

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1
Harjoitus 1, 13.9.2010

1. Tarkastellaan vektorikenttää $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

- (a) Hahmottele kuva vektorikentästä f .
- (b) Voiko vektorikentän f jatkaa koko tasossa \mathbb{R}^2 määritellyksi jatkuvaksi vektorikentäksi?
- (c) Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \neq 0$. Osoita, että lauseke

$$x(t) = x_0 + t \frac{x_0}{\|x_0\|}$$

on alkuarvot tehtävän

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

ratkaisu.

- (d) Piirrä kuva muutamasta ratkaisusta alkuarvon x_0 eri arvoilla.
- (e) Mikä on alkuarvot tehtävän (*) ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli?

2. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$. Tarkastele alkuarvot tehtävää

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

ja osoita, että ratkaisut eivät yleensä ole koko reaaliakselilla määriteltyjä.

3. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Tarkastele alkuarvot tehtävää

$$(\dagger) \quad \begin{cases} \dot{x} = x\|x\|, \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

- (a) Hahmottele kuva vektorikentästä.
- (b) Ratkaise alkuarvot tehtävä.
- (c) Kuvaile ratkaisujen käyttäytymistä.