Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1
Harjoitus 3, 27.9.2010

1. Olkoon
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} .$$
(a) Määritä differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ tyyppi.
(b) Konjugoi matriisi A yhteen lauseen 2.8 antamista muodoista ja ratkaise vastaava differentiaaliyhtälö.
(c) Ratkaise alkuarvotehtävä
$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (1,1) . \end{cases}$$
(d) Kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ ratkaisukäyrät.

2. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$, ja olkoon

$$(*) \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisujen käyttäytyminen kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Piirrä kuvia.

3. Olkoon A reaalinen $2n \times 2n$-matriisi, jolla on $2n$ eri kompleksista ominaisarvoa $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_n, \bar{\lambda}_n$. Olkoot $W_1, \ldots, W_n$ ominaisarvoja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vastaavia ominaisvektoreita. Olkoot
$$V_{2j-1} = \frac{1}{2}(W_j + \bar{W}_j)$$
ja
$$V_{2j} = \frac{-i}{2}(W_j - \bar{W}_j)$$
kaikilla $j = 1, \ldots, n$.
(a) Osoita, että $\bar{W}_k$ on ominaisarvoa $\bar{\lambda}_k$ vastaava ominaisvektori jokaisella $k = 1, \ldots, n$.
(b) Osoita, että vektorit $W_1, \ldots, W_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia.
(c) Osoita, että vektorit $V_1, \ldots, V_{2n}$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^{2n}$ kannan.

Olkoon C kannanvaihto standardikannasta kantaan $V_1, \ldots, V_{2n}$ (siis $Ce_j = V_j$ kaikilla $j = 1, \ldots, 2n$).
(d) Määritä matriisi $C^{-1}AC$.