

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 2
Harjoitus 2, 8.11.2010

Olkoon ϕ virtaus avaruudessa \mathbb{R}^n .

1. Osoita, että $\omega_\phi(x)$ ei ole tyhjä joukko, jos pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ positiivinen rata

$$\{\phi_t(x) : t \in [0, \infty[\}$$

on rajoitettu.

2. Osoita, että jokaisen pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ ω -rajajoukko $\omega_\phi(x)$ on ϕ -invariantti.

3. Osoita, että $\omega_\phi(x)$ on yhtenäinen, jos se on rajoitettu.

4. Anna esimerkki virtauksesta, jolla on rajoittamaton epäyhtenäinen ω -rajajoukko. (Esimerkin ei tarvitse olla eksplisiittinen.)

—————

5. Tarkastele differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ratkaisujen käyttäytymistä. Mitä tapahtuu ympyrän $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$ lähellä?