

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1

Harjoitustyöt

Kirjoita selkeästi jäsennelty esitys joko tehtävästä 1 tai tehtävästä 2. Työssä on suositavaa käyttää lähdemateriaalia, joitain lähteitä on mainittu tehtävän annossa, muutenkin voi etsiä kirjastosta. Autan tarvittaessa esimerkiksi lähteiden tulkitsemisessä.

Kurssin suoritus arvostellaan, kun harjoitustyö on palautettu. Palauttamiseen ei ole aikarajaa, mutta myöhäiset palautukset luetaan ehkä vieläkin tarkemmin.

1. Selosta yksityiskohtaisesti Lotkan ja Volterran differentiaaliyhtälö:

- Mitä malli kuvaa?
- Esitä ratkaisujen käyttäytyminen: koordinaattiakseleita lukuunottamatta kaikki alkuarvot määräävät jaksollisia ratoja, perustelee tämä.
- Piirrä kuvia radoista.
- Osoita, että jaksollisella radalla haiden ja hainruoan populaatioiden keskiarvot ovat samat kuin tasapainopisteessä.
- Mitä vaikuttaa, jos mallia muutetaan niin, että malli ottaa huomioon populaation sisäisen kilpailun, ja tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\begin{cases} \dot{r} = ar - bhr - er^2, \\ \dot{h} = -ch + dhr - fh^2, \end{cases}$$

missä vakiot a, b, c, d, e , ja f ovat positiivisia?

Lähteet:

- Luennot, harjoitukset,
- M. Braun: Differential equations and their applications, luku 4.10
- M.Hirsch, S. Smale, R. Devaney: Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos, luku 11.2

2. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Tarkastellaan autonomista alkuarvot tehtävää

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

$x_0 \in U$. Osoita "analyysin keinoin", että differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisut riippuvat jatkuvasti alkuarvoista. Osoita lisäksi, että ratkaisut ovat C^2 -kuvauksia. Lähteitä:

- L. Perko: Differential equations and dynamical systems, luku 2.3.
- M.Hirsch, S. Smale, R. Devaney: Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos, luku 17.3