

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 2
Harjoitus 3, 15.11.2010

1. Olkoon ϕ virtaus avaruudessa \mathbb{R}^n . Olkoon $P \subset \mathbb{R}^n$ positiivisesti invariantti kompakti osajoukko. Olkoon $x \in P$ ja olkoon $z \in \omega_\phi(x)$. Osoita, että pisteen z koko rata sisältyy joukkoon P .

2. Olkoon $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$ kompakti väli. Olkoon $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ jatkuva kuvaus. Osoita, että alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{u} = A(t)u \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu välillä I .

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Kirjoitetaan pisteen $z \in U$ koordinaatit muodossa $z = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -funktio, ja määritellään sen osittaisderivaatoista muodostetut vektoriarvoiset kuvaukset $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \end{aligned}$$

on *Hamiltonin systeemi*, jolla on n vapausastetta. Funktio H on systeemin *kokonaisenergia*.

3. Ratkaise kokonaisenergiaa

$$H(x, y) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{2}$$

vastaava kahden vapausasteen Hamiltonin systeemi.

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Differentioituvan funktion $L: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ *rataderivaatta* on

$$\dot{L}(x) = DL(x)F(x) = \left. \frac{\partial(L \circ \phi_t(x))}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

4. Osoita, että Hamiltonin systeemin kokonaisenergian rataderivaatta on 0. Osoita, että Hamiltonin systeemin ratkaisukäyrät sisältyvät kokonaisenergian tasa-arvojoukkoihin.