Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 2
Harjoitus 4, 22.11.2010

1. Olkoon A reaalinen $n \times n$-matriisi, jonka jokaisen ominaisarvon reaaliosa on nollasta poikkeava. Osoita, että

- jos $x \in E^s$, niin $\exp(At)x \to 0$ eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \to \infty$ ja $\|\exp(At)x\| \to \infty$ eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \to -\infty$.
- Jos $x \in E^u$, niin $\exp(At)x \to \infty$ eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \to \infty$ ja $\|\exp(At)x\| \to 0$ eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \to -\infty$.
- Jos $x \notin E^u \cup E^s$, niin $\exp(At)x \to \infty$ eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \to \pm\infty$.

Tarkastelun voi halutessaan palauttaa diskreetin ajan tapaukseen. Miksi?

2. Olkoon b C^1-vektorikentän f tasapainopiste. Oletetaan, että lineaarikuvauksen $Df(b)$ ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiivisia. Osoita, että b on asymptoottisesti vakaa tasapainopiste.

3. Osoita, että funktio $L(x) = \|x\|^2$ on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ -x_2(x_1^2 + x_3^2 + 1) \\ -\sin x_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

aito Liapunovin funktio origossa. Olkoon ϕ differentiaaliyhtälön (1) virtaus.

Liapunovin lauseen todistus osoittaa, että, jos $U \ni 0$ on yhtenäinen avoin joukko, jossa L on aito Liapunovin funktio, niin $\phi_t(x) \to 0$, kun $t \to \infty$. Arvioi niiden pisteiden $x \in \mathbb{R}^3$ joukkoa, joille $\phi_t(x) \to 0$, kun $t \to \infty$.

4. Osoita, että yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin tasapainopisteen linearisointi on keskus tai satula.