Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 2
Harjoitus 6, 7.12.2010

1. Olkoon $f(x) = Bx + R(x)$ kuten Stabiilin ja epästabiilin moniston lauseen todistuksessa. Olkoon $a \in \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Käytetään muutenkin samoja merkintöjä ja määritelmiä kuin Stabiilin ja epästabiilin moniston lauseen todistuksessa ja tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$(1) \qquad \theta(t,a) = U_-(t)a + \int_0^t U_-(t-s)R(\theta(s,a))ds - \int_t^\infty U_+(t-s)R(\theta(s,a))ds\,.$$

Olkoot $\epsilon < \frac{\sigma}{4K}$ ja $\|a\| < \frac{\delta}{2K}$.

Perättäisten approksimaatioiden menetelmässä tarkastellaan kuvausjonoa

$$\theta_{(0)}(t,a) = 0,$$

$$\theta_{(j+1)} = U_-(t)a + \int_0^t U_-(t-s)R(\theta_{(j)}(s,a))ds - \int_t^\infty U_+(t-s)R(\theta_{(j)}(s,a))ds$$

ja osoitetaan, että kuvausjono suppenee tasaisesti kohti kuvausta, joka on tarkasteltavan differentiaaliyhtälön ratkaisu.

- Osoita, että integraaliyhtälön (1) ratkaisu on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu.
- Osoita perättäisten approksimaatioiden menetelmällä, että integraaliyhtälöllä (1) on ratkaisu.
- Osoita, että edellä konstruoidulle ratkaisulle pätee $\|\theta(t,a)\| \leq 2K\|a\|e^{-\alpha t}$, kun $t \geq 0$.

2. Olkoon x_0 tason differentiaaliyhtälön säännöllinen jaksollinen piste. Olkoon Γ pisteen x_0 rata. Olkoon P pisteen x_0 lokaaliin poikkileikkaukseen liittyvä Poincarén kuvaus. Oletetaan, että $|P'(x_0)| < 1$. Osoita, että on $\delta > 0$ siten, että $\Gamma = \omega(x)$ jokaiselle , joka on radan Γ δ-ympäristössä.

3. Anna esimerkki tason differentiaaliyhtälöstä, jolla on sykli, joka on hylkivä joillekin $x \in \mathbb{R}^2$ ja puoleensavetävä joillekin $x \in \mathbb{R}^2$.

4. Osoita, että differentiaaliyhtälöllä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_1^3 \\ x_1 + x_2 - x_2^3 \end{pmatrix}$$

on rajasykli renkaassa

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|x\|^2 \leq 2\}.$$