Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1
Harjoitus 2, 20.9.2010

1. Todista luentojen tulos: Olkoot A ja B $n \times n$-matriiseja, joille pätee $A = CBC^{-1}$ jollain kääntyvällä C. Tällöin, jos x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisu alkuarvolla $x(0) = x_0$, niin $y = Cx$ on differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ ratkaisu alkuarvolla $y(0) = Cx_0$.

2. Osoita, että kuvaus $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix}$$

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b)$.

- Miten ratkaisu käyttäytyy, kun λ on positiivinen tai negatiivinen?
- Hahmottele ratkaisukäyriä muutamilla alkuarvon (a, b) eri arvoilla.
- Siinä tapauksessa, että $x(t) \to 0$, kun $t \to \infty$, osoita, että polun x tangenttivektori lähestyy vaakasuoraa suuntaa.

3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

(a) Määritä differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ tyyppi.
(b) Konjugoi matriisi A yhteen lauseen 2.7 antamista muodoista ja ratkaise vastaava differentiaaliyhtälö.
(c) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (1, 1) . \end{cases}$$

(d) Hahmottele differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ ratkaisuja muutamilla alkuarvoilla.