

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1
Harjoitus 4, 4.10.2010

1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (1, 0, 0, 0). \end{cases}$$

2. Olkoot $D = \text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda)$,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Määritä matriisit $\exp D$, $\exp(tN)$ ja $\exp(tA)$.

3. Olkoon A $n \times n$ -matriisi, ja olkoon $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Osoita, että kuvaus

$$x(t) = \exp(tA) \left(x_0 + \int_0^t \exp(-sA) G(s) ds \right)$$

on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu, kun $x_0 \in \mathbb{R}$