

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 2

Harjoitustyöt

Kirjoita selkeästi jäsennelty esitys joko tehtävästä 1 tai tehtävästä 2. Työssä on suotavaa käyttää lähdemateriaalia, joitain lähteitä on mainittu tehtävän annossa, mutakin voi etsiä kirjastosta. Autan tarvittaessa esimerkiksi lähteiden tulkitsemisessä.

Kurssin suoritus arvostellaan, kun harjoitustyö on palautettu. Palauttamiseen ei ole aikarajaa, mutta myöhäiset palautukset luetaan ehkä vieläkin tarkemmin.

1. Liénardin lause ja van der Polin yhtälö. Sopivilla funktioita H ja g koskevalla ehdoilla osoitetaan, että differentiaaliyhtälöllä

$$\begin{cases} \dot{u} = v - H(u) \\ \dot{v} = -g(v) \end{cases}$$

on täsmälleen yksi (puoleensavetävä) rajasykli. Muotoile ja todista tämä tulos ja sovelle sitä van der Polin yhtälöön

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

tai rajoitu todistuksessa vain van der Polin yhtälön tarkasteluun.

Lähteitä:

- L. Perko: Differential equations and dynamical systems, luku 3.8.
- M.Hirsch, S. Smale, R. Devaney: Differential equations, dynamical systems and introduction to chaos, luvut 12.2 ja 12.3

2. Rakenteellinen stabiilisuus ja bifurkaatiot Jatkuvasti differentioituva vektorikenttä $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *rakenteellisesti stabiili*, jos kaikki vektorikentät, jotka ovat riittävän lähellä vektorikenttää f C^1 -mielessä, ovat topologisesti ekvivalentteja. Muotoile rakenteellista stabiilisuutta koskevia perustuloksia mukaanlukien Peixoton lause. Määrittele tarvittavia käsitteitä jne.

Käsittele esimerkkejä, jotka näyttävät millaisia *bifurkaatioita* voi tapahtua (tasossa), jos vektorikenttä ei ole rakenteellisesti stabiili.

- saddle-node -bifurkaatio
- Hopfin bifurkaatio

Lähteitä:

- L. Perko: Differential equations and dynamical systems, luku 4.1.
- M.Hirsch, S. Smale, R. Devaney: Differential equations, dynamical systems and introduction to chaos, luku 8.5
- S. Strogatz: Nonlinear dynamics and chaos, luku 7.3