Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1
Harjoitus 6, 18.10.2010

1. Olkoon $\epsilon > 0$. Tarkastellaan tason differentiaaliyhtälöä

$$(*) \qquad \dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + \epsilon x_1 \|x\| \\ x_1 + \epsilon x_2 \|x\| \end{pmatrix}.$$

- Määritä differentiaaliyhtälön $(*)$ tasapainopisteet.
- Linearisoi yhtälö $(*)$ tasapainopisteissä.
- Ratkaise linearisoitu differentiaaliyhtälö ja kuvaile sen ratkaisujen käyttäytyminen.
- Muuta epälineaarinen differentiaaliyhtälö $(*)$ napakoordinaattimuotoon ja ratkaise se.
- Miten parametri ϵ vaikuttaa ratkaisujen käyttäytymiseen? Piirrä muutamia selventäviä kuvia.

2. Olkoon $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$V(x) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2,$$

ja olkoon ∇V sen gradienttivektorikenttä. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $\dot{x} = -\nabla V(x)$.

- Määritä differentiaaliyhtälön $(*)$ tasapainopisteet.
- Linearisoi yhtälö $(*)$ tasapainopisteissä.
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Miten vektorikenttä $-\nabla V$ ja funktion V tasa-arvokäyrät suhtautuvat toisiinsa?
- Hahmottele differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytymistä.

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä ja olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Olkoon x alkuarvotehtävän

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu. Oletetaan, että $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että x_∞ on differentiaaliyhtälön $(\dagger)$ tasapainopiste.

4. Olkoon $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞-funktio. Osoita, että differentiaaliyhtälön $\dot{x} = -\nabla V$ linearisoinneilla tasapainopisteissä on vain reaalisia ominaisarvoja.