

Olkoon $E_2\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ kulman kaksinkertaistava kuvaus $z \mapsto z^2$.

3. Määritä kuvauksen E_2 jaksolliset pisteet.

4. Osoita, että kuvaus E_2 on topologisesti sekoittava. Osoita, että kuvauksella E_2 on tiheä rata.

5. Olkoon $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ reaaliluvuista indusoidulla topologialla, ja olkoon $f\colon X \to X$ kuvaus, jolle $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ ja $f(0) = 0$. Onko systeemillä tiheä rata? Onko systeemi topologisesti transitiivinen? Kommentoi.

---

[1]Vihje: Tämä on OY-lauseen standarditodistus muotoiltuna ehkä hieman eri tavalla kuin differentiaaliyhtälöiden kurssilla.