

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 2
Harjoitus 1, 1.11.2010

1. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä, jolle jokaisen alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} . Osoita, että kuvaus $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$,

$$\phi(t, x) = \psi_{0,x}(t)$$

on jatkuva.

2. Olkoon $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ C^1 -virtaus joukossa U . Osoita, että se on vektorikentän $\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, 0)$ määräämä virtaus.

3. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä ja olkoon $I(x_0, f)$ alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli. Osoita, että joukko

$$\Omega(f) = \bigcup_{b \in U} I(b, f) \times \{b\} \subset \mathbb{R} \times U$$

on avoin.

4. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ rajoitettu C^1 -vektorikenttä. Osoita, että sen kaikkien ratkaisujen maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} .

5. Määritä pisteiden $x \in \mathbb{R}^3$ α - ja ω -rajajoukot differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(1 - \|x\|^2) \\ x_1 + x_2(1 - \|x\|^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(osittaisessa) virtauksessa.