Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 2
Harjoitus 5, 29.11.2010

1. Olkoon $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V(t) = (t^2 - 1)^2$. Tarkastele tason differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -V'(x_1) - \mu x_2 \end{pmatrix}$$

tasapainopisteitä parametrin $\mu \geq 0$ eri arvoilla.

2. Osoita, että kaikki gradienttisysteemin ω-rajapisteet ovat systeemin tasapainopisteitä.

3. Osoita, että yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin degeneroitumaton tasapainopiste b on

- vakaa mutta ei asymptoottisesti vakaa, jos sen linearisointi on keskus ja
- epävakaa, jos sen linearisointi on satula.

Olkoon $f : U \to \mathbb{R}^n$ C^1-vektorikenttä, jota vastaa virtaus ϕ, ja olkoon b differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ hyperbolinen kiintopiste. Tasapainopisteen b *globaali stabiili monisto* on

$$W^s(b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_t(x) \to b, \text{ kun } x \to \infty\}$$

ja sen *globaali epästabiili monisto* on

$$W^u(b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_t(x) \to b, \text{ kun } x \to -\infty\}$$

4. Osoita, että differentiaaliyhtälöt

$$\begin{aligned} \dot{x} =& y \\ \dot{y} =& x + x^2 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \dot{x} =& y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} =& -x - 2xy \end{aligned}$$

ovat Hamiltonin systeemejä. Määritä kriittisten pisteiden vakaus. Määritä hyperbolisten kriittisten pisteiden globaalit stabiilit ja epästabiilit monistot.