

# DIFFERENTIAALIYHTÄLÖIDEN JATKOKURSSI SYKSY 2010

JOUNI PARKKONEN

## Kurssi 1

### 1. JOHDANTO

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  ja  $I \subset \mathbb{R}$  avoimia joukkoja ja  $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (jatkuva) kuvaus. Tällä kurssilla tarkastelemme *differentiaaliyhtälöryhmiä*

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, t),$$

ja niihin liittyviä alkuarvotehtäviä, joissa vaaditaan lisäksi  $x(t_0) = x_0$  jollain  $x_0 \in U$ . Merkintä  $\dot{x}(t) = x'(t)$  tarkoittaa vektoriarvoisen kuvauksen  $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}$  derivaattaa. Komponenteittain kirjoitettuna differentiaaliyhtälöryhmä (1) on

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1((x_1, \dots, x_n), t), \\ \dot{x}_2 = f_2((x_1, \dots, x_n), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n((x_1, \dots, x_n), t). \end{cases}$$

Yleensä kutsumme differentiaaliyhtälöryhmää yksinkertaisemmin *differentiaaliyhtälöksi*. Differentiaaliyhtälön (1) ratkaisu alkuarvolla  $x(t_0) = x_0$  on differentioituva kuvaus  $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  joltain avoimelta väliltä  $\Delta \subset \mathbb{R}$ , jolle pätee  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  kaikilla  $t \in \Delta$  ja  $x(t_0) = x_0$ .

Jos differentiaaliyhtälön oikean puolen kuvauksen arvo ei riipu muuttujan  $t$  arvosta, tämä riippuvuus jätetään pois ja tarkastellaan kuvauksen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  määräämää *autonomista* differentiaaliyhtälöä

$$(3) \quad \dot{x} = f(x)$$

Autonomisen differentiaaliyhtälön (3) ratkaisu alkuarvolla  $x(t_0) = x_0$  on differentioituva kuvaus  $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  joltain avoimelta väliltä  $\Delta \subset \mathbb{R}$ , jolle pätee  $\dot{x}(t) = f(x(t))$   $t \in \Delta$  ja  $x(t_0) = x_0$ .

---

Tällä kurssilla rajoitumme lähinnä autonomisten differentiaaliyhtälöiden tarkasteluun.

---

### Nimityksiä:

- Parametriä  $t$  kutsutaan usein ajaksi, ja differentiaaliyhtälön ajatellaan kuvaavan jonkin systeemin tilan  $x$  kehittymistä ajan kuluessa.
- Jos  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  on lineaarikuvaus, yhtälö  $\dot{x} = Ax$  on lineaarinen (autonominen) differentiaaliyhtälö

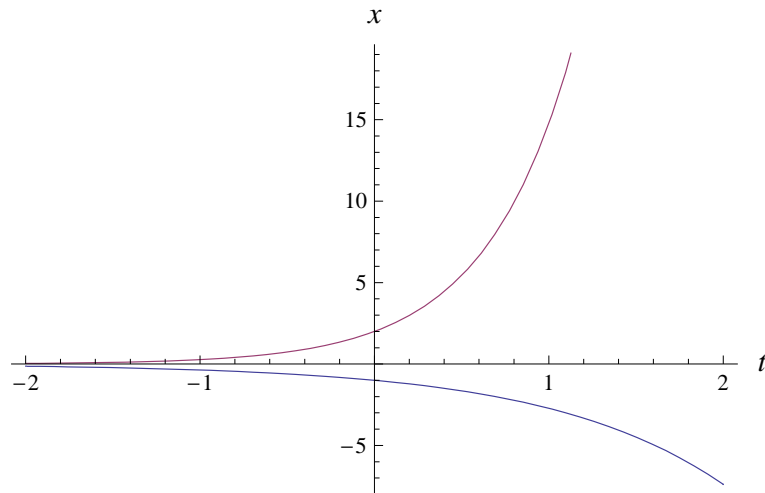
### Huomaa:

- (a) Jos differentiaaliyhtälö ei ole autonominen, niin pisteen  $(x_0, t_0)$  tulee olla kuvauksen  $f$  kannalta mielekäs.  
 (b) Kuvauksen  $f$  määrittelyjoukko jätetään usein hieman epämääräiseksi.

**Esimerkki 1.1.** (1) Olkoot  $\lambda, a \in \mathbb{R}$ . Lineaarisen alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ x(0) = a \end{cases}$$

ratkaisu on  $x(t) = ae^{\lambda t}$ . Kuvassa ratkaisut parametrien arvoilla  $\lambda = a = 2$  ja  $\lambda = 1, a = -1$ .

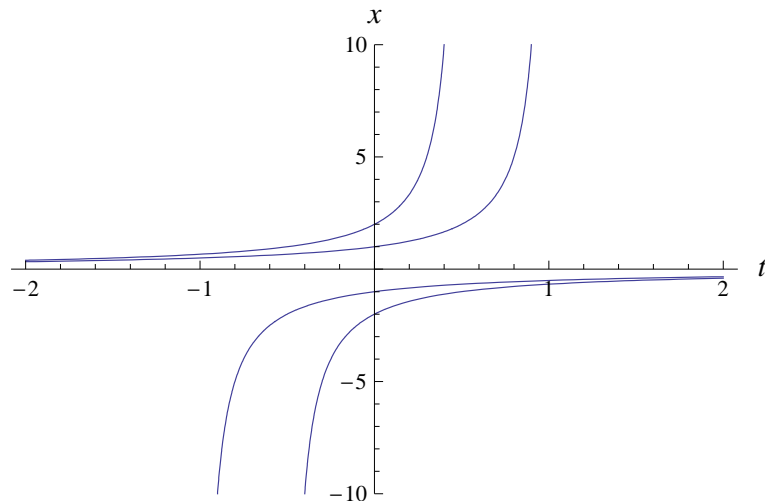


Tämän alkuarvotehtävän ratkaisu voidaan määritellä koko reaaliakselilla.

(2) Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = a \end{cases},$$

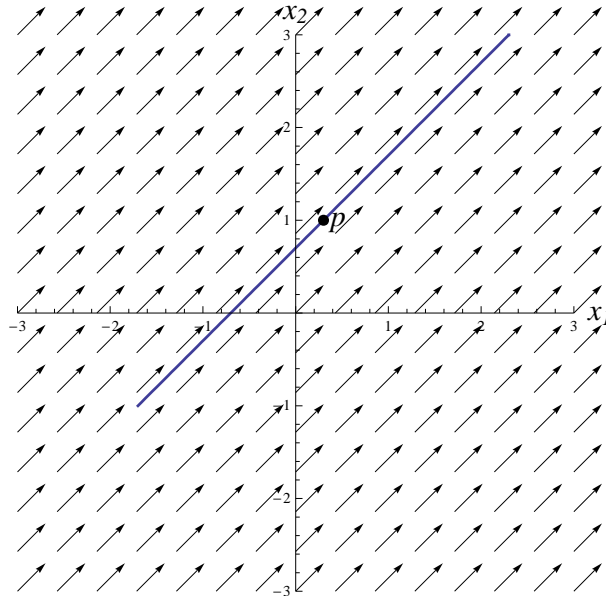
missä  $a \in \mathbb{R}$ , ratkaisu taas “räjähtää äärellisessä ajassa tulevaisuudessa tai menneisyydessä”.



**Geometrinen tulkinta:** Autonominen differentiaaliyhtälön (3) oikean puolen kuvaus  $f$  määrää *vektorikentän* joukossa  $U$ . Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu on differentioituva polku joukossa  $U$ , jonka tangenttivektori  $\dot{x}(t)$  pisteessä  $x(t)$  on vektorikentän  $f$  arvo (siis vektori). Lisäksi polku kulkee pisteen  $x_0$  kautta ja toteuttaa  $x(t_0) = x_0$ .

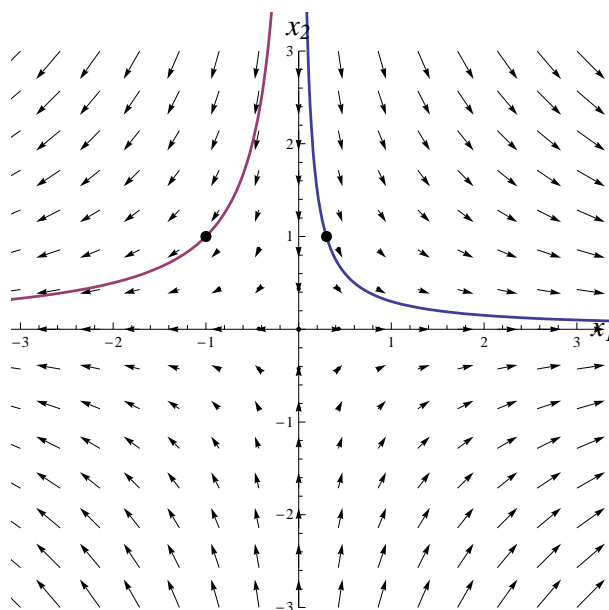


KUVA 1. Vakiovektorikenttä  $f(x) = (1, 1)$  tasossa ja alkuarvotehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = p = (1, 0.3)$  ratkaisu aikavälillä  $t \in ]-2, 2]$ .

**Esimerkki 1.2.** Olkoot  $\lambda_1, \lambda_2, a, b \in \mathbb{R}$ . Tason lineaarisen alkuarvotehtävän

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = a, \\ x_2(0) = b, \end{cases}$$

ratkaisu on Esimerkin 1.1 kohdan (1) mukaan  $\begin{cases} x_1(t) = ae^{\lambda_1 t}, \\ x_2(t) = be^{\lambda_2 t} \end{cases}$ . Kun  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , ratkaisut käyttäytyvät kuten kuvassa:



Ratkaisut lähestyvät  $x_1$ -akselia, kun  $t \rightarrow \infty$  ja  $x_2$ -akselia, kun  $t \rightarrow -\infty$ .

Differentiaaliyhtälö (4) voidaan esittää matriisimuodossa: Asetetaan

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ja  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Tällöin yhtälö (4) saadaan matriisimuotoon  $\dot{x} = Ax$ .

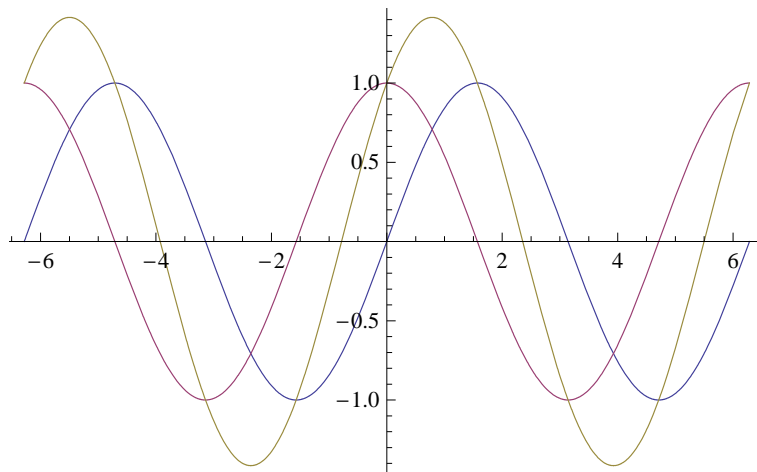
**Esimerkki 1.3.** Toisen asteen lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$(5) \quad y''(t) + y(t) = 0$$

kaikki ratkaisut saadaan funktioiden sin ja cos lineaarikombinaatioina. Jokaisella alkuarvotehävällä

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = a, \\ y'(0) = b, \end{cases}$$

on ratkaisu  $y(t) = a \cos t + b \sin t$ :



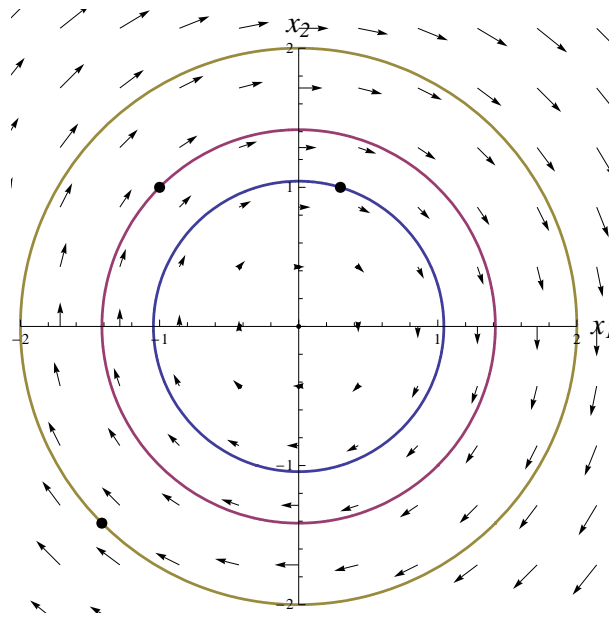
Differentiaaliyhtälö (5) voidaan muuntaa tason differentiaaliyhtälöksi: Asetetaan  $x_1 = y$  ja  $x_2 = y'$ . Tällöin siis yhtälö (5) on

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Matriisimuodossa yhtälö (6) on siis  $\dot{x} = Ax$ , missä  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Yhtälö(pari)n (6) ratkaisu on siis luettavissa edeltä: Yleinen ratkaisu on

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \end{pmatrix}.$$

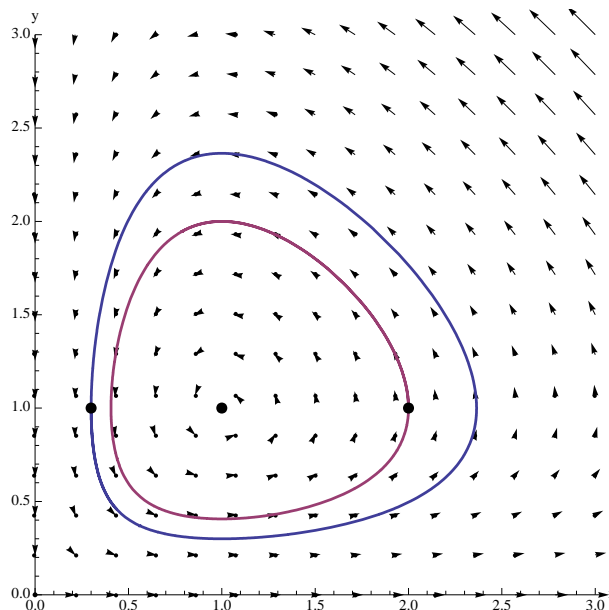
Differentiaaliyhtälön (6) vektorikenttä  $f(x) = Ax$  ja ratkaisut alkuarvoilla  $x_0 = (0.3, 1)$ ,  $x_0 = (-1, 1)$  ja  $x_0 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ :



**Esimerkki 1.4** (Lotka-Volterra). Tarkastellaan esimerkkiä differentiaaliyhtälöiden käytöstä biologisen tilanteen mallittamisessa. Meressä on kahdenlaisia kaloja: haita ja hainruokaa. Olkoon haitan lukumäärä  $h$  ja hainruoan lukumäärä  $r$ . Oletetaan, että ilman haita hainruoan populaatio kehittyisi Malthusin lain mukaan eksponentiaalisesti yhtälön  $\dot{r} = ar$  mukaan, missä  $a$  on positiivinen vakio. Hain ja hainruoan kohtaamisia tapahtuu  $b_0hr$  kappaletta, ja jollain todennäköisyydellä hai syö hainruoan. Siis hainruoan määrä vähenee nopeudella  $bhr$ . Vastaavasti haitten lukumäärän luonnollinen poistumanopeus on suhteessa lukumäärään  $ch$ , ja ruoan saanti kasvat-  
taa populaatiota nopeudella  $dhr$ . Näiden kahden lajin lukumääriä säätelee tämän päätelyn mukaisesti differentiaaliyhtälöpari

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{r} = ar - bhr, \\ \dot{h} = -ch + dhr \end{cases}$$

joillain positiivisilla vakioilla  $a, b, c, d$ .



Osoittautuu, että positiivisilla alkuarvoilla ratkaisut ovat jaksollisia:  $x(t + T) = x(t)$  kaikilla  $t \in \mathbb{R}$  jollain  $T \in \mathbb{R}$ . Lisäksi alkuarvoa  $(c/d, a/b)$  vastaa vakioratkaisu:

Nythän

$$f(r, h) = (ar - bhr, -ch + dhr) = ((a - bh)r, (dr - c)h),$$

ja

$$f\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \left(\left(a - b\frac{a}{b}\right)\frac{c}{d}, \left(d\frac{c}{d} - c\right)\frac{a}{b}\right) = 0.$$

Vakiokuvauksen  $t \mapsto \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  derivaatta on nolla, joten se toteuttaa differentiaaliyhtälön (7).

---

Kuvauksen  $f$  nollakohdat ovat differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  tasapainopisteitä (equilibrium point). Edellisen esimerkin argumentilla saadaan:

**Lemma 1.5.** *Jos  $x_0$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  tasapainopiste, niin vakiokuvaus  $t \mapsto x_0$  on alkuarvotehtävän  $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t) = x_0 \end{cases}$  ratkaisu.* □

Alkuarvotehtävällä voi olla useita eri ratkaisuja:

**Esimerkki 1.6.** Alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

on kaksi koko ratkaisua  $x_1, x_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : vakiokuvaus  $x_1(t) = 0$  ja kuvaus  $x_2(t) = t^3$ . Tässä esimerkissä kuvaus  $f$  on jatkuva, mutta se ei ole differentioituva pisteessä  $x = 0$ .

Todistamme kurssilla myöhemmin tuloksen, joka kertoo, milloin ratkaisuja on vain yksi:

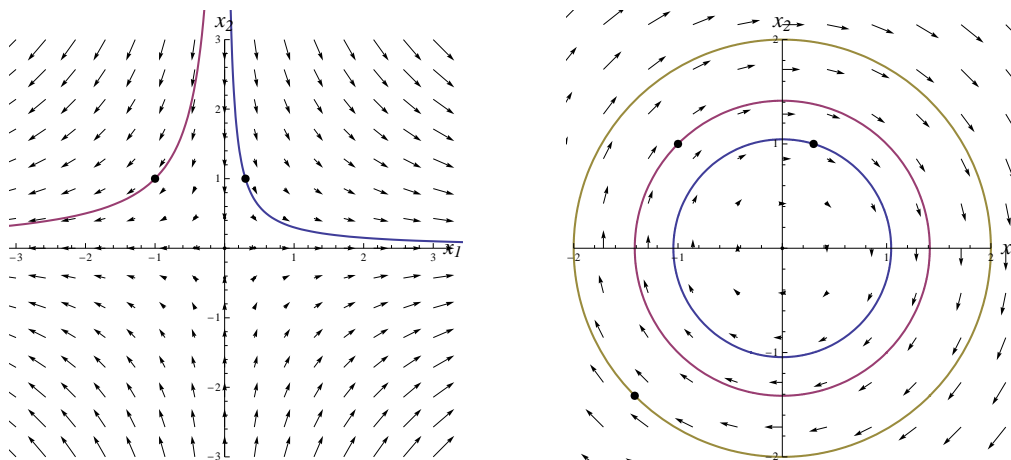
**Lause 1.7** (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause). *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko, ja olkoon  $f \in C^1(U)$ . Olkoon  $x_0 \in U$ . Tällöin alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*on yksikäsitteinen ratkaisu, joka on määritelty jollain avoimella välillä  $] -\delta, \delta[$ .*

## 2. TASON LINEAARISET DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Johdannossa tarkastelimme kahta tason lineaarista differentiaaliyhtälöä  $\dot{x} = Ax$ , joiden ratkaisut käyttäytyvät selvästi eri tavoin:



Vasemmanpuoleisessa esimerkissä  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ,  $\mu < 0 < \lambda$ , ja oikeanpuoleisessa  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Kun tarkastellaan alkuarvottehtävän  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(t_0) = x_0$  ratkaisua maksimaalisella määrittelyvälillä  $I \subset \mathbb{R}$ , joukkoa  $x(I)$  kutsutaan usein pisteen  $x_0$  *radaksi*. Ylläolevissa esimerkeissä vasemmanpuoleisen differentiaaliyhtälön radat ovat rajoittamattomia ja  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ , kun  $t \rightarrow \infty$  tai  $t \rightarrow -\infty$ . Oikeanpuoleisen differentiaaliyhtälön radat taas ovat kaikki ympyröitä, siis rajoitettuja joukkoja. Tässä luvussa luokittelemme kaikki tason lineaariset differentiaaliyhtälöt. Tätä varten tarvitaan hieman lineaarialgebraa:

**2.1. Lineaarialgebraa.** Jos  $A$  on reaalinen  $n \times n$ -matriisi, niin vektori  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  on matriisin  $A$  *ominaisvektori* ominaisarvolla  $\lambda \in \mathbb{R}$ , jos  $Av = \lambda v$ . Ominaisvektori on siis nollasta poikkeava vektori matriisia  $A - \lambda I$  standardikannassa vastaavan lineaarikuvauksen ytimessä. Tästä nähdään, että matriisin  $A$  reaaliset ominaisarvot ovat matriisin  $A$  *karakteristisen polynomin*

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

reaaliset juuret. Lineaarialgebran kurssilla on tapana käsitellä ainoastaan reaalisia ominaisarvoja, mutta tällä kurssilla on luontevaa käsitellä myös karakteristisen polynomin kompleksisia juuria. Kutsumme näitäkin matriisin  $A$  ominaisarvoiksi, erityisesti *kompleksisiksi ominaisarvoiksi*.

Karakteristisen polynomin aste on  $n$ , joten Algebran peruslauseen (todistetaan Kompleksianalyysissa) mukaan karakteristisella polynomilla on algebrallinen kertaluku huomioiden  $n$  juurta. Ominaisarvon kertaluku karakteristisen polynomin juurena on sen *algebrallinen kertaluku*.

Matriisin  $A$  reaalista ominaisarvoa  $\lambda$  vastaavat ominaisvektorit muodostavat nollavektorin kanssa *ominaisavaruuden*

$$E_\lambda = E_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\}.$$

Ominaisavaruuden  $E_\lambda$  dimensio on ominaisarvon  $\lambda$  *geometrinen kertaluku*.

**Esimerkki 2.1.** (1) Matriisilla  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ei ole reaalisia ominaisarvoja. Sen karakteristinen polynomi on

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

joten sillä on kompleksiset ominaisarvot  $i$  ja  $-i$ .

(2) Matriisilla  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  on yksi algebrallisesti kaksinkertainen ominaisarvo 1. Ominaisarvon 1 geometrinen kertaluku on 1: Ominaisvektorit määrittävä yhtälöryhmä  $Av = v$  kutistuu yhtälöksi  $v_2 = 0$ , joka määrää 1-ulotteisen aliavaruuden.

Lineaarialgebrassa (LAG2) osoitetaan, että  $2 \times 2$ -matriisi  $B$  on diagonalisoituva, jos sillä on kaksi eri (reaalista) ominaisarvoa. Toisaalta  $2 \times 2$ -matriisi voi olla diagonalisoituva vaikka sillä olisi vain yksi ominaisarvo ( $\lambda = \mu$  yllä), ja esimerkiksi matriisilla  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ei selvästi ole yhtään ominaisvektoria eikä siis yhtään reaalista ominaisarvoa, koska sitä standardikannassa vastaava lineaarikuvaus on kierto myötäpäivään kulman  $\pi/2$  verran.

Jos  $n \times n$ -matriisi  $A$  on diagonalisoituva, niin on avaruuden  $\mathbb{R}^n$  kanta, joka koostuu matriisin  $A$  (tai sitä vastaavan lineaarikuvaus  $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $L_A v = Av$ ) ominaisvektoreista. Erityisesti ominaisavaruuksien dimensioiden summa on  $n$ . Lineaarialgebran kurssilla osoitettua tuloksista saadaan suoraan:

**Lemma 2.2.**  $n \times n$ -matriisi  $A$  on diagonalisoituva, jos ja vain jos sen ominaisarvojen geometrinen kertalukujen summa on  $n$

Jos  $A$  ja  $B$  ovat reaalisia  $n \times n$ -matriiseja ja  $C$  on kääntyvä reaalinen  $n \times n$ -matriisi, jolle  $B = CAC^{-1}$ , niin  $A$  ja  $B$  ovat toistensa konjugaatteja ja  $C$  on konjugoiva matriisi. Diagonalisoituva matriisi on siis jonkin diagonaalimatriisin konjugaatti. Lineaarialgebrassa osoitetaan seuraava tulos:

**Lause 2.3.** Olkoot  $A$  ja  $B$  reaalisia  $n \times n$ -matriiseja, joille pätee  $A = CBC^{-1}$  jollain kääntyvällä reaalilla  $n \times n$ -matriisilla  $C$ . Tällöin

- (a) matriiseilla  $A$  ja  $B$  on samat ominaisarvot.
- (b) matriisia  $C$  vastaava lineaarikuvaus kuvaa matriisin  $B$  ominaisavaruudet bijektiivisesti matriisin  $A$  ominaisavaruuksiksi.
- (c)  $\text{tr } A = \text{tr } B$ .
- (d)  $\det A = \det B$ .

Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden yhteydessä konjugointi on usein kätevä väline seuraavan ominaisuuden vuoksi

**Lemma 2.4** (Muuttujanvaihtolemma). Olkoot  $A$  ja  $B$   $n \times n$ -matriiseja, joille pätee  $A = CBC^{-1}$  jollain kääntyvällä  $C$ . Tällöin, jos  $x$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Bx$  ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = x_0$ , niin  $y = Cx$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{y} = Ay$  ratkaisu alkuarvolla  $y(0) = Cx_0$ .

*Todistus.* Harjoitus 2. □

**Esimerkki 2.5.** Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 2 ja  $-2$ . Sen ominaisavaruudet saadaan ratkaisemalla yhtälöparit  $Av = 2v$  ja  $Av = -2v$ , jotka antavat vastaaville ominaisavaruuksille yhtälöt  $v_1 = 3v_2$

ja  $v_1 = -v_2$ . Matriisi  $A$  voidaan diagonalisoida esimerkiksi matriisilla

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

jonka sarakkeet  $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  ja  $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ovat ominaisvektoreita. Nythän, jos  $B = \tilde{C}^{-1}A\tilde{C}$ , niin

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{C}^{-1}A\tilde{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{C}^{-1}Aw_1 = \tilde{C}^{-1}2w_1 = 2\tilde{C}^{-1}w_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

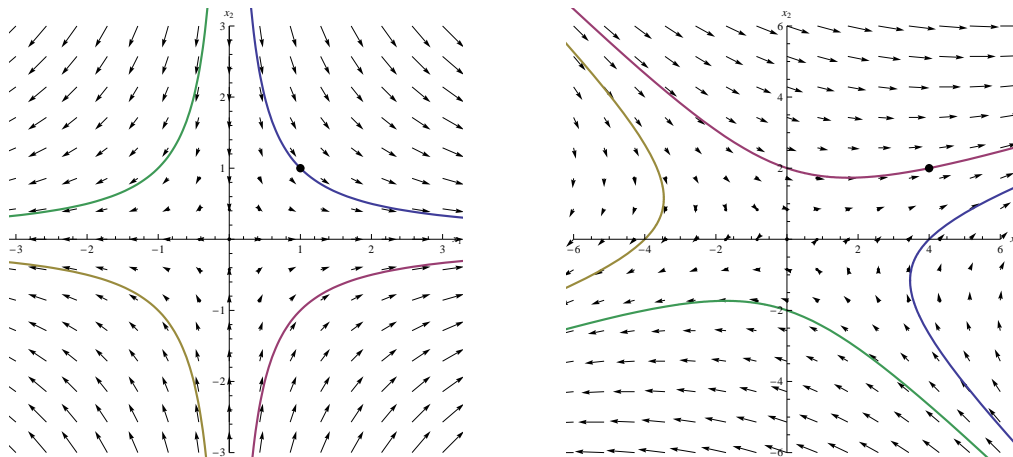
ja vastaavasti

$$(8) \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx, \\ x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases}$$

ratkaisu tunnetaan, se on  $x(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{-2t} \end{pmatrix}$ .



KUVA 2. Kaksi satulaa

Lemman 2.4 mukaan

$$y(t) = \tilde{C}x(t) = \begin{pmatrix} 3ae^{2t} + be^{-2t} \\ ae^{2t} - be^{-2t} \end{pmatrix}$$

on alkuarvotehtävän

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{y} = Ay, \\ y(0) = \tilde{C} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases}$$

ratkaisu.

Matriisia  $\tilde{C}$  vastaava lineaarikuvaus on siis muuttujanvaihto, joka liittää alkuarvotehtävät (8) ja (9), ja niiden ratkaisut toisiinsa.

**Lemma 2.6.** Jos  $A$  on  $2 \times 2$ -matriisi, niin

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A.$$

Toisen asteen polynomien juurten kaava antaa nopean tavan selvittää ominaisarvot ja niiden laadut:

**Propositio 2.7.** *Olkoon  $A$   $2 \times 2$ -matriisi.*

- (a) *Jos  $\det A < 0$ , niin matriisilla  $A$  on kaksi erimerkkistä ominaisarvoa.*
- (b) *Jos  $\det A > 0$  ja  $\operatorname{tr}^2 A \geq 4 \det A$ , niin matriisilla  $A$  on kaksi samanmerkkistä ominaisarvoa.*
- (c) *Jos  $\det A > 0$  ja  $\operatorname{tr}^2 A < 4 \det A$ , niin matriisilla  $A$  on kaksi kompleksista ominaisarvoa, jotka ovat toistensa liittolukuja.*
- (d) *Jos  $\det A = 0$ , niin ainakin toinen ominaisarvo on 0. Tällöin mahdollinen nollasta poikkeava ominaisarvo on reaalinen.*

**Lause 2.8** (Konjugointilause). *Olkoon  $A$  reaalinen  $2 \times 2$ -matriisi. Tällöin on kääntyvä reaalinen  $2 \times 2$ -matriisi  $C$ , jolle matriisi  $CAC^{-1}$  on*

- (a) *diagonaalimatriisi, jos matriisilla  $A$  on kaksi eri reaalista ominaisarvoa tai yksi reaalinen ominaisarvo,*
- (b) *diagonaalimatriisi tai muotoa  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , jos matriisilla  $A$  on yksi kaksinkertainen reaalinen ominaisarvo, ja*
- (c) *vinosymmetrinen muotoa  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , jos matriisilla  $A$  ei ole reaalisia ominaisarvoja.*

Tarkastelemme nyt eri tapaukset. Seuraavassa  $A$  on  $2 \times 2$ -matriisi:

**Matriisi  $A$  on diagonalisoituva.**

Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  ratkaisut saadaan eksponenttifunktion avulla kuten esimerkissä 2.5. Ratkaisuja on ominaisarvojen merkeistä riippuen kolmea erilaista tyyppiä:

(1) Jos matriisilla  $A$  on kaksi ominaisarvoa, jotka ovat erimerkkisiä, ratkaisut käyttäytyvät kuten esimerkissä 2.5. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *satulaksi*, katso kuvia Esimerkissä 2.5.

(2) Jos matriisilla  $A$  on kaksi negatiivista ominaisarvoa  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$ , ratkaisut saadaan samalla tavalla kuin esimerkissä 2.5. Ratkaisujen käyttäytyminen on kuitenkin erilaista:  $A$  on konjugaatti diagonaalimatriisin  $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  kanssa. Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Bx$  ratkaisut alkuarvoilla, jotka ovat koordinaattiakseleilla, lähestyvät origoa eksponentiaalisesti akselia pitkin, kun  $t \rightarrow \infty$ . Muilla alkuarvoilla ratkaisut lähestyvät myös origoa, mutta kuvan mukaisia käyriä pitkin. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *nieluksi*. Huomaa, että ratkaisukäyrät ovat säteitä, kun ominaisarvot ovat samanlaisia.

(3) Jos matriisilla  $A$  on kaksi positiivista ominaisarvoa  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$ , ratkaisukäyrät ovat kuten nielulla, mutta ratkaisut liikkuvat vastakkaiseen suuntaan. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *lähteeksi*.

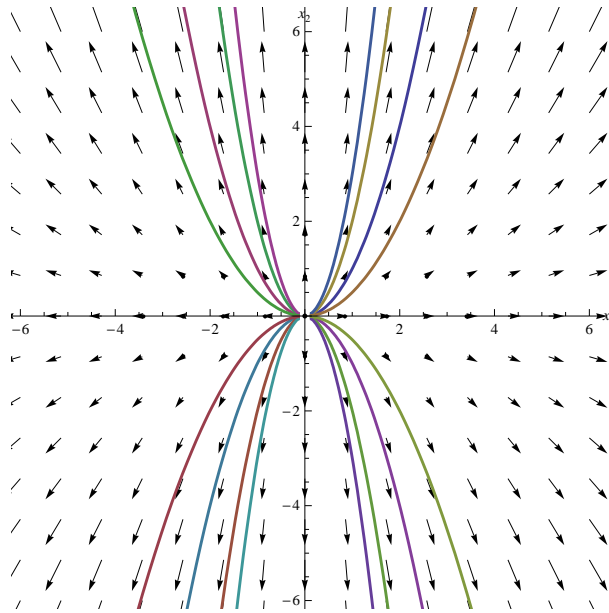
**Matriisi  $A$  on konjugaatti matriisin  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  kanssa.**

Kuvaus  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

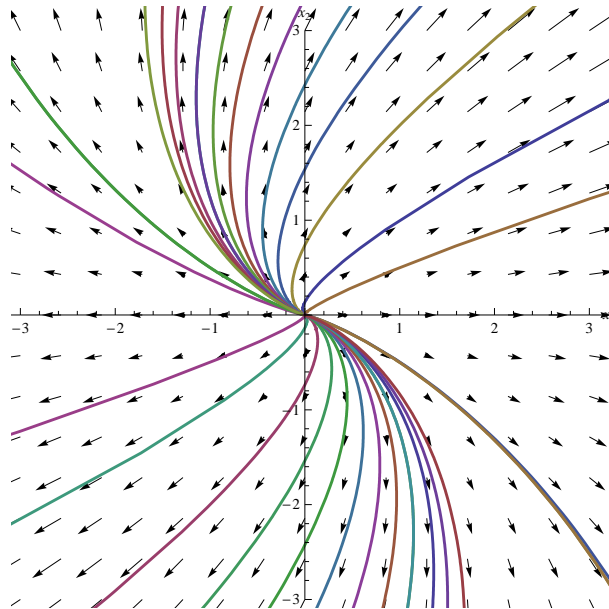
$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix}$$

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$



KUVA 3. Lähde



KUVA 4. Surkastunut lähde

ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = (a, b)$ .

Jos matriisilla  $A$  on yksi ominaisarvo, jonka algebrallinen kertaluku on yksi ja geometrinen kertaluku on kaksi, niin Lauseen 2.8 nojalla  $A$  on matriisin  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  konjugaatti jollain  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ja differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  ratkaisut saadaan Lemman 2.4 avulla. Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *surkastuneeksi nieluksi*, jos  $\lambda < 0$  ja *surkastuneeksi lähteeksi*, jos  $\lambda > 0$ .

Jos  $A$  on neliömatriisi ja  $\lambda$  on sen ominaisarvo, niin vastaava ominaisavaruus on matriisin  $A - \lambda I$  ydin:

$$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda).$$

Jos  $k$  on luonnollinen luku,  $k \geq 1$ , niin vektorialiavaruus

$$E_\lambda^k(A) = \ker(A - \lambda)^k$$

on ominaisarvoa  $\lambda$  vastaava kertaluvun  $k$  yleistetty ominaisarvaruus.

**Esimerkki 2.9.** Koko taso on matriisin  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  kertaluvun 2 yleistetty ominaisarvaruus ominaisarvolle  $\lambda$ :

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0.$$

### Matriisi $A$ on konjugaatti vinosymmetrisen matriisin kanssa

Lauseen 2.8 mukaan kaikki reaaliset  $2 \times 2$ -matriisit, jotka eivät ole diagonalisoituvia tai matriisin  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  konjugaatteja jollain  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ovat vinosymmetrisen matriisin  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  konjugaatteja joillain  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ . Kuvaus  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$x(t) = e^{\alpha t} \left[ a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} \right]$$

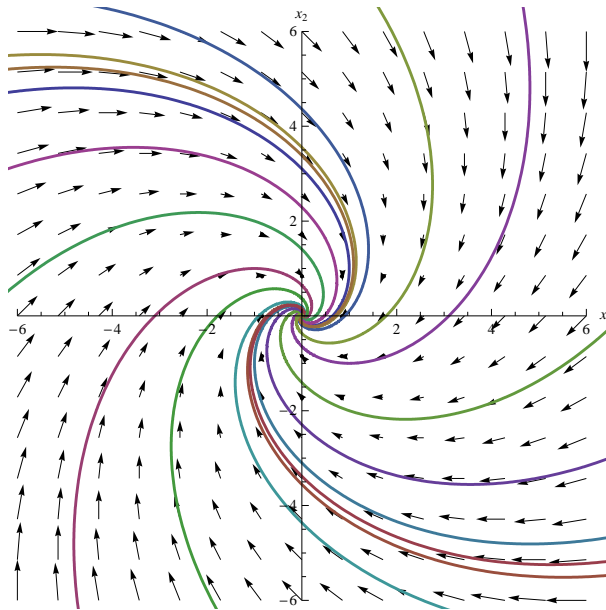
on alkuarvotehtävän  $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$  ratkaisu.

(1) Jos  $\alpha = 0$ , niin ratkaisu on muotoa

$$x(t) = a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Tämä kuvaus parametrizoi ympyrän, jonka säde on  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Yleisessä tilanteessa ratkaisut parametrizovat ellipsin, joka saadaan kuvaamalla tämä ympyrä kannanvaihtokuvauksella. Tässä tapauksessa origo on *keskus*.

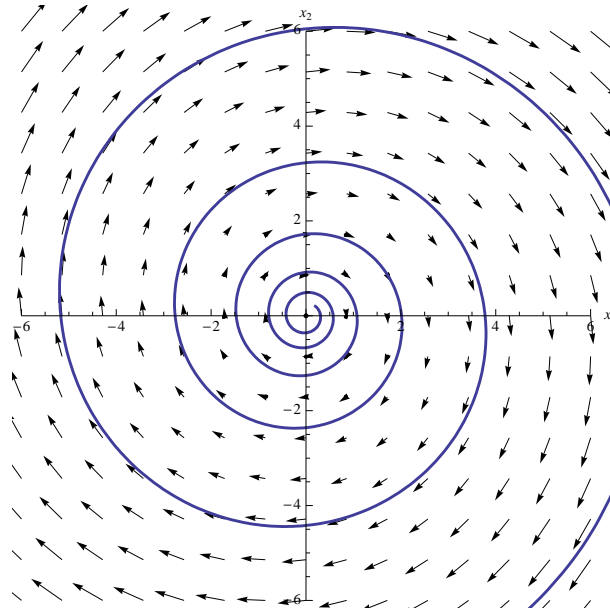
(2) Jos  $\alpha < 0$ , niin kerroin  $e^{\alpha t}$  aiheuttaa sen, että ratkaisu lähestyy origoa, kun  $t \rightarrow \infty$ . Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella ja lähestyy sitä eksponentiaalisella nopeudella. Tässä tapauksessa origo on *spiraalinielu*.



KUVA 5. Spiraalinielu

(3) Jos  $\alpha > 0$ , niin kerroin  $e^{\alpha t}$  aiheuttaa sen, että ratkaisun normi kasvaa rajatta, kun  $t \rightarrow \infty$ . Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella

ja etäännytty siitä eksponentiaalisella nopeudella. Tässä tapauksessa origo on *spiraalilähde*.



KUVA 6. Spiraalilähde

**2.2. Kompleksista lineaarialgebraa.** Lineaarisen algebran ja geometrian kursseilla käsitellään yleensä ainoastaan reaalisia vektoriavaruuksia ja niiden lineaarikuvauksia. Lineaarialgebran teoria voidaan kuitenkin muotoilla yleisemmin korvaamalla aksioomissa esiintyvä reaalilukujen kunta  $\mathbb{R}$  millä tahansa kunnalla, esimerkiksi rationaaliluvuilla tai kompleksiluvuilla. Kompleksinen lineaarialgebra auttaa meitä ymmärtämään paremmin Lauseen 2.8 kolmatta tapausta.

Esimerkiksi kompleksisen vektoriavaruuden aksioomat ovat samat kuin reaalissa tapauksessa, mutta kaikki ominaisuudet, joissa reaalissa tapauksessa esiintyy  $\mathbb{R}$  vaaditaan kompleksiluvuille. Esimerkiksi

- Kompleksisessa vektoriavaruudessa  $V$   $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$  kaikille  $\alpha \in \mathbb{C}$  ja kaikille  $u, v \in \mathbb{C}$ .
- Kuvaus  $L: V \rightarrow V$  on (kompleksinen) lineaarikuvaus, tai kompleksilineaarinen kuvaus, jos  $L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv$  kaikille  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ja kaikille  $u, v \in \mathbb{C}$ .
- Lineaarikuvaukset ja matriisit vastaavat toisiaan, kun kannat on valittu kuten reaalissa tapauksessa
- Vektori  $v \in \mathbb{C}^n$  on lineaarikuvauksen  $L: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  ominaisvektori ominaisarvolla  $\lambda \in \mathbb{C}$ , jos  $Lv = \lambda v$ .
- Lineaarinen riippuvuus ja siis myös aliavaruuden dimensio määritellään myös kompleksilukujen avulla: Vektorit  $u_i$ ,  $i \in I$  ovat lineaarisesti riippuvia, jos kaikille äärellisille summille pätee

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k u_{i_k} = 0$$

vain, jos  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ .

**Esimerkki 2.10.**  $\mathbb{C}^n$  on kompleksinen vektoriavaruus, jonka (kompleksinen) dimensio on  $n$ : Standardikanta, joka koostuu vektoreista  $e_1, \dots, e_n$ , missä  $e_i$  on vektori,

jonka ainoa nollasta poikkeava kerroin on  $1 \in \mathbb{C}$  paikalla  $i$ , on selvästi lineaarisesti riippumaton. Kompleksisessa vektoriavaruudessa  $\mathbb{C}$  määritellään vektorien reaali- ja imaginaariosa ja kompleksikonjugaatti komponenteittain kuvauksina  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ : Jos  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ , niin

$$\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n),$$

$$\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$$

ja

$$\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n).$$

Nyt voimme palata Lauseen 2.8 todistukseen.

(1) Jos matriisilla  $A$  on kaksi eri ominaisarvoa, diagonalisoituvuus on todistettu kurssilla LAG2. Samoin, jos matriisilla  $A$  on geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo, on helppo nähdä, että  $A$  on diagonaalinen.

(2) Oletetaan, että matriisilla  $A$  on geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ja olkoon  $u$  jokin ominaisvektori, jolle siis pätee  $Au = \lambda u$ . Olkoon  $v \in \mathbb{R}^2$  mikä tahansa vektori siten, että  $u$  ja  $v$  virittävät koko tason  $\mathbb{R}^2$ . Tällöin  $Av = \mu u + \nu v$  jollekin  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \neq 0$ . Jos olisi  $\nu \neq \lambda$ , niin

$$A \left( \frac{\mu}{\nu - \lambda} u + v \right) = \lambda \frac{\mu}{\nu - \lambda} u + \mu u + \nu v = \nu \left( \frac{\mu}{\nu - \lambda} u + v \right),$$

joten  $\nu \neq \lambda$  olisi ominaisarvo vastoin oletusta. Siispä  $Av = \mu u + \lambda v$ . Valitaan kannaksi  $u$  ja  $w = v/\mu$ . Tällöin  $Au = \lambda u$  ja  $Aw = \mu u/\mu + \lambda v/\mu = u + \lambda w$ , joten matriisi on tässä kannassa haluttua muotoa.

(3) Oletetaan, että matriisilla  $A$  ei ole reaalisia ominaisarvoja. Tällöin sillä on kaksi kompleksista ominaisarvoa  $\alpha \pm i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ . Ajatellaan  $A$  kompleksisena matriisina. Tällöin ominaisarvoa  $\alpha + i\beta$  vastaa jokin ominaisvektori  $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u \in \mathbb{C}^2$ . Havaitaan ensin, että  $\operatorname{Re} u$  ja  $\operatorname{Im} u$  ovat lineaarisesti riippumattomia reaaliosissa vektoriavaruudessa  $\mathbb{R}^2$ : Jos näin ei ole, niin  $\operatorname{Re} u = c \operatorname{Im} u$  jollain  $c \in \mathbb{R}$ . Tällöin

$$(c + i)A \operatorname{Im} u = A((c + i) \operatorname{Im} u) = A(u) = (\alpha + i\beta)u = (\alpha + i\beta)(c + i) \operatorname{Im} u,$$

joten

$$A \operatorname{Im} u = (\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u,$$

mikä on mahdotonta, sillä  $A \operatorname{Im} u$  on reaalinen vektori, kun taas  $(\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u$  ei ole.

Kirjoitetaan matriisi  $Au$  komponenteittain kahdella tavalla: Koska  $A$  on reaalinen, pätee

$$Au = A(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = A(\operatorname{Re} u) + iA(\operatorname{Im} u).$$

Toisaalta

$$Au = (\alpha + i\beta)(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u + i(\beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u),$$

joten tarkastamalla reaali- ja imaginaariosat saadaan

$$A \operatorname{Re} u = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u$$

ja

$$A \operatorname{Im} u = \beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u.$$

Edellä oleva tarkastelu osoittaa, että avaruuden  $\mathbb{R}^2$  kannassa, jonka muodostavat vektorit  $v_1 = \operatorname{Re} u$  ja  $v_2 = \operatorname{Im} u$ , matriisia  $A$  vastaava lineaarikuvaus käyttäytyy

halutulla tavalla. Valitaan kannanvaihtomatriisiksi  $C$  matriisi, jonka sarakkeet ovat vektorien  $v_1$  ja  $v_2$  komponentit. Tällöin  $C$  on reaalinen, ja pätee

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_1 = C^{-1}(\alpha v_1 - \beta v_2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ja

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_2 = C^{-1}(\beta v_1 + \alpha v_2) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

### 3. LINEAARISET DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT KORKEAMMISSA ULOTTUVUUKSISSA

Tason tilanteessa yksinkertaistimme lineaaristen differentiaaliyhtälöiden tarkastelua osoittamalla, että kaikki reaaliset  $2 \times 2$ -matriisit voidaan konjugoida reaalisella matriisilla yhteen kolmesta perusmuodosta (Lause 2.8). Itse asiassa edellämainittu tulos on erikoistapaus tuloksesta, joka pätee kaikissa ulottuvuuksissa.

**Terminologiaa:** Jos  $B_1, \dots, B_N$  ovat  $n_1 \times n_1, \dots, n_N \times n_N$ -neliömatriiseja, ja  $\sum_{i=1}^N n_i = n$ , niin matriiseista  $B_1, \dots, B_N$  muodostettu matriisia

$$\text{diag}(B_1, \dots, B_N) = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_N \end{pmatrix},$$

jossa loput  $n^2 - \sum_{i=1}^N n_i^2$  kerrointa ovat nollia, on *blokkidiagonaalimatriisi*, jonka blokkeja ovat matriisit  $B_i$ . Blokin  $B_i$  koko on  $n_i$ .

**Lause 3.1** (Jordanin kanoninen muoto). *Olkoon  $A$  reaallinen  $n \times n$ -neliömatriisi, ja olkoot  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_M, \bar{\lambda}_M$  sen eri ominaisarvot. Olkoot  $a_i$  ja  $g_i$  ominaisarvon  $\lambda_i$  algebrallinen ja geometrinen kertaluku. Tällöin  $A$  voidaan konjugoida reaalisella matriisilla blokkidiagonaalimuotoon, jossa jokainen blokki on joko muotoa*

$$(\lambda_i) \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

jos  $\lambda_i$  on reaallinen, tai

$$C_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} C_{\lambda_i} & I_2 & & & \\ & C_{\lambda_i} & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & C_{\lambda_i} \end{pmatrix},$$

jos  $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$  ei ole reaaliluku. Reaalista ominaisarvoa  $\lambda_i$  vastaa  $g_i$  blokkia, joiden kokojen summa on  $a_i$ . Kompleksista ominaisarvoparia  $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$  vastaa  $g_i$  blokkia, joiden kokojen summa on  $2a_i$ .

Jordanin kanonisen muodon ja Lemman 2.4 avulla moniulotteiset tapaukset voidaan palauttaa helpommin käsiteltävään muotoon. Tällä kurssilla emme todista Lausetta 3.1, todistus esitetään monissa hieman edistyneemmän lineaarialgebran kirjoissa, esimerkiksi Horn-Johnson, Ortega.

**Esimerkki 3.2.** Olkoon  $A$  reaallinen  $3 \times 3$ -matriisi, jolla on yksi kompleksinen ominaisarvopari  $\lambda, \bar{\lambda} = \pm i$ , ja yksi reaallinen ominaisarvo  $-1$ . Tällöin  $A$  on Lauseen 3.1 mukaan matriisin

$$(10) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

konjugaatti. Matriisia  $B$  vastaava differentiaaliyhtälö  $\dot{x} = Bx$  on helppo ratkaista, koska ensimmäiset kaksi koordinaattia muodostavat oman 2-ulotteisen systeeminsä:

Kuvaus

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \\ ce^{-t} \end{pmatrix}$$

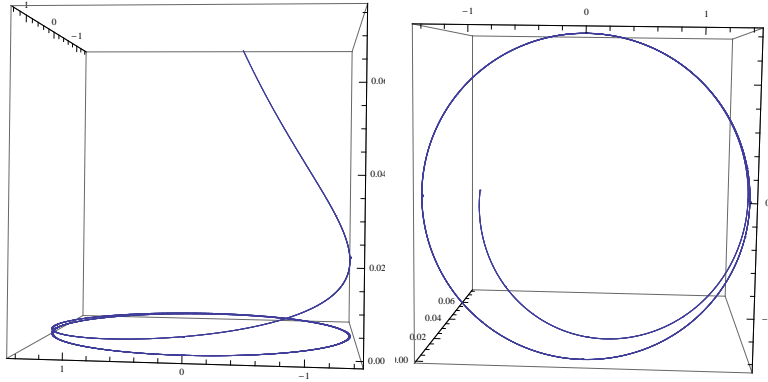
on ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

Jos  $c = 0$ , niin ratkaisu pysyy  $x_1x_2$ -tasossa ja on  $\sqrt{a^2 + b^2}$ -säteisen ympyrän parametrisointi kuten esimerkissä 1.3. Jos taas  $a = b = 0$ , niin ratkaisu pysyy  $x_3$ -akselilla ja lähestyy origoa eksponentiaalisella vauhdilla. Yleisen tilanteen ratkaisukäyrä kulkee sylinterillä

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}$$

ja kasautuu kohti  $x_1x_2$ -tason ympyrää

$$\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}.$$



KUVA 7. Kaksi eri näkymää differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Bx$  ratkaisusta alkuarvolla  $x(0) = (1, 1, 1)$ , kun  $B$  on kaavan (10) matriisi.

Alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisut saadaan muuttujanvaihtolemmän 2.4 avulla.

Kun lineaarinen autonominen differentiaaliyhtälö  $\dot{y} = Ay$  konjugoidaan muotoon  $\dot{x} = Bx$ , missä  $B = C^{-1}AC$  on Jordanin kanonisessa muodossa, niin alkuperäinen differentiaaliyhtälö korvataan ekvivalentilla yhtälöllä, jonka ratkaiseminen on helppoa: Jos  $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_M)$ , niin differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Bx$  ratkaisu saadaan yhdistämällä kutakin blokkia vastaavien differentiaaliyhtälöiden  $\dot{x}^{(j)} = B_j x^{(j)}$  ratkaisut  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$ . Jos  $B_j$  on reaalista ominaisarvoa vastaava  $1 \times 1$ -blokki tai kompleksista ominaisarvoa vastaava  $2 \times 2$ -blokki, niin ratkaisu  $x^{(j)}$  tiedetään aiemman perusteella, samoin Luvussa 2 huomattiin, että alkuarvot tehtävän

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ratkaisut ovat muotoa

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix}.$$

**Propositio 3.3.** Olkoon  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ . Alkuarvotehtävän

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} x, \quad x(0) = x_0$$

ratkaisu on

$$x(t) = e^{\lambda t} \left[ x_0^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_0^{(2)} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_0^{(3)} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_0^{(n)} \begin{pmatrix} t^{n-1}/(n-1)! \\ t^{n-2}/(n-2)! \\ \vdots \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Palaamme yleisen kompleksista ominaisarvoa vastaavan blokin ratkaisuun hetken kuluttua.

**Esimerkki 3.4.** Koska matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on yläkolmiomatriisi, näemme heti, että sen ainoa ominaisarvo on 1. Ominaisvektorit määrittävä yhtälöryhmä koostuu kahdesta yhtälöstä

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

joten  $v_1 = (1, 0, 0, 0)$  ja  $w_1 = (0, 1, 1, 0)$  virittävät 2-ulotteisen ominaisavaruuden  $E_1$ . Ominaisarvon 1 algebrallinen kertaluku on 4 ja sen geometrinen kertaluku on 2, joten matriisin  $A$  Jordanin kanoninen muoto on (permutaatiota vaille) joko

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On siis selvitettävä ainoaa ominaisarvoa 1 vastaavan yleistetyn ominaisavaruuden rakenne tarkemmin: Yhtälöllä  $(A - I_4)x = v_1$  on 2-ulotteinen ratkaisuavaruus, josta voimme valita vektorin  $v_2 = (0, 1, 0, 0)$ , joka on lineaarisesti riippumaton vektorin  $v_1$  kanssa. Sen sijaan yhtälöllä  $(A - I_4)x = v_2$  ei ole ratkaisua. Vastaavasti yhtälöllä  $(A - I_4)x = w_1$  on 2-ulotteinen ratkaisuavaruus, josta voimme valita vektorin  $w_2 = (0, 0, 0, 1)$ .

Jos  $F: X \rightarrow X$  on kuvaus, niin osajoukko  $Y \subset X$  on  $F$ -invariantti, jos  $F(Y) \subset Y$ . Matriisia  $A$  vastaavalla lineaarikuvauksella on siis kaksi invarianttia 2-ulotteista aliavaruutta  $V = \langle v_1, v_2 \rangle$  ja  $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ . Lineaarikuvauksen  $L|_V$  matriisi kannan  $v_1, v_2$  ja lineaarikuvauksen  $L|_W$  matriisi kannan  $w_1, w_2$  suhteen on sama matriisi

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Vektorit  $v_1, v_2$  ja  $w_1, w_2$  muodostavat kaksi *Jordanin ketjua* ominaisarvolle

1:  $(A - I_4)v_2 = v_1$ ,  $Av_1 = v_1$  ja  $(A - I_4)w_2 = w_1$ ,  $Aw_1 = w_1$ .

Haluttu matriisin  $A$  Jordanin kanoninen muoto on siis

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ja kannanvaihto saadaan matriisilla

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

$A = CBC^{-1}$ . Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Bx$  ratkaisut ovat

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} a + bt \\ b \\ c + dt \\ d \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälön  $\dot{y} = Ay$  ratkaisut ovat siis funktiot  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,

$$\begin{aligned} y(t) = Cx(t) &= e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bt \\ b \\ c + dt \\ d \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} a + bt \\ b + c + dt \\ c + dt \\ d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa ehdon  $y(0) = (c_1, c_2 + c_3, c_3, c_4)$ , mikä pitää ottaa huomioon alkuarvotehtävää ratkaistaessa.

Yleisessä tilanteessa, jos lineaarisesti riippumattomat vektorit  $v_1, \dots, v_K$  toteuttavat  $(A - \lambda I)v_j = v_{j-1}$  kaikilla  $j = 2, \dots, K$ ,  $(A - \lambda I)v_1 = 0$  ja yhtälöllä  $(A - \lambda I)x = v_K$  ei ole ratkaisua, niin nämä vektorit muodostavat Jordanin ketjun. Jos käytettävä kanta valitaan niin, että vektorit  $v_1, \dots, v_K$  sisältyvät siihen, aliavaruutta  $\langle v_1, \dots, v_K \rangle$  vastaa blokki

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

**3.1. Matriisien eksponenttifunktio.** Tarkastelemme nyt toista, periaatteessa suoraviivaista menetelmää lineaarisen autonomisen differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi. Varustetaan reaalisten  $n \times n$ -matriisien vektoriavaruus  $M_n$  normilla

$$\|A\| = \|(a_{ij})\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

Jono  $A_i$  suppenee kohti matriisia  $A$ , jos  $\|A_i - A\| \rightarrow 0$ , kun  $i \rightarrow \infty$ , ja sarjojen  $\sum_{j=1}^{\infty} c_j A^j$  suppeneminen määritellään osajonojen suppenemisen kautta.

**Muista:** Äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa kaikki normit ovat ekvivalentteja, joten suppenemiskäsite ei riipu normin valinnasta. Monessa tilanteessa olisi luonteva käyttää operaattorinormia

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

missä  $\|\cdot\|$  on euklidinen normi.

Määritellään tavanomaiseen tapaan  $A^0 = I_n$  kaikille  $A \in M_n$ .

**Propositio 3.5.** *Sarja*

$$(11) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$$

suppenee kaikille neliömatriiseille  $A$ .

Sarja (11) määrittelee *matriisien eksponenttifunktion*  $\exp: M_n \rightarrow M_n$ ,

$$\exp A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

*Todistus.* Olkoon  $a_{ij}^k$  matriisin  $A^k$   $ij$ -kerroin. Tällöin

$$|a_{ij}^2| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} \right| \leq n \|A\|^2,$$

ja induktiolla

$$|a_{ij}^N| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}^{N-1} a_{kj} \right| \leq n^{N-1} \|A\|^N.$$

Siispä

$$\frac{|a_{ij}^N|}{N!} \leq \frac{n^{N-1} \|A\|^N}{N!} \leq \frac{n^N \|A\|^N}{N!},$$

ja koska reaalinen eksponenttifunktio suppenee itseisesti, niin Weierstrassin  $M$ -testin ja määritelmän nojalla sarja (11) suppenee.  $\square$

**Esimerkki 3.6.** Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} = -\beta^2 I_2,$$

$$A^3 = -\beta^2 I_2 \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = -\beta^2 A,$$

$$A^4 = \beta^4 I_2,$$

⋮

ja induktiolla saadaan siis

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k)}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k+1)}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k)}}{(2k)!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vastaavasti muille (luvulla  $t \in \mathbb{R}$  kerrotuille)  $2 \times 2$ -matriisien perusmuodoille saadaan

$$\exp t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ja jos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad R = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix},$$

niin

$$\exp t \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 & & & \\ & \Lambda & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & \Lambda \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} R & Rt & Rt^2/2 & \dots & Rt^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & R & Rt & \dots & Rt^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & R & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix}$$

Matriisien eksponenttifunktiolla on seuraavat perusominaisuudet:

**Propositio 3.7.** Jos  $A, B, C \in M_n$ ,  $C$  on kääntyvä ja  $AB = BA$ , niin

- (a)  $\exp(CAC^{-1}) = C \exp(A) C^{-1}$ ,
- (b)  $\exp(A + B) = \exp A \exp B$ , ja
- (c)  $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$ .

*Todistus.* (a) On helppo todistaa tarkastelemalla osasummien jonoja.

(b) On hieman hankalampi: Binomikaava antaa kommutoiville matriiseille

$$(A + B)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{A^j B^k}{j! k!},$$

joten väite on

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{A^j B^k}{j! k!} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right).$$

Tämä yhtälö todistetaan samalla tavalla kuin vastaava reaalilukujen tulos (Cauchyn tulo/Analyysi 3), yksityiskohdat matriisitapauksessa esitetään esimerkiksi kirjassa Hirsch-Smale-Devaney.

(c) Seuraa (b)-kohdasta valitsemalla  $B = -A$ . □

Erityisesti siis  $\exp A$  on kääntyvä kaikilla  $A \in M_n$ .

**Propositio 3.8.** *Olkoon  $A \in M_n$ , ja olkoon  $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow M_n$ ,*

$$\Phi(t) = e^{tA}.$$

*Tällöin*

$$\Phi'(t) = e^{tA} A = \Phi(t)A.$$

*Todistus.*

$$\Phi(t_0 + s) = e^{(t_0+s)A} = e^{t_0A} e^{sA} = e^{t_0A} (I + sA + O(s^2)) = e^{t_0A} + e^{t_0A} A s + O(s^2).$$

□

**Lause 3.9.** *Olkoon  $A \in M_n$ . Alkuarvotehtävän  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$  ainoa ratkaisu on  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x(t) = e^{tA} x_0$ .*

*Todistus.* Edellisestä tuloksesta seuraa heti, että

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(e^{tA} x_0) = e^{tA} A x_0 = A e^{tA} x_0 = A x_t$$

kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ , joten  $x(t)$  on ratkaisu.

Jos  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  on alkuarvotehtävän ratkaisu, niin määritellään kuvaus  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  asettamalla  $z(t) = e^{-tA} y(t)$ . Nyt

$$z'(t) = -A e^{-tA} y(t) + e^{-tA} A y(t) = e^{-tA} (A - A) y(t) = 0,$$

joten  $z$  on vakiokuvaus  $z(t) \equiv x_0$ . Siispä kuvauksen  $z$  määritelmä antaa  $y(t) = e^{tA} x_0$ . □

**Esimerkki 3.10.** Olkoot

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 & & & \\ & \Lambda & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & \Lambda \end{pmatrix}.$$

Lauseen 3.9 mukaan alkuarvotehtävän  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$  ratkaisu on

$$x(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} R & Rt & Rt^2/2 & \dots & Rt^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & R & Rt & \dots & Rt^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & R & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix} x_0,$$

missä

$$R = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Erityisesti siis tapauksessa

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}$$

ratkaisu alkuarvolla  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  on

$$x(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t & t \cos \beta t & t \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t & -t \sin \beta t & t \cos \beta t \\ 0 & 0 & \cos \beta t & \sin \beta t \\ 0 & 0 & -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

**3.2. Vakion variointi.** Jos differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(t, x(t))$  oikean puolen kuvaus on summa lineaarikuvauksesta avaruusmuuttujassa  $x$  ja jatkuvasta kuvauksesta aikamuuttujassa  $t$ , niin ratkaisu saadaan menetelmällä, jota kutsutaan *vakion variointiksi*. Harjoituksissa todistetaan:

**Lause 3.11.** *Olkoon  $A$   $n \times n$ -matriisi, ja olkoon  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva kuvaus. Kuvaus*

$$x(t) = \exp(tA) \left( x_0 + \int_0^t \exp(-sA) G(s) ds \right)$$

*on alkuarvotekävän*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*ratkaisu, kun  $x_0 \in \mathbb{R}$ .*

**Esimerkki 3.12.** Tarkastellaan vaimenevaa värähtelijää: Kiinnitetään ideaalinen jousi seinään toisesta päästään. Kiinnitetään jousen toiseen päähän pistemäinen paino, jonka massa on  $m$ . Ajatellaan, että jousen liike on rajoitettu parametrimillä  $x$  parametrisoidulle viivalle, jota pitkin sitä voi vetää tai painaa kokoon. Olkoon jousen toinen pää pisteessä  $x = 0$ . Kun jousta venytetään tai painetaan kasaan, se vastustaa siirtymää voimalla  $-kx$ , missä  $k > 0$  on *jousivakio*. Jousi aiheuttaa siis tarkasteltavalle painolle kiihtyvyyden yhtälöllä  $m\ddot{x} = -kx$ . Oletetaan vielä, että tarkasteltava paino liikkuu pinnalla, jossa siihen vaikuttaa nopeuteen verrannollinen kitka  $-b\dot{x}$ , missä  $b > 0$ . Tätä systeemiä kutsutaan *vaimenevaksi (harmoniseksi) värähtelijäksi*. (Jos  $b = 0$ , saadaan jo aiemmin käsittelemämme *harmoninen värähtelijä*.) Systemin aikakehitystä kuvaa toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Valitsemalla  $y_1 = x$  ja  $y_2 = \dot{x}$  saadaan ekvivalentti lineaarinen yhtälöpari

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2, \end{cases}$$

jonka kerroinmatriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix},$$

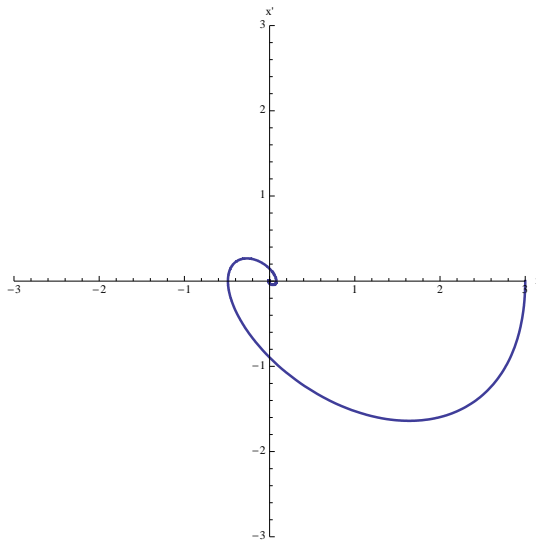
matriisimerkinnällä siis

$$(13) \quad \dot{y} = Ay = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} y.$$

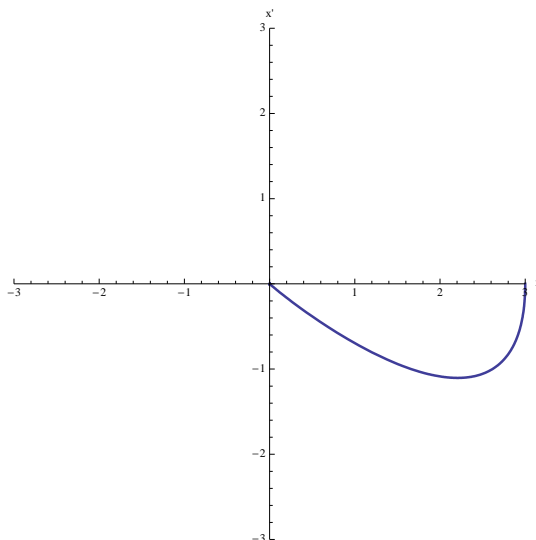
Tämän yhtälön ratkaisun tyyppi riippuu parametreista  $m$ ,  $k$  ja  $b$ . Matriisin  $A$  determinantti  $k/m$  on aina positiivinen ja sen ominaisarvot ovat

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}.$$

- Jos  $b^2 < 4km$ , niin matriisilla  $A$  on kaksi kompleksista ominaisarvoa, joiden reaaliosa on negatiivinen, joten ratkaisu on spiraalinielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla  $x(0) \neq 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , niin se värähtelee tasapainopisteen ympärillä äärettömän monta kertaa.
- jos  $b^2 \geq 4km$ , niin matriisilla  $A$  on kaksi negatiivista ominaisarvoa, joten ratkaisu on nielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla  $x(0) \neq 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , niin se palautuu kohti tasapainopistettä ylittämättä pistettä  $x = 0$  kertauksaan.



KUVA 8. Vaimennettu värähtelijä parametreilla  $m = k = b = 1$ .



KUVA 9. Vaimennettu värähtelijä parametreilla  $m = k = 1$ ,  $b = 2$ .

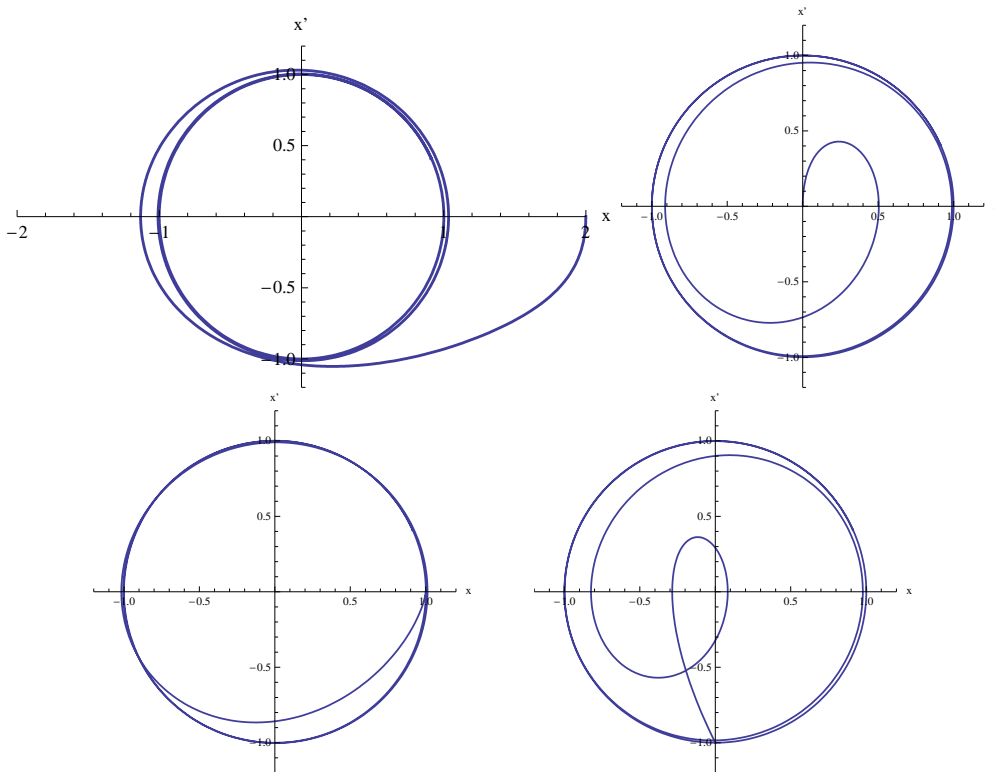
Tarkastellaan nyt *pakotettua* vaimenevaa värähtelijää: Edellä kuvattuun jousen päässä liikkuvaan painoon vaikuttaa jokin ulkoinen voima  $g(t)$ , joka aiheuttaa *ajasta*,

ei paikasta riippuvan kiihtyvyyden. Epäautonomisen alkuarvotehtävän

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2 + g(t), \end{cases}$$

ratkaisu saadaan Lauseen 3.11 avulla. Tarkastellaan erityisesti tilannetta, jossa pakottava voima on jaksollinen, ja erityisesti  $g(t) = \cos(t)$ . Tällöin Lauseen 3.11 kuvaus  $G$  on  $G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ , ja alkuarvotehtävän (14) ratkaisu on

$$y(t) = \exp(tA)y_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds.$$



KUVA 10. Pakotettu vaimeneva värähtelijä parametreillä  $m = k = b = 1$  alkuarvoilla  $y(0) = (2, 0)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(0) = (1, 0)$ ,  $y(0) = (0, -1)$ .

Numeerisesti laskettuja esimerkkejä tarkastelemalla näyttäisi siltä, että alkuarvosta riippumatta ratkaisut lähestyvät samaa ympyrää, jonka koko riippuu vaimenevan värähtelijän parametreista. Kuvista huomaamme myös, että epäautonomisen differentiaaliyhtälön ratkaisukäyrät voivat leikata itseään “epät triviaalilla tavalla” kuten kuvassa 10. Jos OY-lauseen oletukset toteuttavan autonomisen yhtälön ratkaisulle pätee  $y(t_1) = y(t_2)$ , niin ratkaisu on  $|t_2 - t_1|$ -jaksollinen. Tarkasteltavassa alkuarvotehtävässä (14) pakottava termi on  $2\pi$ -jaksollinen, joten, jos tämän alkuarvotehtävän ratkaisulle pätee  $y(2\pi) = y_0 = y(0)$ , niin ratkaisu  $y$  on  $2\pi$ -jaksollinen. Itse asiassa alkuarvotehtävällä on täsmälleen yksi  $2\pi$ -jaksollinen ratkaisu: Jos  $y(2\pi) = y_0$ , niin

$$y_0 = \exp(2\pi A)y_0 + \exp(2\pi A) \int_0^{2\pi} \exp(-sA)G(s)ds = \exp(2\pi A)y_0 + w,$$

joten alkuarvo  $y_0$  vastaa  $2\pi$ -jaksollista rataa, jos ja vain jos se on yhtälön

$$(15) \quad (\exp(2\pi A) - I)y_0 = w$$

ratkaisu. Matriisin  $A$  ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiivisia, joten matriisin  $\exp A$  ominaisarvot ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin 1, erityisesti siis kumpikaan niistä ei ole 1. Siis matriisi  $\exp(2\pi A) - I$  on kääntyvä ja yhtälöllä (15) on täsmälleen yksi ratkaisu  $y_0 = (\exp(2\pi A) - I)^{-1}w \in \mathbb{R}^2$ .

Jos  $z_0 \in \mathbb{R}^2$ , niin alkuarvotekävän (14) ratkaisu alkuarvolla  $z_0$  on

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp(tA)z_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds \\ &= \exp(tA)(z_0 - y_0) + \exp(tA)y_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds \\ &= \exp(tA)(z_0 - y_0) + y(t), \end{aligned}$$

missä  $y(t)$  on  $2\pi$ -jaksollinen ratkaisu. Termi  $\exp(tA)(z_0 - y_0)$  lähestyy nollaa, kun  $t \rightarrow \infty$  koska se on spiraalinielua vastaavan lineaarisen homogeenisen alkuarvotekävän (12) ratkaisu alkuarvolla  $z_0 - x_0$ .

#### 4. EPÄLINEAARISET DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Aiemmissa luvuissa tarkastelimme lineaaristen autonomisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista. Monissa tilanteissa tavattavat differentiaaliyhtälöt ovat kuitenkin yleisempää muotoa, esimerkiksi muotoa

- $\dot{x} = f(x)$ , missä vektorikenttä  $f$  ei ole lineaarinen, tai
- $\dot{x} = f(x, t)$ , missä kuvaus  $f$  on ajasta riippuva.

Jälkimmäinen ongelma on pieni: Korvataan  $n$  muuttujan differentiaaliyhtälö  $\dot{x} = f(x, t)$   $n + 1$  muuttujan yhtälöllä lisäämällä uusi muuttuja  $x_{n+1} = t$  ja yhtälö:  $\dot{x}_{n+1} = 1$ . Huomaa, että näin saatava differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1((x_1, \dots, x_n), t), \\ \dot{x}_2 = f_2((x_1, \dots, x_n), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n((x_1, \dots, x_n), t). \\ \dot{x}_{n+1} = 1 \end{cases}$$

ei ole koskaan lineaarinen viimeisen yhtälön vuoksi. Todistamme tässä luvussa epälineaaristen yhtälöiden Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen. Sitä ennen valmistemme hieman tarkastelemalla kutistavia kuvauksia yleisessä tilanteessa.

**4.1. Kutistavat kuvaukset metrisessä avaruudessa.** Olkoon  $X \neq \emptyset$ . Kuvaus  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$  metriikka joukossa  $X$ , jos

- $d(x, y) = 0$ , jos ja vain jos  $x = y$  (positiivisuus),
- $d(x, y) = d(y, x)$  kaikille  $x, y \in X$  (symmetrisyys), ja
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  kaikille  $x, y, z \in X$  (kolmioepäyhtälö)

Pari  $(X, d)$  on *metrinen avaruus*.

Metrisiä avaruuksia käsitellään laajemmin muunmuassa topologian kurssilla, tässä valitsemme teoriasta vain tarpeelliset osat.

Metriikka on tapa mitata joukon  $X$  pisteiden etäisyyksiä, sen määritelmään on valittu ominaisuuksia, jotka euklidisen normin määräämällä avaruuden  $\mathbb{R}^n$  euklidisella etäisyydellä (metriikalla)

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

on.

Metrisen avaruuden  $X$  Cauchyn jonot ja jonojen suppeneminen määritellään kuten euklidisessa avaruudessa. Metrinen avaruus  $X$  on *täydellinen*, jos sen kaikki Cauchyn jonot suppenevat.

**Esimerkki 4.1.** Olkoon  $I \subset \mathbb{R}$  suljettu väli. Väillä  $I$  määriteltyjen jatkuvien kuvauksien  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  vektoriavaruus  $C^0(I, \mathbb{R}^n)$  varustettuna maksiminormilla

$$\|f\| = \max_{t \in I} \|f(t)\|$$

on täydellinen metrinen avaruus, kun se varustetaan metriikalla  $d(f, g) = \|f - g\|$ .

Olko  $(X, d_X)$  ja  $(Y, d_Y)$  metrisiä avaruuksia. Kuvaus  $F: X \rightarrow Y$  on  $K$ -Lipschitz-kuvaus tai  $K$ -Lipschitz-jatkuva, jos

$$d_Y(F(x), F(y)) \leq K d_X(x, y)$$

kaikille  $x, y \in X$ . Jos  $F$  on  $K$ -Lipschitz jollain  $K > 0$ , niin sanotaan, että  $F$  on Lipschitz-jatkuva. Jos  $F$  on  $K$ -Lipschitz jollain  $K < 1$ , niin sanotaan, että  $F$  on kutistava (vakiolla  $K$ ).

Piste  $x \in X$  on kuvauksen  $F: X \rightarrow X$  kiintopiste, jos  $F(x) = x$ .

**Lause 4.2** (Kutistusperiaate eli Banachin kiintopistelause). *Olko  $X$  täydellinen metrinen avaruus. Tällöin jokaisella kutistavalla kuvauksella  $F: X \rightarrow X$  on täsmälleen yksi kiintopiste.*

*Todistus.* Olko  $x \in X$ , ja olko  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m < n$ . Olko  $F: X \rightarrow X$  kutistava kuvaus vakiolla  $K < 1$ . Tällöin

$$\begin{aligned} d(F^m(x), F^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k}(F(x))) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k} d(x, F(x)) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Siis jono  $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$  on Cauchyn jono, ja koska  $X$  on täydellinen, se suppenee kohti jotain pistettä  $x_{\infty} \in X$ .

Piste  $x_{\infty}$  on kuvauksen  $F$  kiintopiste, sillä kaikille  $j \in \mathbb{N}$  pätee

$$\begin{aligned} d(x_{\infty}, F(x_{\infty})) &\leq d(x_{\infty}, F^j(x)) + d(F^j(x), F^{j+1}(x)) + d(F^{j+1}(x), F(x_{\infty})) \\ &\leq (1+K)d(x_{\infty}, F^j(x)) + K^j d(x, F(x)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun  $j \rightarrow \infty$ . Metriikan positiivisuudesta seuraa, että  $x_{\infty} = F(x_{\infty})$ .

Jos  $x_{\infty}$  ja  $y_{\infty}$  ovat kiintopisteitä, niin

$$K d(x_{\infty}, y_{\infty}) \geq d(F(x_{\infty}), F(y_{\infty})) = d(x_{\infty}, y_{\infty}),$$

joten  $d(x_{\infty}, y_{\infty}) = 0$ , ja siis  $x_{\infty} = y_{\infty}$ . □

**Lause 4.3** (OY-lause). *Olko  $I \subset \mathbb{R}$  avoin väli, ja olko  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin. Olko  $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva kuvaus, jolle kuvaus  $x \mapsto f(t, x)$  on  $M$ -Lipschitz jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ . Jokaisella  $(a, b) \in I \times U$  on  $\delta > 0$  siten, että alkuarvotehtävällä*

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

on välillä  $]a - \delta, a + \delta[$  määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

*Todistus.* Todistamme lauseen tapauksessa, jossa  $U = \mathbb{R}^n$  ja  $f$  on  $M$ -Lipschitz. Yleisen tapauksen todistus samalla idealla esitetään esimerkiksi Hasselblatin ja Katokin kirjassa.

Olko siis  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva kuvaus. Valitaan  $0 < \delta < \frac{1}{M}$ . Olko  $(a, b) \in ]a - \delta, a + \delta[ \times \mathbb{R}^n$ . Picardin operaattori on kuvaus  $\mathcal{P}_{a,b}: C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$ ,

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(T) = b + \int_a^T f(s, \phi(s)) ds.$$

Teemme kaksi oleellista havaintoa Picardin operaattorista:

**Lemma 4.4.** *Kuvaus  $\phi: [a-\delta, a+\delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  on alkuarvotehtävän (16) ratkaisu välillä  $]a-\delta, a+\delta[$ , jos ja vain jos se on Picardin operaattorin  $\mathcal{P}_{a,b}$  kiintopiste.*

*Todistus.* Kuvaus  $\phi$  on Picardin operaattorin kiintopiste, jos ja vain jos

$$(17) \quad \phi(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds .$$

Jos  $\phi$  on kiintopiste, se toteuttaa siis selvästi alkuehdon  $\phi(a) = b$ . Lisäksi kuvaus  $\phi$  on differentioituva ja toteuttaa ehdon  $\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t))$  analyysin peruslauseen nojalla.

Toisaalta, jos  $\phi$  on alkuarvotehtävän (16) ratkaisu välillä  $]a-\delta, a+\delta[$ , niin kaikilla  $t \in ]a-\delta, a+\delta[$  pätee

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds = b + \int_a^t \dot{\phi}(s) ds = \phi(t),$$

joten  $\phi$  on kiintopiste. □

**Lemma 4.5.** *Picardin kuvaus on kutistava.*

*Todistus.*

$$\|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - \mathcal{P}_{a,b}(\psi)\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \left\| \int_a^t (f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right\| \leq \delta M \|\phi - \psi\| .$$

□

Lemman 4.5 ja Lauseen 4.2 mukaan Picardin operaattorilla on täsmälleen yksi kiintopiste. Lemman 4.4 mukaan tämä kiintopiste on tarkasteltavan alkuarvotehtävän (16) ainoa ratkaisu välillä  $]a-\delta, a+\delta[$ . □

Lausetta 16 voi soveltaa aina, kun  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  on  $C^1$ , sillä  $f|_B$  on Lipschitz-jatkuva, kun  $B \subset U$  on suljettu pallo.

**Seuraus 4.6** (Autonominen OY-lause). *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin. Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -kuvaus. Jokaisella  $a \in \mathbb{R}$  ja  $x_0 \in U$  on  $\delta > 0$  siten, että alkuarvotehtävällä*

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

*on välillä  $]a-\delta, a+\delta[$  määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.* □

**Esimerkki 4.7.** Vaikka tarkastelemmekin lähinnä korkeampiulotteisia tilanteita, on hyvä muistaa, miten Picardin iteraatio antaa alkuarvotehtävän  $\dot{y} = y, y(0) = 1$  ratkaisun: Valitaan ensimmäiseksi arvaukseksi vakiofunktio  $y_0(t) = 1$ . Tällöin

$$y_1(t) = \mathcal{P}(y_0)(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t,$$

$$y_2(t) = \mathcal{P}(y_1)(t) = 1 + \int_0^t (1+s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

ja induktiolla

$$y_k(t) = \mathcal{P}(y_{k-1})(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} .$$

Kuvausten  $y_k$  muodostama jono suppenee kohti eksponenttifunktiota tasaisesti kompakteilla väleillä.

Osoitamme seuraavaksi, että toisiaan riittävän lähellä olevia alkuarvoja vastaavat ratkaisut pysyvät lähellä toisiaan: Merkitään jatkossa alkuarvottehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f(a) = b$  ratkaisua  $\phi_{a,b}$ .

**Propositio 4.8.** *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $K$ -Lipschitz-jatkuva. Olkoon  $\epsilon > 0$ . Tällöin on  $\eta > 0$ , jolle*

$$\|\phi_{a,b} - \phi_{a,b'}\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \|\phi_{a,b}(t) - \phi_{a,b'}(t)\| < \epsilon,$$

jos  $\|b - b'\| < \eta$ .

*Todistus.* Todistus seuraa suoraan seuraavasta parametrisoitujen kutistavien kuvausten tuloksesta valitsemalla kutistavien kuvausten perheeksi Picardin operaattorit, jotka parametrisoidaan alkuarvoilla  $b \in U$ .

Käytämme kahden metrisen avaruuden  $(X, d_X)$  ja  $(Y, d_Y)$  tuloavaruudessa tulo metriikkaa  $d = d_{x \times y}$ ,

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}.$$

**Propositio 4.9.** *Olkoon  $X$  täydellinen metrisen avaruus, ja olkoon  $Y$  ämetrisen avaruus. Olkoon  $0 < K < 1$  ja olkoon  $F: X \times Y \rightarrow X$  jatkuva kuvaus, jolle kuvaus  $F_y = F(\cdot, y): X \rightarrow X$  on kutistava kuvaus vakiolla  $K$  jokaiselle  $y \in Y$ . Olkoon  $g: Y \rightarrow X$  kuvaus, jonka arvo pisteessä  $y$  on kuvauksen  $F_y$  kiintopiste. Tällöin kuvaus  $g$  on jatkuva.*

*Todistus.* Havaitaan, että kaikille  $x \in X$  pätee

$$d(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^k d(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) + d(F_y^{k+1}(x), g(y)),$$

joten

$$d(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} d(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) = \frac{1}{1-\lambda} d(x, F_y(x)),$$

sillä äärellinen summa on pienempi kuin  $\frac{1}{1-\lambda} d(x, F_y(x))$  ja  $d(F_y^{k+1}(x), g(y)) \rightarrow 0$ , kun  $k \rightarrow \infty$ , koska  $g(y)$  on kutistavan kuvauksen  $F_y$  kiintopiste. Valitaan  $x = g(y') = F(g(y'), y')$ , jolloin yllä oleva epäyhtälö antaa

$$d(g(y'), g(y)) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(F(g(y'), y'), F(g(y'), y)) = \frac{1}{1-\lambda} d_Y(y', y),$$

mistä väite seuraa. □

Palaamme Proposition 4.8 todistukseen tapauksessa  $U = \mathbb{R}^n$ : Väite seuraa valitsemalla  $X = C^0([a-\delta, a+\delta], \mathbb{R}^n)$ ,  $Y = \mathbb{R}^n$  ja  $F: X \times Y \rightarrow X$ ,  $F(\phi, b) = \mathcal{P}_{a,b}(\phi)$ . □

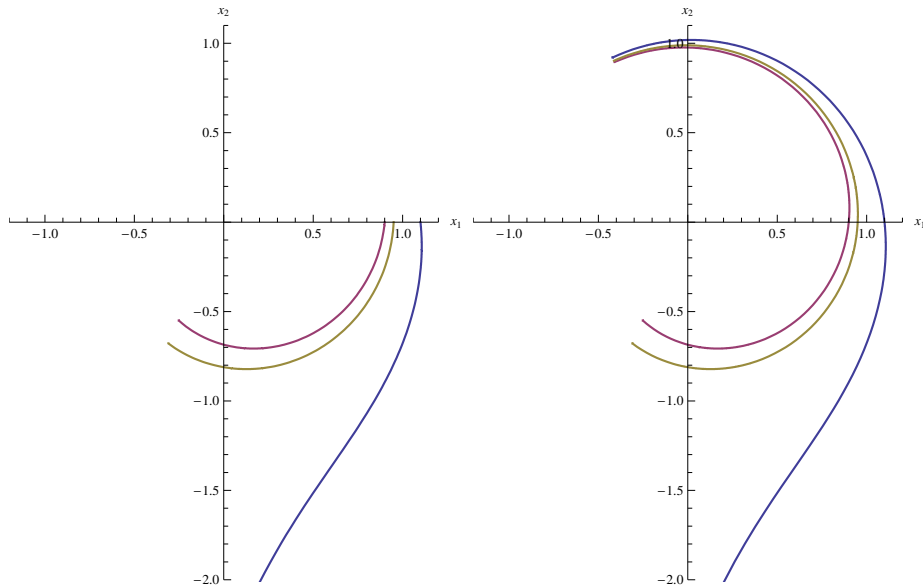
**Esimerkki 4.10.** Differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix}$$

ratkaisut alkuarvoilla  $x_0 = (0.9, 0)$  ja  $x_1 = (0.95, 0)$  käyttäytyvät samaan tapaan (itse asiassa kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ ), kun taas alkuarvolla  $x_2 = (1.1, 0)$  käyttäytyminen on erilaista kuin alkuarvoilla  $x_0$  ja  $x_1$ , kun  $t$  kasvaa.

Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C^1$ -vektorikenttä. Autonomisella alkuarvottehtävällä

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$



on OY-lauseen mukaan jollain avoimella välillä  $t_0 \in I$  määritelty yksikäsitteinen ratkaisu. Maksimaalista tällaista väliä kutsutaan ratkaisun *maksimaaliseksi määrittelyväliksi*.

**Propositio 4.11.** *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ . Tällöin*

- (a) *Jokaisella  $x_0 \in U$  ja  $t_0 \in \mathbb{R}$  on alkuarvotehtävän (19) maksimaalinen avoin määrittelyväli.*
- (b) *Jos  $U = \mathbb{R}^n$  ja  $f$  on  $K$ -Lipschitz, niin maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ .*

*Todistus.* (a) Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että  $t_0 = 0$ . OY-lauseen mukaan alkuarvotehtävällä on ratkaisu, joka on yksikäsitteisesti määritelty jollain välillä  $] -\delta, \delta[$ . Tehdään ensin seuraava havainto: Jos  $I_1$  ja  $I_2$  ovat avoimia välejä, joilla alkuarvotehtävän ratkaisut  $x_1$  ja  $x_2$  on määritelty, niin  $x_1(t) = x_2(t)$  kaikilla  $t \in I_1 \cap I_2$ . Nimittäin, jos tämä ei päde, niin on maksimaalinen osaväli  $[0, t^*] \subset I_1 \cap I_2$ , jossa ratkaisut yhtyvät. Olkoon  $x^* = x_1(t^*) = x_2(t^*)$ . Nyt  $x_1$  ja  $x_2$  ovat alkuarvotehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(t^*) = x^*$  ratkaisuja jollain välillä  $]t^* - a, t^* + a[$ , joten ne yhtyvät tällä välillä. Tämä on ristiriita ajan  $t^*$  määritelmän kanssa.

Olkoon  $J = ]\alpha, \beta[$  yhdiste kaikista alkuarvotehtävän ratkaisuväleistä. Määritellään kuvaus  $x: ]\alpha, \beta[ \rightarrow U$  näin: Jokaisella  $t \in J$  on alkuarvotehtävän (19) ratkaisu  $u$ , joka on määritelty jollain ajan  $t$  sisältämällä välillä. Asetetaan  $x(t) = u(t)$ . Edellä tehdyn havainnon mukaan  $x$  on nyt hyvin määritelty. Lisäksi se on alkuarvotehtävän (19) ratkaisu.

(b)-kohta todistetaan harjoituksissa. □

Silloinkin, kun differentiaaliyhtälö on määritelty koko avaruudessa  $\mathbb{R}^n$ , niin maksimaalinen määrittelyväli voi olla pienempi kuin koko  $\mathbb{R}$ , jos  $f$  ei ole Lipschitz-jatkuva, kuten harjoituksissa käsitelty esimerkki  $\dot{x} = x^2$ , osoittaa.

**Esimerkki 4.12.** Alkuarvotehtävää

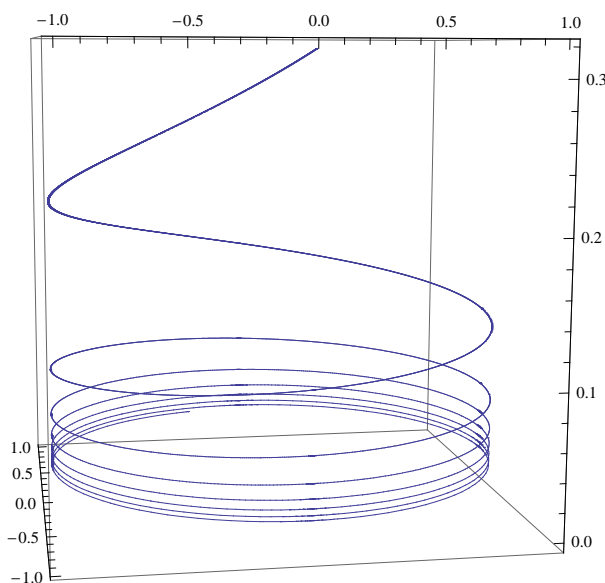
$$\dot{x} = \begin{cases} -x_2/x_3^2 \\ x_1/x_3^2 \\ 1 \end{cases}, \quad x(1/\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/\pi \end{pmatrix}$$

on luonnollista tarkastella joukossa  $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ . Tämän alkuarvotteävän ratkaisu voidaan itse asiassa antaa helposti:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ \cos(1/t) \\ t \end{pmatrix} .$$

Ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on  $]0, \infty[$ . Ratkaisukäyrä on sylinterillä  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , ja kun  $t \rightarrow 0$ , niin ratkaisukäyrä kasautuu kohti ympyrää

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\} .$$



Koko avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  määritellyille differentiaaliyhtälöille saadaan Proposition 4.11 nojalla soveltamalla Propositiota 4.8 toistuvasti (luokkaa  $T/\delta$  kertaa) saadaan jatkuvuus alkuarvosta pidemmille aikaväleille:

**Propositio 4.13.** *Olkoon  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $K$ -Lipschitz-jatkuva. Olkoon  $\epsilon > 0$ . Tällöin on  $\eta > 0$ , jolle*

$$\|\phi_{a,b} - \phi_{a,b'}\| = \max_{|t-a| \leq T} \|\phi_{a,b}(t) - \phi_{a,b'}(t)\| < \epsilon,$$

*jos  $\|b - b'\| < \eta$ .*

5. EPÄLINEAARISTEN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖIDEN RATKAISUJEN  
TARKASTELUA

Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuvasti differentioituva. Olkoon  $p \in \mathbb{R}^n$  differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = f(x)$$

tasapainopiste (siis  $f(p) = 0$ ). Lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\dot{x} = Df(p)x$$

on differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  *linearisointi* pisteessä  $p$ . Jos lineaarikuvauksella  $Df(p)$  ei ole ominaisarvoja, joiden reaaliosa on nolla, niin tasapainopiste  $p$  on *hyperbolinen*.

**Esimerkki 5.1.** Differentiaaliyhtälöllä

$$(20) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

on yksi tasapainopiste  $x = 0$ . Tässä pisteessä sen linearisointi on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Linearisoitu yhtälö on hyperbolinen, ja sen ratkaisut tunnemme jo hyvin: Origo on satulapiste. Alkuperäisen epälineaarisen differentiaaliyhtälön (20) ratkaiseminen ei ole vaikeaa:

$$x(t) = \begin{pmatrix} (a + b^3/2)e^t - b^3/2e^{-2t} \\ be^{-t} \end{pmatrix}$$

on ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Jos tasapainopiste  $p$  on hyperbolinen, niin differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisut käyttäytyvät lähellä pistettä  $p$  kuten linearisoidun yhtälön ratkaisut lähellä origoa. Täsmällisemmin:

**Lause 5.2** (Grobmanin ja Hartmanin lause). *Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuvasti differentioituva. Jos  $p$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  hyperbolinen tasapainopiste, niin on avoimet joukot  $p \in U \subset \mathbb{R}^n$  ja  $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$  ja homeomorfismi  $H: U \rightarrow V$  siten, että jokaiselle  $x_0 \in U$  on avoin väli  $0 \in I \subset \mathbb{R}$ , jolla on seuraava ominaisuus: Olkoon  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisu alkuarvolla  $x_0$ , ja olkoon  $A$  lineaarikuvauksen  $Df(p)$  matriisi standardikannassa. Tällöin kaikille  $t \in I$  pätee*

$$(21) \quad H \circ x(t) = \exp(At)H(x_0). \quad \square$$

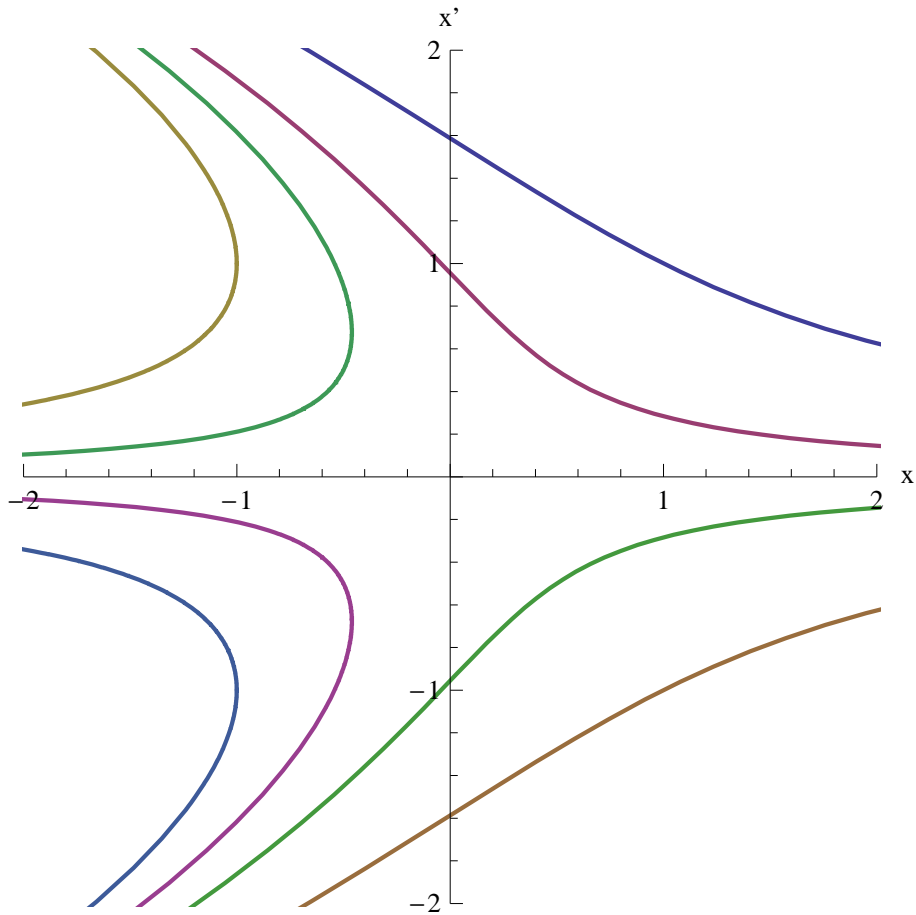
Hyperbolisen tasapainopisteen *tyyppi* on vastaavan linearisoidun differentiaaliyhtälön tyyppi (satula, nielu, lähde, ...).

**Esimerkki 5.3.** Esimerkin 5.1 differentiaaliyhtälöllä on satulapiste origossa. Tässä tapauksessa Grobmanin ja Hartmanin lauseen homeomorfismi  $H$  on globaali homeomorfismi  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$H(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2/3 \\ x_2 \end{pmatrix} = y.$$

Kuvaus  $H$  on homeomorfismi, itse asiassa se on diffeomorfismi, sen käänteiskuvaus on

$$H^{-1}(y) = \begin{pmatrix} y_1 - y_2^2/3 \\ y_2 \end{pmatrix} = x.$$



KUVA 11. Esimerkin 5.1 epälineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisukäyriä.

Nyt differentiaaliyhtälö tulee uudessa koordinaatissa  $y$ -muotoon

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 + \frac{2}{3}x_2\dot{x}_2 = x_1 + x_2^2 - \frac{2}{3}x_2^2 = y_1$$

ja

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = -x_2 = -y_2,$$

joka on alkuperäisen differentiaaliyhtälön linearisointi tasapainopisteessä 0.

Kuvaus  $H$  kuvaa  $x_1$ -akselin  $y_1$ -akseliksi ja paraabelin

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + \frac{1}{3}x_2^2\}$$

$y_2$ -akseliksi. Yhtälön (21) mukaan alkuarvoja  $x_0 \in S \setminus \{0\}$  vastaavat ratkaisut lähestyvät origoa oleellisesti eksponentiaalista vauhtia. Käyrä  $S$  on tasapainopisteen 0 *vakaa käyrä* (stable curve). Vastaavasti  $x_1$ -akseli on tasapainopisteen 0 *epävakaa käyrä*: siltä valituilla alkuarvoilla ratkaisut menevät äärettömyyteen eksponentiaalisella nopeudella.

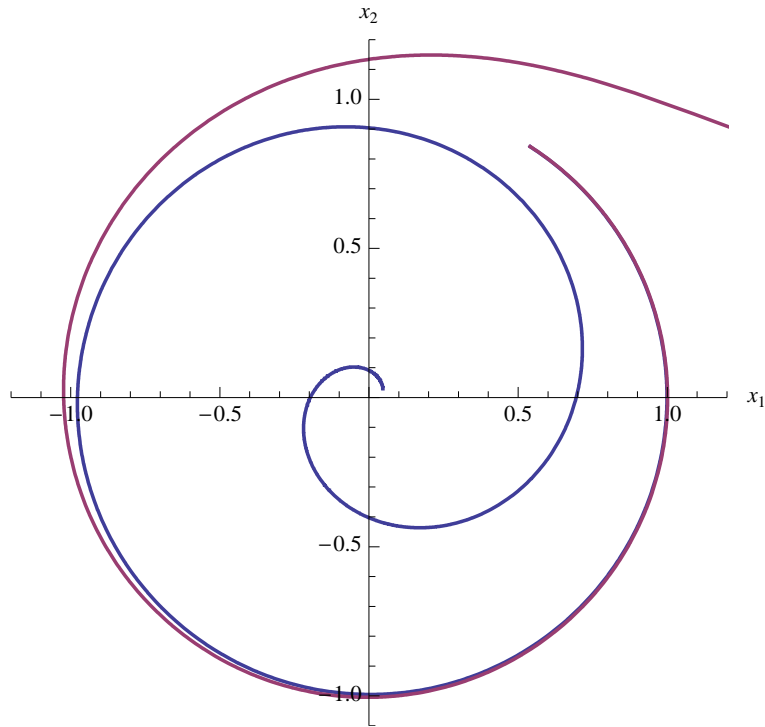
**Esimerkki 5.4.** Differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} - x_2 - \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix}$$

ainoa tasapainopiste on 0. Linearisoitu yhtälö on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} - x_2 \\ x_1 + \frac{x_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x = Ax$$

Matriisin  $A$  ominaisarvot ovat  $\frac{1}{2} \pm i$ , joten Grobmanin ja Hartmanin lausetta voi soveltaa: 0 on spiraalilähde. Ratkaisukäyrät ovat samat kuin aiemmassa esimerkissä, mutta ratkaisut kulkevat toiseen suuntaan.



Epälineaarinen yhtälö voidaan ratkaista vaihtamalla napakoordinaatteihin: Napakoordinaattikuvaus on  $N: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,

$$N(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Nyt

$$\dot{x}_1 = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta},$$

ja

$$\frac{x_1}{2} - x_2 - \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} = \frac{1}{2}(r - r^3) \cos \theta - r \sin \theta$$

$$x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} = \frac{1}{2}(r - r^3) \sin \theta + r \cos \theta,$$

Vertaamalla sinin ja kosinin kertoimia saadaan alkuperäisen kanssa ekvivalentti differentiaaliyhtälö napakoordinaateissa:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2)/2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Kulmakomponentin ja radiaalisen komponentin yhtälöt siis eriytyvät. Ratkaisusta  $\theta(t) = t + \theta_0$  nähdään, että ratkaisut kiertävät origoa tasaisella kulmanopeudella. Yksikköympyrän sisältä, siis läheltä spiraalilähdettä 0 lähtevät ratkaisut pysyvät kuitenkin rajoitettuina: OY-lauseen nojalla ratkaisukäyrät eivät leikkaa toisiaan. Koska alkuarvolla  $r_0 = 1$  ratkaisukäyrä on yksikköympyrän parametrisointi vakionopeudella, yksikköympyrästä lähtevät ratkaisut pysyvät rajoitettuina yksikköympyrään. Koska linearisoidun systeemin ratkaisut menevät äärettömyyteen, kun  $t \rightarrow \infty$ , ei Grobmanin ja Hartmanin lauseen homeomorfismi  $H$  voi olla koko tasossa määritelty kuvaus.

## Kurssi 2

### 6. DIFFERENTIAALIYHTÄLÖN VIRTAUS

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin, ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Ensimmäisellä kurssilla tarkastelimme alkuarvotehtävän

$$(22) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

ratkaisua, joka on jollain välillä  $\Delta \subset \mathbb{R}$  määritelty differentioituva polku  $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ . OY-lauseen 4.6 mukaan alkuarvotehtävällä (22) on ratkaisu jokaisella alkuarvolla  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Propositiossa 4.8 osoitimme, että alkuarvotehtävän ratkaisu riippuu jatkuvasti alkuarvosta. Tarkastelemme nyt lähemmin differentiaaliyhtälön määäämiä kuvauksia joukolta  $U$  itselleen.

**Esimerkki 6.1.** Olkoon  $A$  reaalinen  $n \times n$ -matriisi. Lineaarisen differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  jokaisen ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ . Lauseen 3.9 mukaan ratkaisu alkuarvolla  $x(0) = x_0$  on

$$\psi_{0,x_0}(t) = \exp(At)x_0.$$

Matriisien eksponenttifunktio määrää jokaisella kiinteällä ajanhetkellä  $t \in \mathbb{R}$  kuvauksen  $\phi_t = \exp(At): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , jolle pätee kaikilla  $s, t \in \mathbb{R}$

- (1)  $\phi_0 = \text{id}$ ,
- (2)  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$ .

Erityisesti pätee  $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = \text{id}$ , joten kuvaus  $\phi_t$  on bijektio jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ . Koska  $\exp(At)$  on kääntyvä  $n \times n$ -matriisi, se määrää avaruuden  $\mathbb{R}^n$  lineaarisen automorfismin, joka on tunnetusti jatkuva kuvaus.

Jos tarkasteltavan differentiaaliyhtälön ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$  kaikilla alkuarvoilla, osoitamme, että se määrää vastaavanlaisen perheen kuvauksia  $\phi_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , jolla on ominaisuudet (1) ja (2) kuten yllä.

---

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin. Jatkuva kuvaus  $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ , jolle pätee

- (1)  $\phi(0, x) = x$  kaikilla  $x \in U$ ,
- (2)  $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(s+t, x)$  kaikilla  $x \in U$  ja kaikilla  $s, t \in \mathbb{R}$ .

on *virtaus* joukossa  $U$ . Kuvaus  $\phi_t: U \rightarrow U$ ,  $\phi_t(x) = \phi(t, x)$  on virtauksen  $\phi$  *aika- $t$ -kuvaus*.

---

Huomaa, että aika- $t$ -kuvauksella on ominaisuudet

- (1)  $\phi_0(b) = \phi(0, b) = b$  kaikilla  $b \in U$ , joten  $\phi_0 = \text{id}$  ja
- (2)  $\phi_t \circ \phi_s(b) = \phi(t, \phi(s, b)) = \phi(s+t, b) = \phi_{s+t}(b)$  kaikilla  $s, t \in \mathbb{R}$  ja  $b \in U$ , joten  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$ .

Ominaisuuksista (1) ja (2) ja jatkuvuudesta seuraa, että  $\phi_t$  on homeomorfismi, sillä  $\phi_{-t}$  on sen käänteiskuvaus: Kaikilla  $t \in \mathbb{R}$  pätee

$$\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_0 = \text{id}.$$

**Propositio 6.2.** Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä, jolle jokaisen alkuarvotettävään

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ . Tällöin kuvaus  $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ ,

$$(24) \quad \phi(t, x) = \psi_{0,x}(t)$$

on virtaus joukossa  $U$ , differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  määräämä virtaus tai vektorikentän  $f$  määräämä virtaus. Toisaalta, jos  $C^1$ -kuvaus  $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$  on virtaus joukossa  $U$ , niin se on vektorikentän  $\frac{\partial}{\partial t}\phi(0, x)$  määräämä virtaus.

*Todistus.* Olkoon  $\phi$  määritelty lausekkeella (24). Olkoon  $t \in \mathbb{R}$ . Tällöin kaikille  $s \in \mathbb{R}$  ja  $b \in U$

$$\phi(s, \phi(t, b)) = \phi_s \circ \phi_t(b) = \phi_s(\psi_{0,b}(t)) = \psi_{0,\psi_{0,b}(t)}(s) = \Psi_1(s)$$

ja

$$\phi(s+t, b) = \phi_{s+t}(b) = \psi_{0,b}(s+t) = \Psi_2(s)$$

Molemmat kuvaukset  $\Psi_1, \Psi_2: \mathbb{R} \rightarrow U$  ovat differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisuja. Lisäksi

$$\Psi_1(0) = \psi_{0,\psi_{0,b}(0)}(0) = \psi_{0,b}(0) = \Psi_2(0),$$

joten yksikäsitteisyyslauseen nojalla  $\Psi_1 = \Psi_2$ , mistä ensimmäisen väite seuraa jatkuvuutta lukuunottamatta.

Ensimmäisen väitteen jatkuvuusosa ja toinen väite todistetaan harjoituksissa.  $\square$

Vektorikentän määräämä virtaus on *jatkuva-aikainen dynaaminen systeemi*. Se liittyy ehkä tutumpiin diskreettiaikaisiin dynaamisiin systeemeihin tai iteraatioteoriaan aika- $t$ -kuvausten kautta: Esimerkiksi  $\phi(n, x) = \phi_1^n(x)$  kaikilla  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Esimerkki 6.3.** Jos  $\lambda, \mu > 0$ , niin pisteen  $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  rata iteroitaessa matriisiin  $B = \text{diag}(\lambda, \mu)$  määräämä lineaarikuvausta, siis joukko  $\{B^n x_0 : n \in \mathbb{Z}\}$  on osa pisteen  $x_0$  rataa differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \text{diag}(\log \lambda, \log \mu)$ , määräämässä virtauksessa.

Virtaustulkinnan mukaan vektorikenttä  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  (tai differentiaaliyhtälö  $\dot{x} = f(x)$ ) määrää joukon  $U$  jatkuvan deformaation itselleen. Tämä deformaatio pitää vektorikentän tasapainopisteet paikallaan.

Edellä oletettiin, että maksimaalinen määrittelyväli on kaikilla alkuarvoilla koko  $\mathbb{R}$ . Tarkastelemamme esimerkki 4.12 ja ensimmäisen kurssin ensimmäisten harjoitusten tehtävät 2 ja 3 osoittavat, että tämä ehto ei aina toteudu. Jos vektorikentän  $f$  määräämän differentiaaliyhtälön maksimaalinen määrittelyväli ei ole kaikilla alkuarvoilla koko  $\mathbb{R}$ , niin se määrää kuitenkin osittaisen virtauksen: yhtälö  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$  on voimassa, jos  $s, t, s+t$  ovat kaikki maksimaalisella määrittelyvälillä. Osoitamme seuraavaksi, että jos olemme kiinnostuneita ainoastaan ratkaisujen radoista, voimme “muuttaa differentiaaliyhtälön ajan” siten, että maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$  kaikilla alkuarvoilla. Tarkastelemme alkuun yleistä tapausta:

Olkoon seuraavissa tuloksissa  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä ja olkoon  $I = I(x_0, f) = ]\sigma, \tau[$  alkuarvotekävän

$$(25) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli. Tässä  $\sigma < 0 < \tau$ ,  $\sigma \in [-\infty, \infty[$  ja  $\tau \in ]-\infty, \infty]$  Olkoon

$$\Omega(f) = \bigcup_{b \in U} I(b, f) \times \{b\}.$$

Harjoituksissa osoitetaan

**Propositio 6.4.** *Joukko  $\Omega(f) \subset \mathbb{R} \times U$  on avoin.* □

**Propositio 6.5.** *Jos  $\tau < \infty$  tai  $\sigma > -\infty$ , ja  $K \subset U$  on kompakti, niin on  $t \in ]0, \tau[$ , jolle  $x(t) \notin K$ .*

*Todistus.* Tarkastellaan vain ylhäältä rajoitetun maksimaalisen määrittelyvälin tapaus, alhaalta rajoitettu tilanne todistetaan samalla tavalla. Koska  $K$  on kompakti ja  $f$  on jatkuva, niin on  $M > 0$ , jolle

$$\max_{x \in K} \|f(x)\| \leq M.$$

Oletetaan, että  $x(t) \in K$  kaikilla  $t \in [0, \tau[$ . Tällöin kaikille  $0 < t_1 < t_2 < \tau$  pätee

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq M|t_1 - t_2|,$$

joten ratkaisu on tasaisesti jatkuva välillä  $[0, \tau[$ , ja sillä on raja-arvo

$$x_\tau = \lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) \in K.$$

Nyt

$$\begin{aligned} x_\tau &= \lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) = x(0) + \lim_{t \rightarrow \tau^-} \int_0^t \dot{x}(s) ds \\ &= x(0) + \lim_{t \rightarrow \tau^-} \int_0^t f(x(s)) ds = x(0) + \int_0^\tau f(x(s)) ds. \end{aligned}$$

Ratkaisu  $x$  voidaan jatkaa differentioituvaksi kuvaukseksi päätepisteeseen  $\tau$  saakka lausekkeella

$$u(t) = x_0 + \int_0^\tau f(x(s)) ds,$$

erityisesti  $\dot{u}(\tau) = f(u(\tau)) = f(x_\tau)$ . Alkuarvotekävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(\tau) = x_\tau \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu jollain välillä  $]\tau - a, \tau + a[$ , joten ratkaisun yksikäsitteisyyden nojalla alkuperäisen alkuarvotekävällä olisi siis ratkaisu välillä  $]\sigma, \tau + a[$ , mikä taas on välin  $]\sigma, \tau[$  maksimaalisuuden kanssa ristiriidassa. □

**Seuraus 6.6.** *Olkoon  $U$  on rajoitettu ja olkoon  $x(t)$  alkuarvotekävän 25 ratkaisu, jonka maksimaalinen määrittelyväli  $]\sigma, \tau[$  on ylhäältä rajoitettu. Jos  $x(t)$  suppenee, kun  $t \neq \tau$ , niin  $\lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) \in \partial U$ .*

Rajoitetun ja rajoittamattoman maksimaalisen määrittelyvälin tulokset voidaan yhdistää seuraavalla muotoilulla:

**Seuraus 6.7.** Olkoon  $x$  alkuarvottehtävän 25 ratkaisu maksimaalisella määrittelyvä-  
lillä  $]\sigma, \tau[$ . Tällöin  $(t, x(t))$  poistuu kaikista joukon  $\Omega(f)$  kompakteista osajoukoista,  
kun  $t \searrow \tau$  tai  $t \nearrow \sigma$ .

**Esimerkki 6.8.** Seurauksessa 6.6 esiintyvää raja-arvoa ei aina ole: Jos Esimerkin  
5.4 differentiaaliyhtälöä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} - x_2 - \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix},$$

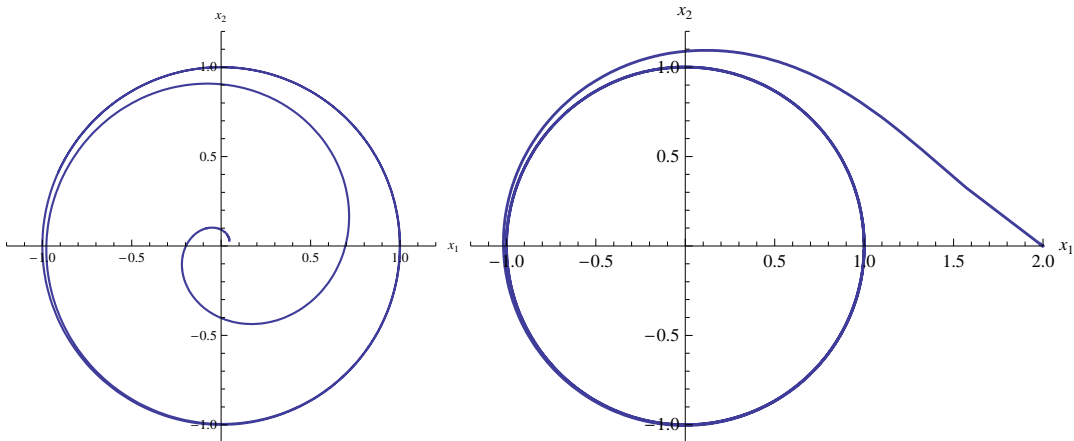
joka on napakoordinaateissa

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2)/2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases},$$

tarkastellaan yksikkökiekossa, niin kaikilla alkuarvoilla maksimaalinen määrittely-  
väli on  $\mathbb{R}$ . Differentiaaliyhtälön ratkaisu alkuarvolla  $(r_0, \theta_0)$  on

$$\begin{cases} r(t) = \frac{e^{t/2}}{\sqrt{e^t + 1/r_0^2 - 1}} \\ \theta = \theta_0 + t \end{cases}$$

Ratkaisu alkuarvolla  $x_0 \neq 0$  kasautuu kohti koko yksikköympyrää, kun  $t \rightarrow \infty$ .



Kun  $r_0 > 0$ , niin ratkaisun määrittelyväli on  $]\log(1/r_0^2 - 1), \infty[$ , joten differen-  
tiaaliyhtälö ei määrittele virtausta ja dynaamista systeemiä suljetun yksikkökiekon  
ulkopuolella. Kun alkuarvo on suljetun yksikkökiekon ulkopuolella, niin alkuarvo-  
tehtävän ratkaisu  $t \mapsto x(t)$  poistuu kaikista tason kompakteista joukoista, kun  $t$   
lähestyy maksimaalisen määrittelyvälin alkua:

$$\lim_{t \rightarrow \log(1/r_0^2 - 1)} \|x(t)\| = \infty.$$

Olkoon  $\phi$  virtaus joukossa  $U$ . Pisteiden  $x \in U$   $\omega$ -rajajoukko on

$$\omega_\phi(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi([t, \infty[, x)} = \bigcap_{T=0}^{\infty} \left( \bigcup_{t=T}^{\infty} \overline{\phi(t, x)} \right),$$

ja sen  $\alpha$ -rajajoukko on

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\phi([-\infty, t], x)} = \bigcap_{T=0}^{-\infty} \left( \overline{\bigcup_{t=T}^{-\infty} \phi(t, x)} \right),$$

**Esimerkki 6.9.** Jos tarkastellaan edellisen esimerkin differentiaaliyhtälön suljetussa yksikkökierokossa määräämää virtausta  $\phi$ , niin tasapainopisteelle 0 pätee  $\omega_\phi(0) = \alpha_\phi(0) = \{0\}$ . Jokaisella  $x \neq 0$  pätee  $\omega_\phi(x) = \mathbb{S}^1$ . Jos  $\|x\| = 1$ , niin  $\omega_\phi(x) = \alpha_\phi(x) = \mathbb{S}^1$ . Jos  $\|x\| < 1$ , niin  $\alpha_\phi(x) = \{0\}$ ,

Esimerkkien 5.4, 6.8 ja 6.9 tapaisessa tilanteessa, jossa maksimaalinen määrittelyväli ei välttämättä ole koko  $\mathbb{R}$ , on luontevaa käyttää hieman yleisempää määritelmää  $\alpha$ - ja  $\omega$ -rajajoukoille: Jos alkuarvottehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ , maksimaalinen määrittelyväli on  $]\sigma, \tau[$ , ja maksimaalinen ratkaisu tällä välillä on  $\psi_{0,x_0}$ , määritellään

$$\omega(x_0) = \bigcap_{0 \leq t < \tau} \overline{\psi_{0,x_0}([t, \tau])},$$

ja

$$\alpha(x_0) = \bigcap_{\sigma < t \leq 0} \overline{\psi_{0,x_0}([\sigma, t])};$$

Tässä tapauksessa maksimaalinen ratkaisu määrittelee *osittaisen virtauksen*, jolla on virtauksen ominaisuus (1) ja ominaisuus (2) on voimassa, jos lauseke on hyvin määritelty tarkasteltaville ajoille.

Olkoon  $\phi$  virtaus metrisessä avaruudessa  $X$ . Osajoukko  $A \subset X$  on *positiivisesti invariantti virtauksessa*  $\phi$ , jos  $\phi_t(A) \subset A$  kaikilla  $t \geq 0$ . Se on *negatiivisesti invariantti virtauksessa*  $\phi$ , jos  $\phi_t(A) \subset A$  kaikilla  $t \leq 0$ , ja  *$\phi$ -invariantti*, jos se on positiivisesti ja negatiivisesti invariantti virtauksessa  $\phi$ .

**Propositio 6.10.** *Olkoon  $\phi$  virtaus metrisessä avaruudessa  $X$ . Tällöin*

- jokaisen pisteen  $x \in X$   $\omega$ -rajajoukko  $\omega_\phi(x)$  on suljettu ja  $\phi$ -invariantti.
- jos avaruuden  $X$  suljetut pallot ovat kompakteja ja pisteen  $x$  positiivinen  $\phi$ -rata on rajoitettu, niin  $\omega_\phi(x)$  ei ole tyhjä joukko.
- jos avaruuden  $X$  suljetut pallot ovat kompakteja ja pisteen  $x$  rata on rajoitettu, niin  $\omega_\phi(x)$  on yhtenäinen.

*Todistus.* Joukot ovat suljettuja, koska ne ovat suljettujen joukkojen leikkauksia. Loput harjoituksissa.  $\square$

**Esimerkki 6.11.** Olkoon  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tarkastellaan lineaarista differentiaaliyhtälöä

$$(26) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = 2\pi i z_1 \\ \dot{z}_2 = 2\pi \alpha i z_2 \end{cases}$$

avaruudessa  $\mathbb{C}^2$ . Jos  $\mathbb{C}^2$  ja  $\mathbb{R}^4$  identifoidaan asettamalla  $z_1 = x_1 + iy_1$  ja  $z_2 = x_2 + iy_2$ , saadaan reaalinen differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2\pi y_1 \\ \dot{y}_1 = 2\pi x_1 \\ \dot{x}_2 = -2\pi \alpha y_2 \\ \dot{y}_2 = 2\pi \alpha x_2 \end{cases}$$

Yhtälö (26) on helppo ratkaista: sen virtaus on  $\phi^\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$ :

$$\phi_t^\alpha(w_1, w_2) = (e^{2\pi it}w_1, e^{2\pi i\alpha t}w_2).$$

Molempien kompleksisten koordinaattien virtaukset säilyttävät kaikki 0-keskiset ympyrät kompleksitasossa, joten jokaisella  $r_1, r_2 > 0$  muodostettu *torus*

$$\begin{aligned} T(r_1, r_2) &= \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\} \\ &= \{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1| = r_1\} \times \{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| = r_2\} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \end{aligned}$$

on invariantti virtauksessa.

Jos  $\alpha = p/q$  on rationaaliluku,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , niin  $\phi^\alpha(t + q, z) = \phi^\alpha(t, z)$  kaikilla  $z$ , joten kaikki radat ovat jaksollisia. Erityisesti kaikkien tasapainopisteestä 0 poikkeavien pisteiden radat ovat homeomorfisia ympyrän  $\mathbb{S}^1$  kanssa.

Jos  $\alpha$  on irrationaaliluku, niin kuvaus  $t \mapsto \phi_t^\alpha(z)$  on injektiivinen kaikille  $z \in \mathbb{C}^2$ , jolle  $z_1 \neq 0$  ja  $z_2 \neq 0$ , sillä  $e^{2\pi iq} = 1$ , jos ja vain jos  $q \in \mathbb{Z}$  mutta  $e^{2\pi i\alpha q} \neq 1$  kaikilla  $q \in \mathbb{Z}$ . Osoittautuu, että

$$\omega_\phi(z) = \alpha_\phi(z) = T(|z_1|, |z_2|) = T$$

jokaiselle  $z \neq 0$ : Jokaiselle  $z \in T$  pätee

$$\phi^\alpha(t + q, z) = (z_1, e^{2\pi i\alpha q} z_2)$$

kaikilla  $q \in \mathbb{Z}$ . Koska joukko  $\{e^{2\pi i\alpha q} z_2 : q \in \mathbb{Z}\}$  on tiheä ympyrällä  $\{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| = r_2\}$ , niin ympyrä  $\{z_1\} \times \{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| = r_2\}$  sisältyy pisteen  $z$   $\omega$ -rajajoukkoon. Toistamalla sama tarkastelu joukolle

$$\phi^\alpha(t + q + s, z) = (e^{2\pi is} z_1, e^{2\pi i\alpha q} z_2)$$

kaikille  $s \in [0, 1[$ , saadaan  $\omega_\phi(z) = T$ .

Jos toruksella  $T(r_1, r_2)$  käytetään kulmakoordinaatteja  $(\theta_1, \theta_2)$ , niin torus voidaan esittää neliön  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  tekijäavaruutena kuten topologian kurssilla samastamalla neliön pystysivut keskenään ja vaakasivut keskenään tai yhtäpitävästi tason  $\mathbb{R}^2$  tekijäavaruutena  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , joka saadaan samastamalla pisteet  $(x, y)$  ja  $(x + 2\pi n, y + 2\pi m)$  kaikilla  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Tällöin differentiaaliyhtälöä (26) vastaa vakiovektorikentän antama differentiaaliyhtälö

$$(27) \quad \begin{cases} \dot{\theta}_1 = 2\pi \\ \dot{\theta}_2 = 2\pi\alpha, \end{cases}$$

jonka ratkaisuja ovat kaikki affinit suorat, joiden kulmakerroin on  $\alpha$ . Tasossa differentiaaliyhtälön (27) virtaus on siis triviaali kaikilla  $\alpha$  mutta tekijäavaruudessa  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  sen radat ovat joko harvoja tai tiheitä parametrin  $\alpha$  rationaalisuudesta riippuen.

## 7. RATAEKVIVALENSSI

Olkoot  $U \subset \mathbb{R}^n$  ja  $V \subset \mathbb{R}^n$  avoimia joukkoja, ja olkoot  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ja  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttiä. Olkoot  $\phi^f$  ja  $\phi^g$  vektorikenttien  $f$  ja  $g$  määräämät osittaiset virtaukset. Vektorikentät  $f$  ja  $g$  ovat *rataekvivalentteja*, jos on homeomorfismi  $H: U \rightarrow V$ , ja jos jokaisella  $b \in U$  on aidosti kasvava bijektio  $\tau_b: I(b, f) \rightarrow I(H(b), g)$  maksimaalisten määrittelyvälien välillä, jolle pätee

$$H \circ \phi^f(t, b) = \phi^g(\tau_b(t), H(b))$$

kaikille  $t \in I(b, f)$ . Sanotaan, että osittaiset virtaukset  $\phi^f$  ja  $\phi^g$  saadaan toisistaan *muuttamalla aika*. Joskus sanotaan myös, että  $f$  ja  $g$  (ja vastaavasti  $\phi^f$  ja  $\phi^g$ ) ovat *topologisesti ekvivalentteja*.

Jos kuvaus  $\tau$  on identtinen kuvaus kaikille  $b \in U$ , niin osittaiset virtaukset  $\phi^f$  ja  $\phi^g$  ovat *topologisesti konjugaatteja* ja  $H$  on *konjugoiva homeomorfismi*.

Harjoituksissa osoitettiin, että koko avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  määritellylle rajoitetulle  $C^1$ -vektorikentälle jokaisen alkuarvot tehtävän maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ , joten tällainen vektorikenttä määrää dynaamisen systeemin. Tämän havainnon avulla todistetaan seuraava tulos:

**Propositio 7.1.** *Jokainen koko avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  määritelty  $C^1$ -vektorikenttä on rataekvivalentti sellaisen  $C^1$ -vektorikentän kanssa, joka määrää dynaamisen systeemin.*

*Todistus.* Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Olkoon  $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  sileä funktio, jolle  $\|f(x)\| \leq M(f(x))$  kaikille  $x \in \mathbb{R}^n$ . Tällöin vektorikenttä  $g = f/M(f)$  on rajoitettu,  $\|g(x)\| \leq 1$ , joten se määrää dynaamisen systeemin kuten harjoituksissa osoitettiin. Osoitetaan vielä, että kaikille  $b \in \mathbb{R}^n$  on jatkuva kasvava bijektio  $\tau: I(b, f) \rightarrow \mathbb{R}$ , jolle pätee

$$\phi^f(t, b) = \phi^g(\tau(t), b).$$

Olkoon  $x: I(b, f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  alkuarvot tehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = b$  ratkaisu, ja määritellään ajanvaihto  $\tau: I(b, f) \rightarrow \mathbb{R}$  asettamalla

$$\tau(t) = \int_0^t M(f(x(s))) ds.$$

Kuvaus  $\tau$  on selvästi jatkuva ja se on aidosti kasvava, koska  $M$  saa vain positiivisia arvoja. Lisäksi, jos  $I(b, f) = ]\alpha, \beta[$  ja  $\beta < \infty$ , niin Proposition 6.5 nojalla

$$\tau(t) \geq \int_0^t \|f(x(s))\| ds = \int_0^t \|\dot{x}(s)\| ds \geq \left\| \int_0^t \dot{x}(s) ds \right\| \rightarrow \infty,$$

kun  $s \rightarrow \infty$ . Olkoon  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y = x \circ \tau^{-1}$ . Nyt  $y(0) = x(0) = b$  ja

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(\tau^{-1}(t)) \frac{d}{dt} \tau^{-1}(t) = \frac{f(x(\tau^{-1}(t)))}{M(f(x(\tau^{-1}(t))))} = \frac{f(y(t))}{M(f(y(t)))},$$

joten  $y$  on alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{f(y)}{M(f(y))} \\ y(0) = b \end{cases}$$

ratkaisu kuten pitikin. □

Jos  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  on  $C^1$ -vektorikenttä, niin Proposition 7.1 mukaisia rataekvivalentteja vektorikenttiä ovat esimerkiksi

$$F(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + f(x)^2}}, \quad F(x) = \frac{f(x)}{1 + f(x)^2}, \quad F(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}.$$

Näissä siis vektorikentän  $F$  suunta on jokaisessa pisteessä sama kuin alkuperäisen vektorikentän  $f$ .

Jos vektorikentän määrittelyjoukko on avaruuden  $\mathbb{R}^n$  aito osajoukko, niin Proposition 7.1 menetelmä ei ole riittävä. Yleisempi tulos pätee, seuraavassa tuloksessa tosin menetämme osan sileydestä.

**Lause 7.2.** *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Tällöin  $f$  on rataekvivalentti sellaisen jatkuvan vektorikentän  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  kanssa, joka määrää dynaamisen systeemin.*

*Todistus.* Toistamalla Proposition 7.1 konstruktio, voidaan olettaa, että  $f$  on rajoitettu,  $\|f(x)\| \leq 1$  kaikilla  $x \in U$ . Olkoon  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$g(x) = f(x) \frac{d(x, \partial U)}{1 + d(x, \partial U)}$$

Vektorikentät  $f$  ja  $g$  ovat rataekvivalentteja kuten Lauseessa 7.1. Osoitetaan vielä, että jokaisen vektorikenttää  $g$  vastavan alkuarvotehtävän maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ .

Koska jokaiselle  $x \in U$  pätee  $\|g(x)\| < \|f(x)\|$ , niin alkuarvotehtävän  $\dot{x} = g(x)$ ,  $x(0) = x_0$  maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ , jos alkuarvotehtävän  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$  maksimaalinen määrittelyväli on  $\mathbb{R}$ .

Oletetaan, että on alkuarvo  $b \in U$ , jolle alkuarvotehtävän

$$(28) \quad \begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = b \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on  $]\alpha, \beta[$  ja  $\beta < \infty$ . Tällöin alkuarvotehtävän (28) ratkaisukäyrä  $\gamma = \psi_{0,b}|_{[0,\beta[}$  on äärellisen mittainen,  $\ell(\gamma) = L < \infty$ , koska  $g$  on rajoitettu ja  $\gamma(t)$  suppenee johonkin joukon  $U$  reunapisteeseen  $p$ , kun  $t \nearrow \beta$ .

Tarkastellaan käyrän  $\gamma$  pituutta tarkemmin. Koska käyrä  $\gamma$  ei kulje vektorikentän  $g$  tasapainopisteiden kautta, niin kuvaus  $\ell: [0, \beta[ \rightarrow [0, L[$ ,

$$\ell(t) = \ell(\gamma|_{[0,t]}) = \int_0^t \|g \circ \gamma(s)\| ds$$

on aidosti kasvava. Jokaiselle  $s \in [0, \beta[$  pätee

$$\begin{aligned} \|g(\gamma(s))\| &\leq \frac{d(\gamma(s), \partial U)}{1 + d(\gamma(s), \partial U)} \|f(x)\| \leq d(\gamma(s), \partial U) \leq d(\gamma(s), p) \\ &\leq \int_s^\beta \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \int_s^\beta \|g(\gamma(s))\| ds \leq \beta - s. \end{aligned}$$

Siispä

$$\begin{aligned} \ell^{-1}(s) &= \int_0^s \ell^{-1}(u) du = \int_0^s \|g(\gamma(\ell^{-1}(u)))\|^{-1} du \geq \int_0^s (\beta - \ell^{-1}(u))^{-1} du \\ &= \log \frac{\beta}{\beta - \ell^{-1}(s)} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

kun  $s \nearrow \beta$ , joten maksimaalinen positiivinen määrittelyväli on  $[0, \infty[$ .  $\square$

Huomaa, että vaikka Lauseen 7.2 antama alkuperäisen vektorikentän kanssa rataekvivalentti vektorikenttä ei ole  $C^1$ , niin sen määräämillä alkuarvotehtävillä on konstruktion perusteella yksikäsitteinen ratkaisu.

Rataekvivalenteilla vektorikentillä  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ja  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  on homeomorfismi, joka kuvaa vektorikentän  $f$  radat vektorikentän  $g$  radoiksi. Jos rataekvivalenssin määritelmässä homeomorfismit  $H$  ja  $\tau$  ovat  $C^k$ -kuvauksia, niin sanotaan, että vektorikentät  $f$  ja  $g$  ovat  $C^k$ -rataekvivalentteja. Vaatimalla lisää säännöllisyyttä saamme virtaukset muistuttamaan enemmän toisiaan:

**Propositio 7.3.** (1) Jos vektorikentät  $f$  ja  $g$  ovat  $C^1$ -rataekvivalentteja  $C^1$ -homeomorfismeilla  $H$  ja  $\tau_b$ ,

$$H \circ \phi^f(t, b) = \phi^g(\tau_b(t), H(b)),$$

niin  $H$  kuvaa vektorikentän  $f$  tasapainopisteet vektorikentän  $g$  tasapainopisteiksi.

(2) Jos vektorikentät  $f$  ja  $g$  ovat  $C^2$ -rataekvivalentteja  $C^2$ -homeomorfismeilla  $H$  ja  $\tau_b$ , ja jos  $b_0$  on vektorikentän  $f$  tasapainopiste, niin  $Df(b_0)$  ja  $\tau_b(0)Dg(H(b_0))$  ovat lineaarisesti konjugaatteja. Jos  $f$  ja  $g$  ovat  $C^2$ -konjugaatteja, niin  $Df(b_0)$  ja  $Dg(H(b_0))$  ovat lineaarisesti konjugaatteja.

*Todistus.* (1) Derivoimalla yhtälö

$$H \circ \phi^f(t, x) = \phi^g(\tau(t), H(x))$$

ajan suhteen saadaan yhtälö

$$DH(\phi^f(t, x))f(\phi^f(t, x)) = g(\phi^g(t, H(x)))\frac{\partial \tau(t)}{\partial t}.$$

Olkoon  $x_0$  vektorikentän  $f$  tasapainopiste. Tällöin OY-lauseen nojalla  $\phi^f(t, x_0) = x_0$  kaikilla  $t$ , joten

$$g(\phi^g(t, H(x_0)))\frac{\partial \tau(t)}{\partial t} = 0$$

kaikilla  $t$ . Oletetaan, että jollain  $t_0$  pätee  $g(\phi^g(t_0, H(x_0))) \neq 0$ . Jatkuvuuden nojalla  $\frac{\partial \tau(t)}{\partial t} = 0$  jollain välillä, mutta tämä on mahdotonta koska  $\tau$  on aidosti kasvava  $C^1$ -funktio,

(2) Oletetaan, että  $f$  ja  $g$  ovat  $C^2$ -konjugaatteja. Tällöin siis pätee

$$DH(x)f(x) = g(H(x))$$

kaikille  $x \in U$ . Differentioimalla edellinen yhtälö saadaan tasapainopisteessä  $b \in U$  yhtälö

$$DH(b)Df(b) = Dg(H(b))DH(b),$$

joka antaa toisen väitteen. Rataekvivalenssin tapaus on hieman monimutkaisempi, ohitamme yksityiskohdat.  $\square$

Grobmanin ja Hartmanin lauseen 5.2 mukaan  $C^1$ -vektorikentän virtaus on topologisesti konjugaatti vektorikentän linearisoinnin virtauksen kanssa pienessä ympäristössä.

**Esimerkki 7.4.** Olkoot  $\epsilon \neq 0$  ja  $\alpha > \gamma > 0$ . Olkoon  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektorikenttä

$$(29) \quad f(x) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ (\alpha - \gamma)x_2 + \epsilon x_1 x_3 \\ -\gamma x_3 \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisu alkuarvolla  $(X_1, X_2, X_3)$  on

$$x(t) = \begin{pmatrix} X_1 e^{\alpha t} \\ (X_2 + \epsilon X_1 X_3 t) e^{(\alpha - \gamma)t} \\ X_3 e^{-\gamma t} \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälön (29) linearisointi tasapainopisteessä 0 on  $\dot{y} = Ay$ , missä  $A = \text{diag}(\alpha, \alpha - \gamma, \gamma)$ , on tyypiltään lähde. Olkoon  $\phi$  vektorikentän  $f$  virtaus. Koska

matriisin  $A$  kaikki ominaisarvot ovat positiivisia, Grobmanin ja Hartmanin lauseen mukaan on lokaali homeomorfismi  $H: U \rightarrow H(U)$ , joka on määritelty jossain origon ympäristössä, ja jolle pätee

$$H(\phi(t, x)) = \exp(At)H(x)$$

kaikille  $x \in U$  ja itseisarvoltaan riittävän pienille  $t$ .

Homeomorfismit

$$H_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \epsilon x_1 x_3 \log |x_1| / \log a \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ja

$$H_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \epsilon x_1 x_3 \log |x_3| / \log a \\ x_3 \end{pmatrix}$$

konjugoivat vektorikentän  $f$  ja sen linearisoinnin virtaukset. Vektorikenttä  $f$  on selvästi  $C^\infty$ -kuvaus mutta kuvaukset  $H_1$  ja  $H_2$  eivät ole  $C^1$ -kuvauksia. Yleisemmin osoittautuu, että differentiaaliyhtälön (29) virtausta ei voi konjugoida linearisointinsa virtaukseksi  $C^1$ -kuvauksella.

## 8. EPÄAUTONOMISET LINEAARISET DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT JA VIRTAUKSEN SILEYS

Osoitamme tässä luvussa, että  $C^1$ -vektorikentän virtaus on  $C^1$ -kuvaus. Todistus perustuu variaatioyhtälön käyttöön: Autonomisen differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisun  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  variaatioyhtälö on

$$(30) \quad \dot{u}(t) = Df(x(t))u(t).$$

Variaatioyhtälö on erikoistapaus suuremmasta luokasta epähomogeenisia differentiaaliyhtälöitä, joiden ratkaisujen käyttäytyminen tunnetaan melko hyvin. Tarkastelemme siis ensin yleisempää vektorikentästä riippumatonta tilannetta:

Olkoon  $A$  jatkuva kuvaus joltain reaalityyppiseltä  $n \times n$ -matriisien avaruuteen  $M_n(\mathbb{R})$ . Differentiaaliyhtälö

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t)$$

on epäautonominen lineaarinen differentiaaliyhtälö. Koska  $A(t)$  on lineaarikuvaus jokaisella  $t$ , tällaisen differentiaaliyhtälön ratkaisut muodostavat vektoriavaruuden. Harjoituksissa osoitetaan, että epäautonomisille yhtälöille pätee vahvempi versio OY-lauseesta:

**Lause 8.1.** *Olkoon  $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$  kompakti väli. Olkoon  $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  jatkuva kuvaus. Tällöin alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A(t)u(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu välillä  $I$ .

Olkoon  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Olkoon  $A$  epätyhjä joukko ja olkoon  $f_\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^n$  jokaiselle  $\alpha \in A$ . Kuvausperhe  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  on yhtäjatkuva, jos jokaisella  $\epsilon > 0$  on  $\delta > 0$  siten, että  $\|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)\| < \epsilon$  kaikille  $x, y \in E$ , joille  $\|x - y\| < \delta$  kaikille  $\alpha \in A$ . Erityisesti, jos kaikki kuvaukset  $f_\alpha$ ,  $\alpha \in A$  ovat  $K$ -Lipschitz-jatkuvia samalla  $K > 0$ , niin perhe  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  on yhtäjatkuva.

Topologian kurssilla osoitetaan

**Lause 8.2** (Arzelan ja Ascolin lause). *Olkoon  $E \subset \mathbb{R}^m$  kompakti joukko. Jos  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$  on tasaisesti rajoitettu yhtäjatkuva jono kuvauksia, niin sillä on tasaisesti suppeneva osajono. Tämä osajono suppenee kohti tasaisesti jatkuvaa kuvausta  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\square$*

Lauseen 8.1 todistuksen voi perustaa esimerkiksi seuraavaan yleiseen tulokseen.

**Lause 8.3** (Peanon olemassaololause). *Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin. Olkoot  $b \in U$  ja  $r > 0$  siten, että  $\overline{B}(b, r) \subset U$ . Olkoon  $I = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$  suljettu väli. Oletetaan, että kuvaus  $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  on jatkuva ja  $\|f(x, t)\| \leq M$  joukossa  $I \times B(b, r)$ . Olkoon  $\alpha = \min(a, r/M)$ . Tällöin alkuarvotehtävällä*

$$(31) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(a) = b \end{cases}$$

on ainakin yksi välillä  $[t_0, t_0 + \alpha]$  määritelty ratkaisu.

*Todistus.* Olkoon  $\delta > 0$ , ja olkoon  $y_0: [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -kuvaus, jolla on ominaisuudet

$$y_0(t_0) = b, \quad \|y_0(t) - b\| \leq r, \quad \text{ja} \quad \|y_0'(t)\| \leq M,$$

kun  $t \in [-\delta, \delta]$ . Määritellään kuvaus  $y_\epsilon: [t_0 - \delta, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  kaikille  $0 < \epsilon \leq \delta$  asettamalla ensin

$$y_\epsilon(t) = y_0(t), \quad \text{kun } t \in [t_0 - \delta, t_0],$$

ja

$$y_\epsilon(t) = b + \int_{t_0}^t f(s, y_\epsilon(s - \epsilon)) ds, \text{ kun } t \in [t_0, t_0 + \min(\epsilon, \alpha)],$$

Tällöin  $y_\epsilon$  toteuttaa

$$\|y_\epsilon(t) - b\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, y_\epsilon(s - \epsilon)) ds \right\| \leq M|t - t_0| \leq r,$$

koska  $|t - t_0| \leq \alpha \leq r/M$ , ja vastaavalla laskulla nähdään, että  $y_\epsilon$  on  $M$ -Lipschitz-jatkuva välillä  $[t_0 - \delta, t_0 + \min(\epsilon, \alpha)]$ . Asetetaan sitten

$$y_\epsilon(t) = b + \int_{t_0}^t f(s, y_\epsilon(s - \epsilon)) ds, \text{ kun } t \in [t_0 + \min(\epsilon, \alpha), t_0 + \min(2\epsilon, \alpha)],$$

ja saadaan  $M$ -Lipschitz-jatkuva kuvaus, joka toteuttaa  $\|y_\epsilon(t) - b\| \leq r$ , kun  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \min(2\epsilon, \alpha)]$ . Jatketaan näin, kunnes on määritelty jatkuva kuvaus  $y_\epsilon: [t_0 - \delta, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , jolla on samat ominaisuudet koko määrittelyvälillään.

Perhe  $(y_\epsilon)_{0 < \epsilon \leq \delta}$  on rajoitettu, koska kaikkien kuvausten kuvajoukot sisältyvät palloon  $\overline{B}(b, r)$  ja se on yhtäjatkuva koska kaikki kuvaukset ovat  $M$ -Lipschitz-jatkuvia. Siis Arzelan ja Ascolin lauseen 8.2 nojalla on jono  $(\epsilon(n))_{n \in \mathbb{N}}$ , jolle  $\epsilon(n) \rightarrow 0$  ja  $y_{\epsilon(n)}$  suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa kuvausta  $y: [t_0 - \delta, t_0 + \alpha] \rightarrow \overline{B}(b, r)$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Koska kuvaus  $f$  on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa  $I \times \overline{B}(b, r)$ , saadaan integraaliyhtälö

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{\epsilon(n)}(t) = b + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_{\epsilon(n)}(s)) ds = b + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

joten  $y$  on alkuarvot tehtävän (31) ratkaisu. □

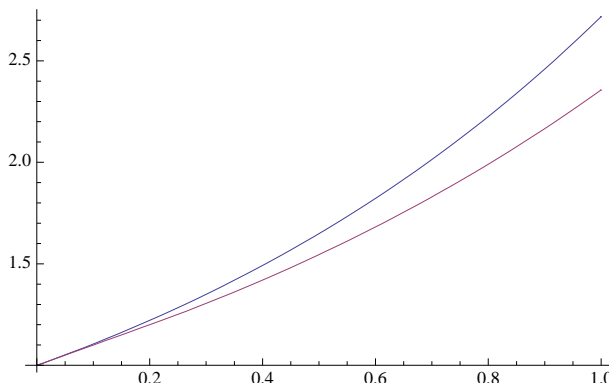
**Esimerkki 8.4.** Tarkasteltaessa yksiulotteisen alkuarvot tehtävän  $\begin{cases} \dot{y} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$  ratkaisua välillä  $[0, 1]$  Peanon olemassaololauseen avulla voidaan aloittaa vakioratkaisulla  $y_0 \equiv 1$ . Määritellään sitten

$$y_\epsilon(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t$$

välillä  $[0, \epsilon]$  ja sen jälkeen

$$y_\epsilon(t) = 1 + \int_0^t y_\epsilon(s - \epsilon) ds = 1 + \epsilon + \int_\epsilon^t (1 + s - \epsilon) ds = 1 + s + \frac{(s - \epsilon)^2}{2}$$

ja jatketaan näin. Kun  $\epsilon \rightarrow 0$  funktiot  $y_\epsilon$  suppenevat tasaisesti kohti eksponenttifunktiota. Kuvassa funktion  $y_{1/5}$  ja alkuarvot tehtävän ratkaisun, eksponenttifunktion (ylempi käyrä) kuvaajat.



Seuraavia tuloksia tarvitaan  $C^1$ -vektorikentän virtauksen differentioituvuuden todistuksessa. Nämä sisältyvät ensimmäisen kurssin toiseen harjoitustyöhön, todistukset esitetään mm Perkon [Per] ja Hirsch-Smale-Devaney'n [HSD] kirjoissa.

**Propositio 8.5** (Grönwallin epäyhtälö). *Olko  $g: [0, a] \rightarrow [0, \infty[$  jatkuva funktio. Jos on  $C \geq 0$  ja  $K \geq 0$ , joille*

$$g(t) \leq C + K \int_0^t g(s) ds$$

*kaikille  $t \in [0, a]$ , niin  $g(t) \leq Ce^{Kt}$  välillä  $[0, a]$ .  $\square$*

Toinen tarvitsemamme tulos on ratkaisujen jatkuva riippuvuus alkuarvosta hie- man eksplisiittisemmässä muodossa:

**Lause 8.6.** *Olko  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin. Olko  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $K$ -Lipschitz-kuvaus. Olkoot  $x, y: I \rightarrow U$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisuja suljetulla välillä  $I = [t_0, t_1]$ . Tällöin kaikille  $t \in I$  pätee*

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \|y(t_0) - x(t_0)\| e^{K(t-t_0)}. \quad \square$$

Nyt voimme todistaa luvun päätuloksen:

**Lause 8.7.** *Olko  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko ja olko  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Olko  $x: I = [t_0, t_0 + a] \rightarrow U$  alkuarvotehtävän*

$$(32) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = b \end{cases}$$

*ratkaisu. Olko  $\xi \in \mathbb{R}^n$  siten, että  $x + \xi \in U$ . Olko  $y = y_\xi: I \rightarrow U$  alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(t_0) = b + \xi \end{cases}$$

*ratkaisu ja olko  $u = u_\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  alkuarvotehtävän (32) ratkaisua  $x$  vastaavan variaatioyhtälön*

$$\dot{u}(t) = Df(x(t))u(t)$$

*ratkaisu alkuarvolla  $\xi$ . Tällöin*

$$y(t) = x(t) + u(t) + o(\xi)$$

*tasaisesti kaikilla  $t \in I$ .*

*Todistus.* Koska  $f$  on jatkuvasti differentioituva, sille pätee

$$f(p) = f(q) + Df(p)(q - x) + o(q - x), \text{ kun } p \rightarrow q$$

kaikilla  $p, q \in U$  tasaisesti (muuttujan  $q$  suhteen) kompakteilla joukoilla. Tarkasteltavien alkuarvotehtävien kanssa ekvivalenteista integraaliyhtälöistä

$$y(t) = b + \xi + \int_{t_0}^t f(y(s)) ds,$$

$$x(t) = b + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds, \text{ ja}$$

$$u(t) = \xi + \int_{t_0}^t Df(x(s))u(s) ds$$

saadaan  
(33)

$$\begin{aligned} y(t) - (x(t) + u(t)) &= \int_{t_0}^t (f(y(s)) - f(x(s)) - Df(x(s))u(s)) ds \\ &= \int_{t_0}^t Df(x(s))(y(s) - x(s) - u(s)) ds + \int_{t_0}^t o(x(s) - y(s)) ds. \end{aligned}$$

Valitaan  $\delta > 0$  siten, että ratkaisukäyrän  $x(I)$  suljettu  $\delta$ -ympäristö  $\mathcal{N}_\delta(x(I))$  sisältyy joukkoon  $U$ . Koska  $f$  on  $C^1$ , se on  $K$ -Lipschitz- jatkuva joukossa  $\mathcal{N}_\delta(x(I))$  jollain  $K \geq 0$ . Oletetaan, että  $\|\xi\| = \|y(t_0) - x(t_0)\| \leq e^{-Ka}\delta$ . Tällöin jäännöstermiä voidaan arvioida Lauseen 8.6 avulla:

$$\int_{t_0}^t o(x(s) - y(s)) ds = \int_{t_0}^t o(\|x(0) - y(0)\| e^{K(s-t_0)}) ds = o(\xi),$$

kun  $\xi \rightarrow 0$ .

Olkoon  $N = \max_{s \in I} \|Df(x(s))\|$ . Yhtälöstä (33) saadaan arvio

$$\|y(t) - (x(t) + u(t))\| \leq N \int_{t_0}^t \|y(t) - (x(t) + u(t))\| + o(\xi),$$

joten Gronwallin epäyhtälön nojalla kaikille  $t \in [t_0, t_0 + a]$  pätee

$$\|y(t) - (x(t) + u(t))\| \leq o(\xi) e^{N(t-t_0)} \leq o(\xi) e^{Na} = o(\xi).$$

□

**Seuraus 8.8.** *Jatkuvasti differentioituvan vektorikentän virtaus on jatkuvasti differentioituva.*

*Todistus.* Vektorikentän  $f$  virtauksen  $\phi$  aikaderivaatta on  $\frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} = f(\phi(t,x))$ , joten se on jatkuva.

Lauseen 8.7 antama kuvaus  $\xi \mapsto u_\xi(t)$  on lineaarikuvaus. Nyt

$$\phi(t, b + \xi) = y_\xi(t) = x(t) + u_\xi(t) + o(\xi) = \phi(t, b) + u_\xi(t) + o(\xi),$$

joten avaruuskomponenttien suhteen osittaisderivaatat sisältyvät edellisen lauseen mukaan lineaarikuvaukseen  $\xi \rightarrow u_\xi(t)$ . Jatkuvuus alkuarvoista antaa jatkuvuuden.

□

Pistettä, joka ei ole tarkasteltavan vektorikentän tasapainopiste, sanotaan usein *säännölliseksi pisteeksi*. Lauseen 8.8 avulla voimme nyt osoittaa, että säännöllisen pisteen lähellä virtaus käyttäytyy hyvin säännöllisesti:

**Propositio 8.9.** *Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Olkoon  $x_0$  vektorikentän  $f$  säännöllinen piste. Tällöin on pisteen  $x_0$  avoin ympäristö  $N$  ja  $C^1$ -diffeomorfismi  $H: N \rightarrow ]-\epsilon, \epsilon[$  siten, että*

$$(34) \quad H(\phi(t, x)) = H(x) + (t, 0, \dots, 0)$$

kaikille  $x \in U$  ja itseisarvoltaan riittävän pienille  $t$ .

*Todistus.* Oletetaan, että  $x_0 = 0$ , ja että  $f(0) = (\alpha, 0, \dots, 0)$ . Olkoon  $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$  pieni pallo, ja määritellään  $G: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$G(y) = \phi(y_1, (0, y_2, \dots, y_n)).$$

Kuvaus  $G$  on selvästi  $C^1$ , koska se on muodostettu siistiksi oletetun virtauksen avulla. Lisäksi  $G$  on kääntyvä jossain origon pienessä ympäristössä käänteiskuvaslauseen nojalla:

$$\frac{\partial G(0)}{\partial y_1} = \frac{\partial \phi(0, 0)}{\partial t} = f(0) = (\alpha, 0, \dots, 0),$$

ja kuvaus  $x \mapsto \phi(0, (0, x))$  on avaruuden  $\mathbb{R}^{n-1}$  identtinen kuvaus, joten  $DG(0) = \text{diag}(\alpha, 1, \dots, 1)$ , joka on kääntyvä.

Olkoon nyt  $H$  kuvauksen  $G$  käänteiskuvas jossain pienessä origon ympäristössä. Tällöin  $H$  toteuttaa ehdon (34), jos ja vain jos  $G$  toteuttaa

$$\phi(t, G(y)) = G(y + (t, 0, \dots, 0))$$

kaikille  $y$  lähellä origoa ja kaikille itseisarvoltaan riittävän pienille  $t$ . Mutta virtausominaisuuden perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \phi(t, G(y)) &= \phi(t, \phi(y_1, (0, y_2, \dots, y_n))) = \phi(y_1 + t, (0, y_2, \dots, y_n)) \\ &= G(y_1 + t, y_2, \dots, y_n) = G((y_1, y_2, \dots, y_n) + (t, 0, \dots, 0)) \end{aligned}$$

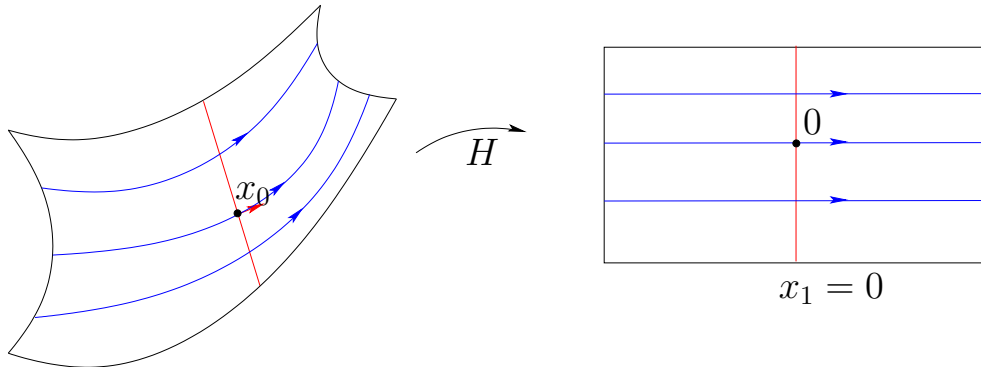
kuten pitikin. Halutun muotoinen ympäristö saadaan valitsemalla sivun pituus  $\epsilon$  riittävän pieneksi □

Proposition 8.9 antama ympäristö  $N$  on *virtauslaatikko* (flow box): Diffeomorfismin  $H$  antamissa koordinaateissa virtaus on yksinkertaisesti siirto ajan  $t$  verran suuntaan, joka määräytyy vektorikentän arvosta pisteessä  $p$ , kunhan aika on riittävän pieni. Hypertason  $\{y_1 = 0\}$  kuutiota  $] -\epsilon, \epsilon[$  leikkaavan osan alkukuvaa kuvauksella  $H$ , joka on siis sen kuva kuvauksella  $G = H^{-1}$ ,

$$G(0, y_2, \dots, y_n) = \phi(0, (0, y_2, \dots, y_n)) = (0, y_2, \dots, y_n)$$

sanotaan *lokaaliksi poikkileikkaukseksi* tai *lokaaliksi sektioksi* pisteessä  $x_0$ . Tässä konstruktiossa lokaali poikkileikkaus on vektorin  $f(x_0)$  kanssa pisteessä  $x_0$  kohtisuora hypertason osa.

Yleisemmin mikä tahansa lokaali hyperpinta  $S$ , joka on vektorikentän  $f$  kanssa lokaalisti transversaalinen (siis  $f$  ei ole pinnan  $S$  tangenttivektori missään pisteessä) on vektorikentän  $f$  lokaali poikkileikkaus.



## 9. LINEAARISTEN YHTÄLÖIDEN STABIILISUUS

Palaamme hetkeksi lineaaristen differentiaaliyhtälöiden tarkasteluun ja täydennämme ensimmäisellä kurssilla luvussa 3 tehtyä tarkastelua.

Olkoon  $A$  reaalinen  $n \times n$ -matriisi. Reaalista ominaisarvoa  $\lambda$  vastaava *juuriavaruus* on

$$\widehat{E}_\lambda = \widehat{E}_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)^k v = 0 \text{ jollain } k \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \ker(A - \lambda I)^k,$$

ja kompleksiselle ominaisarvolle  $\lambda$  se on

$$\widehat{E}_\lambda = \widehat{E}_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)^k v = 0 \text{ jollain } k \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \ker(A - \lambda I)^k \subset \mathbb{C}^n.$$

Kompleksista ominaisarvoparia  $\lambda, \bar{\lambda}$  vastaava *reaalinen juuriavaruus* on

$$\widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}} = \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}(A) = (\widehat{E}_\lambda \oplus \widehat{E}_{\bar{\lambda}}) \cap \mathbb{R}^n = \operatorname{Re} \widehat{E}_\lambda \oplus \operatorname{Im} \widehat{E}_\lambda = \operatorname{Re} \widehat{E}_{\bar{\lambda}} \oplus \operatorname{Im} \widehat{E}_{\bar{\lambda}}.$$

Tätä aihetta sivuttiin ensimmäisen kurssin kolmansissa harjoituksissa, kun tarkasteltiin  $2n \times 2n$ -matriiseja, joilla ei ole reaalisia ominaisarvoja, ja osoitettiin, että kompleksisten ominaisvektorien reaali- ja imaginaariosat muodostavat avaruuden  $\mathbb{R}^{2n}$  kannan.

Matriisin  $A$  *vakaa aliavaruus* eli *stabiili aliavaruus* on

$$E^s = E^s(A) = \bigoplus_{\lambda < 0} \widehat{E}_\lambda \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \operatorname{Re} \lambda < 0}} \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}},$$

sen *epävakaa aliavaruus* eli *epästabiili aliavaruus* on

$$E^u = E^u(A) = \bigoplus_{\lambda > 0} \widehat{E}_\lambda \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \operatorname{Re} \lambda > 0}} \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}},$$

ja sen *keskusaliavaruus* on

$$E^0 = E^0(A) = \widehat{E}_0 \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \operatorname{Re} \lambda = 0}} \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}.$$

Esimerkiksi Jordanin kanonisen muodon (Lause 3.1) avulla nähdään, että

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^0 \oplus E^u.$$

**Esimerkki 9.1.** Olkoot  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Matriisin

$$B_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat  $-1$  ja  $\alpha \pm i\beta$ . Matriisin  $A_{\alpha, \beta}$  vakaa, epävakaa ja keskusaliavaruus riippuvat reaalisen parametrin  $\alpha$  merkistä:

Matriisin

$$B_{0, \beta} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat  $-1$  ja  $\pm i\beta$ , joten

$$E^s(B_{0, \beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\},$$

$$E^0(B_{0, \beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$$

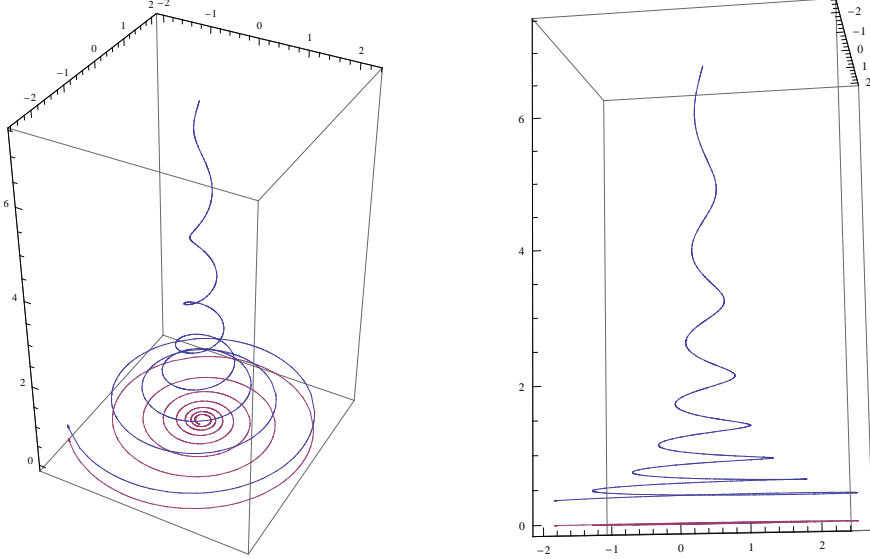
ja  $E^u(B_{0, \beta}) = \{0\}$ .

Jos  $\alpha \neq 0$ , niin  $E^0(B_{\alpha,\beta}) = \{0\}$ . Lisäksi, jos  $\alpha < 0$ , niin  $E^s(B_{\alpha,\beta}) = \mathbb{R}^3$ , ja jos  $\alpha > 0$ , niin

$$E^s(B_{\alpha,\beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\},$$

ja

$$E^u(B_{\alpha,\beta}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}.$$



KUVA 12. Kaksi eri näkymää epästabiilissa aliavaruudessa olevasta ratkaisusta (punainen) ja toisesta ratkaisusta, joka ei ole stabiilissa eikä epästabiilissa aliavaruudessa, kun  $\alpha = 1$  ja  $\beta = 15$ .

Ensimmäinen havainto avaruuden jaosta vakaaseen ja epävakaaseen aliavaruuteen ja keskusaliavaruuteen on, että jako on invariantti, myös eksponentoinnin jälkeen:

**Lemma 9.2.** (1)  $A(E^s(A)) \subset E^s(A)$ ,  $A(E^u(A)) \subset E^u(A)$  ja  $A(E^0(A)) \subset E^0(A)$ .  
(2) Aliavaruudet  $E^s(A)$ ,  $E^0(A)$ ,  $E^u(A)$  ovat invariantteja avaruuden  $\mathbb{R}^n$  virtauksessa  $\phi_t(x) = \exp(At)x$ .  $\square$

*Todistus.* Kohta (1) on helppo havainto ja kohta (2) seuraa käyttämällä matriisien eksponenttifunktion sarjaesitystä.  $\square$

Differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  virtaus on

$$\phi_t(x) = \exp(At)x.$$

Lineaarikuvauksen  $\exp(A)$  ominaisarvot ovat luvut  $e^\lambda$ , missä  $\lambda$  käy läpi matriisin  $A$  ominaisarvot. Lineaarikuvausta kutsutaan yleensä *hyperboliseksi*, jos sillä ei ole yhtään ominaisarvoa, jonka moduli on 1. Tästä aiheutuu pieni terminologinen kiemura: Lineaarista differentiaaliyhtälöä  $\dot{x} = Ax$  sanotaan hyperboliseksi, jos matriisin  $A$  keskusaliavaruus on triviaali. Tällöin siis matriisi  $\exp(A)$  on hyperbolinen. Epälineaaristen differentiaaliyhtälöiden yhteydessä sanotaan vastaavasti, että vektorikentän  $f$  tasapainopiste  $b$  on hyperbolinen, jos differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  linearisointi pisteessä  $b$  on lineaarinen.

Neliömatriisin  $B$  ominaisarvot muodostavat matriisin  $B$  spektrin  $\text{Sp}(B)$  ja sen spektraalisäde on

$$r(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ on matriisin } B \text{ ominaisarvo}\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(B)\}.$$

Sanomme, että jono  $x_k \in \mathbb{R}^n$  suppenee kohti pistettä  $x_\infty \in \mathbb{R}^n$  eksponentiaalista vauhtia, jos  $\|x_k - x_\infty\| \leq CK^k$  joillain  $C > 0$  ja  $0 < K < 1$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Jos jono  $x_k \in \mathbb{R}^n$  on rajoittamaton, niin  $\|x_k\| \rightarrow \infty$  eksponentiaalista vauhtia, jos  $\|x_k\| \geq CK^k$  joillain  $C > 0$  ja  $K > 1$ , kun  $k \rightarrow \infty$ .

**Propositio 9.3.** Jos  $r(B) < 1$ , niin  $B^k(x) \rightarrow 0$  kaikille  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  eksponentiaalista vauhtia, kun  $k \rightarrow \infty$ .

*Todistus.* Oletetaan, että  $B$  on reaalisessa Jordanin kanonisessa muodossa. Tehdään muuttujanvaihto lineaarikuvauksella, jonka matriisi on

$$\text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{m(\lambda)-1})$$

reaalista ominaisarvoa  $\lambda$  vastaavaa Jordanin blokkia vastaavassa  $B$ -invariantissa aliavaruudessa, jonka dimensio on  $m(\lambda)$ , ja jonka matriisi on

$$\text{diag}(I_1, \delta I_2, \delta^2 I_2, \dots, \delta^{m(\lambda)/2-1} I_2)$$

kompleksista ominaisarvoa  $\lambda$  vastaavaa Jordanin blokkia vastaavassa  $B$ -invariantissa aliavaruudessa, jonka dimensio on  $m(\lambda)$ .

Uudessa kannassa Jordanin blokkeja vastaavat matriisit ovat muotoa

$$(\lambda) \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} \lambda & \delta & & & \\ & \lambda & \delta & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & \delta \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

reaaliselle ominaisarvolle  $\lambda$  ja

$$C_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} C_\lambda & \delta I_2 & & & \\ & C_\lambda & \delta I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \delta I_2 \\ & & & & C_\lambda \end{pmatrix}$$

kompleksiselle ominaisarvolle  $\lambda = \alpha + i\beta$ .

Muistetaan vielä, että kaikki avaruuden  $\mathbb{R}^n$  normit ovat ekvivalentteja ja ne määrittävät saman topologian, joten lauseen väitteen todistamisessa voidaan valita tilanteeseen sopiva normi. Olkoon siis  $\|\cdot\|$  euklidinen normi edellä muodostetussa kannassa. Tällöin

$$\|b\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq r(A) + \delta$$

Valitsemalla  $\delta$  riittävän pieneksi saadaan siis  $\|B\| \leq K < 1$ , joten kaikilla  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  pätee

$$\|B^k x\| \leq K^k \|x\| \rightarrow 0,$$

kun  $k \rightarrow \infty$ . □

Propositioista 9.3 seuraa helposti vastaava tulos tilanteessa, jossa matriisin  $B$  kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan suurempia kuin 1.

**Propositio 9.4.** *Jos*

$$\min\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(B)\} > 1,$$

*niin*  $B^k(x) \rightarrow \infty$  *kaikille*  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  *eksponentiaalista vauhtia, kun*  $k \rightarrow \infty$ .

*Todistus.* Matriisi  $B$  on kääntyvä, koska nolla ei ole sen ominaisarvo. Lisäksi

$$\text{Sp}(B) = \{1/\lambda : \lambda \in \text{Sp}(B^{-1})\},$$

joten  $r(B^{-1}) < 1$  ja Proposition 9.3 mukaan  $B^{-1}$  on kutistava. Väite seuraa tästä.  $\square$

Harjoituksissa edellisten tulosten avulla saadaan tulos, joka kuvailee hyperbolisten lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen käyttäytymisen:

**Lause 9.5.** *Olkoon*  $A$  *reaalinen*  $n \times n$ -*matriisi, jonka keskusaliavaruus on triviaali. Tällöin*

(1) *Jos*  $x \in E^s$ , *niin*  $\exp(At)x \rightarrow 0$  *eksponentiaalisella nopeudella, kun*  $t \rightarrow \infty$  *ja*  $\|\exp(At)x\| \rightarrow \infty$  *eksponentiaalisella nopeudella, kun*  $t \rightarrow -\infty$ .

(2) *Jos*  $x \in E^u$ , *niin*  $\exp(At)x \rightarrow \infty$  *eksponentiaalisella nopeudella, kun*  $t \rightarrow \infty$  *ja*  $\|\exp(At)x\| \rightarrow 0$  *eksponentiaalisella nopeudella, kun*  $t \rightarrow -\infty$ .

(3) *Jos*  $x \notin E^u \cup E^s$ , *niin*  $\|\exp(At)x\| \rightarrow \infty$  *eksponentiaalisella nopeudella, kun*  $t \rightarrow \pm\infty$ .  $\square$

Tason differentiaaliyhtälöiden tapauksessa Lause 9.5 antaa karkean version luvussa 2 tehdystä luokittelusta.

## 10. EPÄLINEAARISEN YHTÄLÖN TASAPAINOPISTEEN STABIILISUUS

Tarkastelemme seuraavaksi tasapainopisteen ympäristöä epälineaarisen vektorikentän tapauksessa. Grobmanin ja Hartmanin lause kertoo, että hyperbolisen tasapainopisteen lähellä differentiaaliyhtälön virtaus on topologisesti konjugaatti differentiaaliyhtälön linearisoinnin virtauksen kanssa. Yhdistämällä tämä tieto edellisen luvun tulosten kanssa saadaan hyvä kuva hyperbolisten yhtälöiden lokaalista käyttäytymisestä. Tässä luvussa tarkastelemme hyperbolisia tasapainopisteitä käyttämättä Grobmanin ja Hartmanin lausetta ja lisäksi selvitämme, millä keinoilla voidaan tarkastella sellaisten tasapainopisteiden stabiilisuutta, jotka eivät ole hyperbolisia.

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  vektorikenttä. Vektorikentän  $f$  tasapainopiste  $b$  on

- *stabiili tai vakaa*, jos jokaiselle avoimelle joukolla  $V \subset U$  on avoin  $b \in W \subset V$ , jolle  $\phi_t(W) \subset V$  kaikille  $t \geq 0$ .
- *asymptoottisesti stabiili tai asymptoottisesti vakaa*, jos  $b$  on vakaa ja on pisteen  $b$  avoin ympäristö  $W$ , jolle  $\phi_t(x) \rightarrow b$  kaikille  $x \in W$ , kun  $t \rightarrow \infty$ .

Jos  $b$  ei ole vakaa, se on (tietenkin) epävakaa. Lauseesta 9.5 saadaan tällä terminologialla

**Seuraus 10.1.** *Origo on hyperbolisen lineaarisen differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = Ax$  vakaa tasapainopiste, jos ja vain jos  $E^s(A) = \mathbb{R}^n$ .*

**Lause 10.2.** *Olkoon  $b$   $C^1$ -vektorikentän  $f$  tasapainopiste.*

- (a) *Jos kaikki lineaarikuvauksen  $Df(b)$  ominaisarvot ovat negatiivisia, niin  $b$  on asymptoottisesti vakaa.*
- (b) *Jos jokin lineaarikuvauksen  $Df(b)$  ominaisarvo on positiivinen, niin  $b$  on epävakaa.*

*Todistus.* (1) Harjoitustehtävä.

(2) Oletetaan yksinkertaistamiseksi, että  $b$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  hyperbolinen tasapainopiste. Affiinilla koordinaattimuunnoksella voimme olettaa, että  $b = 0$ , ja että differentiaalimatriisille  $A$  pätee  $E^s(A) = \mathbb{R}^k$ ,  $E^u(A) = \mathbb{R}^{n-k}$  ja  $E^s(A) \perp E^u(A)$ . Olkoon  $x = (x_s, x_u)$ ,  $x_s \in E^s$ ,  $x_u \in E^u$ . Olkoot  $0 < K_s < 1$  ja  $K_u > 1$  siten, että  $\|Ax\| \leq K_s\|x\|$  kaikille  $x \in E^s$  ja  $\|Ax\| \geq K_u\|x\|$  kaikille  $x \in E^u$ .

Olkoon  $f(x) = Ax + R(x)$ , missä  $R(x) = o(x)$ , kun  $x \rightarrow 0$ . Valitaan  $0 < \epsilon < (K_u - K_s)/4$  ja  $r > 0$  siten, että  $\|R(x)\| \leq \epsilon\|x\|$ , kun  $\|x\| \leq r$ . Olkoon

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_u\| \geq \|x_s\|\} \cap \overline{B}(0, r).$$

Olkoon  $x = (x_s, x_u): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisu, jolle  $x(0) \in K_r$ . Tällöin, kun  $x(t) \in K_r$  pätee

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|x_u(t)\|^2) &= 2(x_u(t)|Ax_u(t) + R_u(t)) \\ &\geq 2(K_u\|x_u\|^2 - \|x_u(t)\|\epsilon\|x(t)\|) \\ &\geq 2(K_u\|x_u\|^2 - 2\epsilon\|x_u(t)\|^2), \end{aligned}$$

joten  $x_u$  kasvaa eksponentiaalisesti. Siis  $x(t)$  poistuu katkaistusta kartiosta  $K_r$ , kun  $t \rightarrow \infty$ .

Tarkastellaan erotusta

$$g(t) = \|x_u(t)\|^2 - \|x_s(t)\|^2.$$

Selvästi  $g(t) = 0$ , jos  $x(t)$  on yhtälön  $\|x_u\| = \|x_s\|$  määräämällä kartiolla ja  $g(0) \geq 0$ . Kuten edellä nähdään, että

$$\frac{d}{dt}(\|x_s(t)\|^2) \leq 2(K_s + 2\epsilon)\|x_u(t)\|,$$

kun  $x(t) \in K_r$ , joten

$$\dot{g}(t) = 2(K_u - K_s - 4\epsilon)\|x_u(t)\| > 0$$

kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ , joilla  $x(t) \in K_r$ , joten  $x(t)$  poistuu kartiosta pallon  $\overline{B}(0, r)$  reunan läpi. Erityisesti se poistuu pallosta  $\overline{B}(0, r)$  riippumatta siitä, kuinka läheltä tasapainopistettä alkuarvo valitaan. Siis tasapainopiste ei ole vakaa.  $\square$

Olemme jo ensimmäisen kurssin kuudensissa harjoituksissa havainneet, että tasapainopisteen vakaudesta ei voi päätellä mitään ilman lisätietoja, jos linearisaation joidenkin ominaisarvojen reaaliosa on nolla.

Jos  $b$  on asymptootisesti vakaa tasapainopiste, niin sen maksimaalista avointa ympäristöä  $W$ , jossa pätee  $\phi(x) \rightarrow b$ , kun  $t \rightarrow \infty$  kaikille  $x \in W$ , sanotaan pisteen  $b$  *attraktioaltaaksi*.

**Esimerkki 10.3.** Differentiaaliyhtälön

$$(35) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + \epsilon x_1 \|x\|^2 \\ x_1 + \epsilon x_2 \|x\|^2 \end{pmatrix}.$$

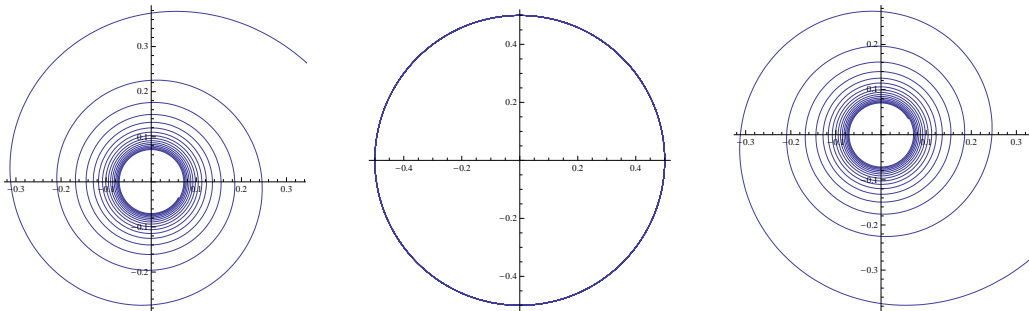
ainoa tasapainopiste on 0. Sen linearisaatio on kaikilla  $\epsilon \in \mathbb{R}$  sama yhtälö

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Linearisaation kerroinmatriisin ominaisarvot ovat  $\pm i$ , joten Lausetta 10.2 ei voi soveltaa. Differentiaaliyhtälö (35) on napakoordinaattimuodossa

$$\begin{cases} \dot{r} = \epsilon r^3 \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

joten 0 on asymptootisesti vakaa, kun  $\epsilon < 0$ , vakaa, kun  $\epsilon \leq 0$  ja epävakaa, kun  $\epsilon > 0$ .



KUVA 13. Pisteen  $(\frac{1}{2}, 0)$  radan osia, kun  $\epsilon = -1, 0, 1$ .

Kun  $\epsilon < 0$ , niin koko  $\mathbb{R}^2$  on origon attraktioallas.

Jos tasapainopiste ei ole hyperbolinen, sen vakaus tai asymptoottinen vakaus voidaan joskus päätellä seuraavalla *Liapunovin menetelmällä*. Tässä menetelmässä differentiaaliyhtälön ratkaisua ei tarvitse tuntea mutta tarvitaan vektorikentän kanssa oikealla tavalla yhteensopiva reaaliarvoinen funktio.

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko, ja olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Differentioituvan funktion  $L: U \rightarrow \mathbb{R}$  *rataderivaatta* on

$$\dot{L}(x) = DL(x)f(x) = \left. \frac{\partial(L \circ \phi_t(x))}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Olkoon  $V \subset U$  vektorikentän  $f$  tasapainopisteen  $b$  avoin ympäristö. Differentioituva funktio  $L: V \rightarrow \mathbb{R}$  on vektorikentän  $f$  *Liapunovin funktio* pisteessä  $b$ , jos

- (a)  $L(b) = 0$  ja  $L(x) > 0$  kaikilla  $x \in V \setminus \{b\}$  ja
- (b)  $\dot{L}(x) \leq 0$  kaikilla  $x \in V \setminus \{b\}$ .

Jos Liapunovin funktio  $L$  toteuttaa vahvemman ehdon

- (b')  $\dot{L}(x) < 0$  kaikilla  $x \in V \setminus \{b\}$ ,

niin  $L$  on *aito Liapunovin funktio*.

**Lause 10.4** (Liapunovin lause). *Olkoon  $b$  vektorikentän  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tasapainopiste. Jos jossain pisteen  $b$  avoimessa ympäristössä  $V \subset U$  on (aito) Liapunovin funktio, niin  $b$  on (asymptoottisesti) vakaa.*

*Todistus.* Olkoon  $\delta > 0$  siten, että  $\overline{B}(b, \delta) \subset V$ , ja olkoon

$$\alpha = \min_{x \in \partial B(b, \delta)} L(x) > 0.$$

Olkoon

$$W = \{x \in B(b, \delta) : L(x) < \alpha\}.$$

Nyt  $W$  on tasapainopisteen  $b$  avoin ympäristö, ja koska  $\dot{L} \leq 0$ , niin joukosta  $W$  lähtevät ratkaisut pysyvät siinä. Siispä  $b$  on vakaa.

Oletetaan, että  $\dot{L} < 0$ . Olkoon  $x$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisu, jolle  $f(0) \in W$ . Olkoon  $z \in \omega_f(x) \subset \overline{B}(0, \delta)$ . Koska kuvaus  $t \mapsto L(x(t))$  on vähenevä, niin  $L(z) \leq L(x(t))$  kaikille  $t \geq 0$ . Jos  $z \neq b$ , niin  $\dot{L}(z) < 0$ , joten  $L(\phi_s(z)) < L(z)$  kaikille  $s > 0$ . Koska  $\phi$  on jatkuva, niin kiinnitetylle  $s > 0$  on  $r < 0$  siten, että kaikille  $x \in B(z, r)$  pätee  $L(\phi_s(x)) < L(z)$ . Mutta tästä saadaan ristiriita tarkastelemalla pistettä  $x(t) \in B(z, r)$ .  $\square$

**Esimerkki 10.5.** Ensimmäisen kurssin viidensissä harjoituksissa osoitettiin, että funktio

$$V(r, h) = \frac{h^a}{e^{bh}} \frac{r^c}{e^{dr}}.$$

on invariantti Lotkan ja Volterran differentiaaliyhtälön

$$(36) \quad \begin{cases} \dot{r} = ar - bhr, \\ \dot{h} = -ch + dhr, \end{cases}$$

virtauksessa. Itse asiassa funktio

$$L(r, h) = -\log V(r, h) + \log V(b)$$

on differentiaaliyhtälön (36) Liapunovin funktio tasapainopisteessä

$$b = (r, h) = (c/d, a/b).$$

Kun  $r, h > 0$ , funktion  $L$  tasa-arvojoukot ovat topologisia ympyröitä. Koska  $\dot{L} = 0$  ja tarkastellaan tason systeemiä, nämä käyrät ovat suljettuja ratoja.

**Esimerkki 10.6.** Funktio  $L(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$  on lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2\pi iz_1 \\ \dot{z}_2 = 2\pi \alpha iz_2 \end{cases}$$

Liapunovin funktio ja  $\dot{L} \equiv 0$ . Kuten edelläkin Liapunovin funktion tasa-arvojoukot ovat hyperpintoja. Kuitenkaan emme voi päätellä, että radat ovat suljettuja, itse asiassa esimerkissä 6.11 osoitettiin, että radat eivät usein ole suljettuja.

Olkoon  $U \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko ja olkoon  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  sileä funktio. Differentiaaliyhtälö

$$(37) \quad \dot{x} = -\nabla V(x)$$

on funktiota  $V$  vastaava *gradienttisysteemi*.

**Propositio 10.7.** *Olkoon  $V$  sileä funktio. Tällöin*

- (a) *vektorikenttä  $-\nabla V$  on kohtisuorassa funktion  $V$  tasa-arvojoukkoa vastaan jokaisessa vektorikentän  $-\nabla V$  säännöllisessä pisteessä. Tämän pisteen ympäristössä funktion  $V$  tasa-arvojoukot ovat hyperpintoja.*
- (b) *jos  $b$  on gradienttisysteemin (37) tasapainopiste, niin sen linearisoinnin kaikki ominaisarvot ovat reaalisia.*
- (c) *jos  $b$  on funktion  $V$  aito lokaali minimipiste, niin funktio  $x \mapsto V(x) - V(b)$  on on vastaavan gradienttisysteemin (37) aito Liapunovin funktio pisteessä  $b$  ja  $b$  on systeemin asymptoottisesti vakaa tasapainopiste.*
- (d) *kaikki gradienttisysteemin (37)  $\omega$ -rajapisteet ovat systeemin tasapainopisteitä.*

*Todistus.* Kohdat (a) ja (b) todistettiin ensimmäisen kurssin viimeisissä harjoituksissa. Kohta (d) tehdään harjoituksissa.

Kohdan (c) todistusta varten huomaamme, että funktio  $x \mapsto V(x) - V(b)$  on selvästi positiivinen jossain pisteen  $b$  punkteeratussa ympäristössä. Lisäksi

$$\dot{V}(x) = DV(x)(-\nabla V(x)) = -\|\nabla V(x)\|^2 < 0,$$

koska oletimme, että  $b$  on eristetty kriittinen piste. Väite seuraa Liapunovin lauseesta 10.4. □

**Esimerkki 10.8.** Funktio  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

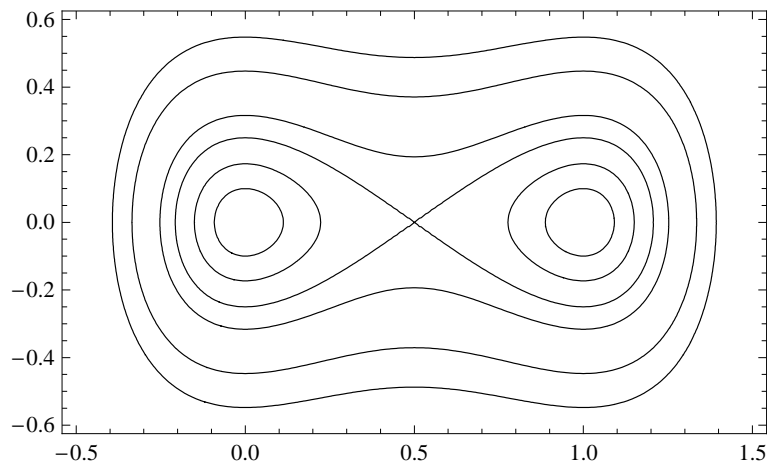
$$V(x) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2,$$

määrittää gradienttisysteemin

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4x_1(x_1 - \frac{1}{2})(x_1 - 1) \\ -2x_2 \end{pmatrix},$$

jota tarkasteltiin harjoituksissa 6 ensimmäisellä kurssilla. Vektorikenttä  $\nabla V$  on kohtisuorassa funktion  $V$  tasa-arvokäyriä vastaan. Koska  $\nabla V(x) = 0$  ainoastaan, jos  $x_2 = 0$  ja  $x_1 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ , niin tasa-arvokäyrät ovat sileitä kaikkialla paitsi tasapainopisteessä  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

Kaikki tasapainopisteet ovat hyperbolisia, ja kaikki radat suppenevat joihinkin tasapainopistettä: Jos  $x_1 < \frac{1}{2}$ , niin  $\phi_t(x)$  suppenee kohti asymptoottisesti vakaa tasapainopistettä 0 ja jos  $x_1 > \frac{1}{2}$ , niin  $\phi_t(x)$  suppenee kohti asymptoottisesti vakaa tasapainopistettä  $(1, 0)$ , kun  $t \rightarrow \infty$ . Suoran  $x_1 = \frac{1}{2}$  pisteet taas suppenevat kohti epästabliilia tasapainopistettä  $(\frac{1}{2}, 0)$ .



KUVA 14. Funktion  $V$  tasa-arvokäyriä

**Lause 10.9** (Krasovskiin ja LaSallen invarianssiperiaate). *Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä, ja olkoon  $b \in U$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  tasapainopiste. Olkoon  $L: U \rightarrow \mathbb{R}$  vektorikentän  $f$  Liapunovin funktio pisteessä  $b$ . Olkoon  $P \subset U$  pisteen  $b$  suljettu positiivisesti invariantti kompakti ympäristö. Oletetaan, että  $L$  ei ole vakio millään maksimaalisella ratkaisukäyrällä, joka sisältyy kokonaan joukkoon  $P \setminus \{b\}$ . Tällöin  $b$  on asympotoottisesti stabiili tasapainopiste ja joukko  $P$  sisältyy pisteen  $b$  attraktioaltaaseen.*

*Todistus.* Olkoon  $x_0 \in P$  siten, että  $\omega(x_0) \neq \{b\}$ . Koska  $P$  on kompakti, niin  $\omega(x_0)$  ei ole tyhjä. Harjoituksissa osoitettiin, että  $\omega(x_0)$  sisältyy kokonaan joukkoon  $P$ , ja että se on invariantti differentiaaliyhtälön virtauksessa.

Olkoon  $z \in \omega(x_0)$ . Tällöin on  $t_k \nearrow \infty$  siten, että  $\phi_{t_k}(x_0) \rightarrow z$ , kun  $k \rightarrow \infty$ . Nyt  $L(\phi_{t_k}(x_0)) \geq L(z)$  kaikilla  $k$  ja  $\lim L(\phi_{t_k}(x_0)) = L(z)$ . Toisaalta kaikille  $s \in \mathbb{R}$  pätee  $\lim L(\phi_{t_k+s}(x_0)) = L(z)$ , koska  $L$  on vähenevä rataa pitkin, ja  $\phi_{t_k+s}(x_0) \rightarrow \phi_s(z)$ , kun  $k \rightarrow \infty$ , joten  $L(\phi_s(z)) = L(z)$  kaikilla  $s \in \mathbb{R}$ . Koska pisteen  $z$  rata sisältyy joukkoon  $P$ , onkin löydetty kokonaan joukkoon  $P \setminus \{b\}$  sisältyvä rata, jolla  $L$  on vakio, mutta tämä on vastoin oletusta.  $\square$

**Esimerkki 10.10** (Epälineaarinen heiluri). Jäykällä varrella akseliin kiinnitetyn heilurin liikettä kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \sin \theta = 0,$$

missä  $b \geq 0$  on kitkakerroin. Muutetaan tämä toisen asteen differentiaaliyhtälö yhtälöpariksi valitsemalla toiseksi muuttujaksi  $v = \dot{\theta}$ , jolloin saadaan

$$(38) \quad \begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin \theta - bv \end{cases}.$$

Differentiaaliyhtälöllä (38) on numeroituva joukko tasapainopisteitä: Tasapainopisteet  $(\pi + k2\pi, 0)$  vastaavat heilurin yläasemaa. Näissä pisteissä yhtälön lineaarisointi

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

on hyperbolinen ja ominaisarvojen tulo on negatiivinen. Pisteet ovat siis Lauseen 10.2 nojalla epävakaita. Pisteet  $(k2\pi, 0)$  taas vastaavat heilurin ala-asemaa. Näissä

pisteissä yhtälön linearisointi on

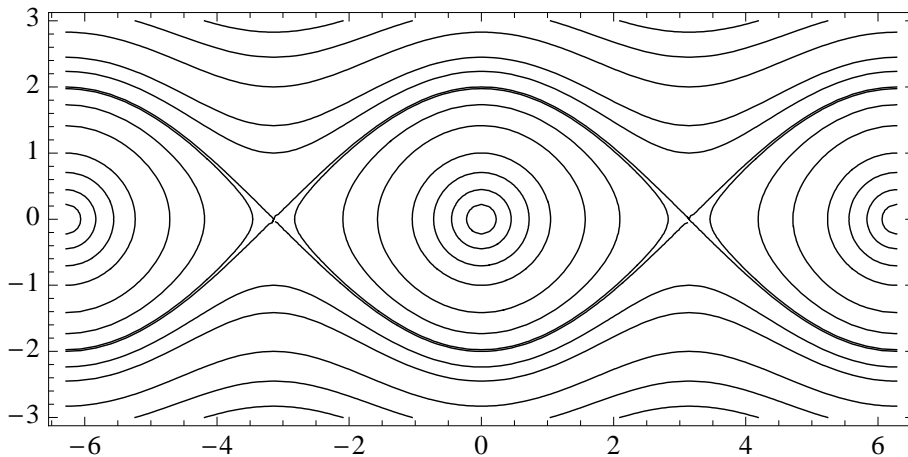
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix}.$$

Jos kitka on positiivinen, niin ala-asema on vakaa tasapainopiste, jos taas  $b = 0$ , niin ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaarisia ja linearisointi on keskus.

Epälineaarisen heilurin Liapunovin funktiona tasapainopisteessä  $(0, 0)$  on luonteva käyttää systeemin *energiaa*

$$E(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 + 1 - \cos \theta,$$

joka koostuu liike-energiasta  $\frac{1}{2}v^2$  ja potentiaalienergiasta  $1 - \cos \theta$ . Nyt  $E(0, 0) = 0$



ja  $E(\theta, v) > 0$ , kun  $(\theta, v) \neq 0$  ja  $|\theta| < \pi$ .

$$\dot{E} = DE(\theta, v) \begin{pmatrix} v \\ -bv - \sin \theta \end{pmatrix} = -bv^2 \leq 0,$$

joten Liapunovin funktion ehdot toteutuvat kaikilla  $b > 0$ . Siis 0 on vakaa kaikilla  $b \geq 0$  ja asymptoottisesti vakaa kaikilla  $b > 0$ .

Kun  $b = 0$  nähdään kuten Lotkan ja Volterran differentiaaliyhtälön tapauksessa, että energiefunktion tasapainokäyrät ovat sileitä käyriä, kun  $|\theta| < \pi$  ja että nämä tasa-arvokäyrät ovat systeemin suljettuja ratoja, kun  $E(\theta, v) < 2 = E(\pi, 0)$ .

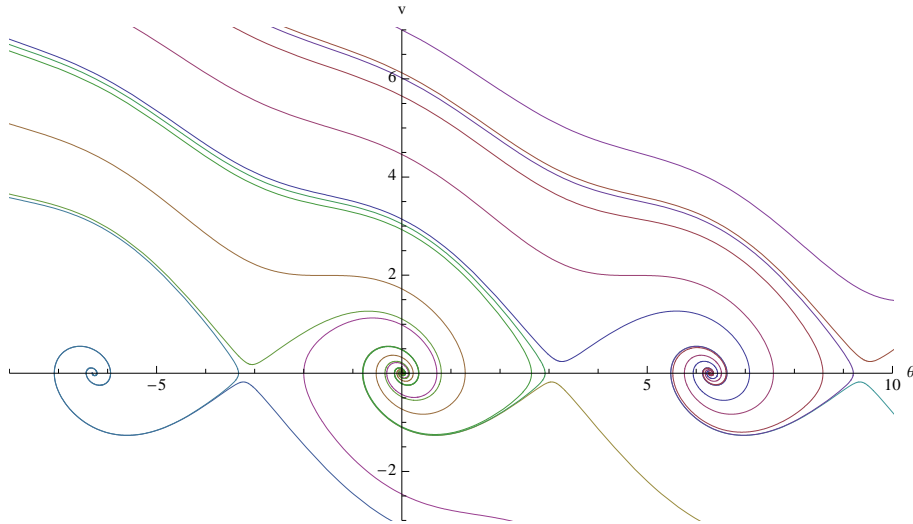
Kun  $b > 0$ , linearisaation ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiivisia, joten lokaali käyttäytyminen tiedetään puoleensavetäväksi. Energian tasa-arvojoukko

$$\begin{aligned} & \{(\theta, v) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : E(\theta, v) = E(\pi, 0) = 2\} \\ & = \{(\theta, v) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : v^2 = 2(1 - \cos \theta)\} \end{aligned}$$

topologinen ympyrä, joka koostuu kahdesta epästabiileja tasapainopisteitä  $(\pm\pi, 0)$  yhdistävästä radasta. Radat, joiden alkuarvo on tämän ympyrän rajaamassa joukossa

$$P = \{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2 : |\theta| < \pi, E(\theta, \pi) < 2\}$$

pysyvät Jordanin käyrälauseen nojalla tässä joukossa, joka on siis positiivisesti invariantti. Krasovskiin ja LaSallen invarianssiperiaatteen nojalla joukko  $P$  sisältyy origon attraktioaltaaseen. Nimittäin, jos  $E$  on vakio jollain radalla, niin  $\dot{E}(\theta, v) = -bv^2 = 0$ . Siispä  $v = 0$ , joten  $\dot{\theta} = 0$ . Lisäksi  $\sin \theta = \dot{v} = 0$ , joten ehdosta  $|\theta| < \pi$  saadaan  $\theta = 0$ . Joukossa  $P \setminus \{0\}$  ei siis ole ratoja, joilla  $E$  on vakio. "Fysikaalinen päättely" tai Mathematica kertovat, että attraktioallas on huomattavasti suurempi.



KUVA 15. Kitkallisen epälineaarisen heilurin yhtälön ratkaisuja, kun  $b = \frac{1}{2}$

Matemaattinen heiluri on esimerkki Hamiltonin systeemistä: Olkoon  $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  avoin joukko. Kirjoitetaan pisteen  $z \in U$  koordinaatit muodossa  $z = (x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Olkoon  $H: U \rightarrow \mathbb{R}$   $C^2$ -funktio, ja määritellään sen osittaisderivaatoista muodostetut vektoriarvoiset kuvaukset  $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \end{aligned}$$

on *Hamiltonin systeemi*, jolla on  $n$  vapausastetta. Funktio  $H$  on systeemin *kokonaisenergia* tai *Hamiltonin funktio*. Harjoituksissa osoitimme Hamiltonin systeemien perusominaisuuksia:

**Propositio 10.11.** *Hamiltonin systeemin ratkaisut sisältyvät kokonaisenergiafunktion tasa-arvojoukkoihin* □

Jatkuvasti differentioituvan vektorikentän  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tasapainopiste  $b$  on *degeneroitumaton*, jos  $Df(p)$  on kääntävä.

**Lemma 10.12.** *Yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin degeneroitumattoman tasapainopisteen linearisointi on keskus tai satula.* □

Tämän avulla osoitetaan viidensissä harjoituksissa

**Propositio 10.13.** *Yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin degeneroitumattoman tasapainopiste  $b$  on*

- *vakaa mutta ei asympotoottisesti vakaa, jos sen linearisointi on keskus ja*

- epävakaa, jos sen linearisointi on satula. □

**Esimerkki 10.14.** Olkoon  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$ -funktio jollain reaalilukuvälillä  $I$ . Funktion  $f$  määräämä *Newtonin systeemi* on toisen asteen differentiaaliyhtälö  $\ddot{x} = f(x)$  tai vastaava differentiaaliyhtälöpari

$$(39) \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases}$$

Newtonin systeemin *liike-energia* on  $T(v) = \frac{1}{2}v^2$  ja sen *potentiaalienergia* pisteen  $x_0 \in I$  suhteen on

$$V(x) = - \int_{x_0}^x f(s) ds .$$

Systeemin *kokonaisenergia* on  $E = T + V$ . Nyt

$$\frac{\partial E(x, v)}{\partial x} = \partial V'(x) = -f(x)$$

ja

$$\frac{\partial E(x, v)}{\partial v} = T'(v) = v,$$

joten Newtonin systeemi (39) on yhden vapausasteen Hamiltonin systeemi. Esimerkissä 10.10 tarkasteltu matemaattinen heiluri on Newtonin systeemi, siis yhden vapausasteen Hamiltonin systeemi.

**Esimerkki 10.15.** Esimerkissä 10.8 käsitelty funktio  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$V(x) = x^2(x - 1)^2 + y^2,$$

määrää Hamiltonin systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -4x(x - \frac{1}{2})(x - 1) , \end{cases}$$

jonka radat ovat kuvassa 14 esitettyjä funktion  $V$  tasa-arvokäyrien komponentteja. Systeemillä on kaksi poikkeuksellista rataa, jotka muodostavat tasapainopisteen  $(\frac{1}{2}, 0)$  kanssa tasa-arvokäyrän  $V(x, y) = \frac{1}{16}$ . Tämä tasa-arvokäyrä on kahdeksikon muotoinen. Oikeanpuoleinen silmukka on ratkaisun  $t \mapsto \phi_t(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, 0)$  rata, jolle  $\phi_t(\frac{1+\sqrt{2}}{2}) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$  oikealta alaviistosta, kun  $t \rightarrow \infty$ , ja  $\phi_t(\frac{1+\sqrt{2}}{2}) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$  oikealta ylaviistosta, kun  $t \rightarrow -\infty$ . Vasemmanpuoleinen silmukka on pisteen  $(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0)$  rata, joka käyttäytyy vastaavasti. Tasapainopiste  $(\frac{1}{2}, 0)$  on *homoklininen tasapainopiste*:  $\phi(\frac{1+\sqrt{2}}{2}) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$ , kun  $t \rightarrow \pm\infty$ .

## 11. STABIILI JA EPÄSTABIILI MONISTO

Luvussa 10 osoitimme muunmuassa, että hyperbolinen tasapainopiste, jonka linearisoinnin jonkin ominaisarvon reaaliosa on positiivinen, on epävakaa. Nyt todistamme tuloksen, joka antaa huomattavasti tarkemman kuvan sellaisen hyperbolisen tasapainopisteen ympäristöstä, jonka linearisoinnilla on ominaisarvoja joiden reaaliosa on negatiivinen ja myös ominaisarvoja, joiden reaaliosa on positiivinen.

**Lause 11.1** (Stabiilin ja epästabiilin moniston lause). *Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä. Olkoon  $\phi$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  osittainen virtaus ja olkoon  $b$  sen hyperbolinen tasapainopiste. Oletetaan, että differentiaalilla  $Df(b)$  on  $0 < k < n$  ominaisarvoa (algebrallisen kertaluvun mukaan laskettuna), joilla on negatiivinen reaaliosa ja  $n-k$  ominaisarvoa, joilla on positiivinen reaaliosa. Tällöin on avaruuden  $\mathbb{R}^n$   $k$ -ulotteinen differentioituva alimonisto  $W_{\text{loc}}^s(b)$ , jolla on seuraavat ominaisuudet:*

- Jos  $x_0 \in W_{\text{loc}}^s(b)$ , niin  $\phi_t(x_0) \rightarrow 0$ , kun  $t \rightarrow \infty$ ,
- On  $\delta > 0$  siten, että jos  $x_0 \in B(b, \delta) \setminus W_{\text{loc}}^s(b)$ . niin  $\phi_t(x) \notin B(b, \delta)$  jollain  $t > 0$ .
- $W_{\text{loc}}^s(b)$  sivuaa differentiaalilla  $Df(b)$  stabiilia aliavaruutta origossa.

*Lisäksi on  $(n-k)$ -ulotteinen differentioituva alimonisto  $W_{\text{loc}}^u(b)$ , jolla on ominaisuudet*

- Jos  $x_0 \in W_{\text{loc}}^u(b)$ , niin  $\phi_t(x_0) \rightarrow 0$ , kun  $t \rightarrow -\infty$ ,
- On  $\delta > 0$  siten, että jos  $x_0 \in B(p, \delta) \setminus W_{\text{loc}}^u(b)$ . niin  $\phi_t(x) \notin B(b, \delta)$  jollain  $t < 0$ .
- $W_{\text{loc}}^u(b)$  sivuaa differentiaalilla  $Df(b)$  epästabiilia aliavaruutta origossa.

---

Lauseen 11.1 antama monisto  $W_{\text{loc}}^s(b)$  on pisteen  $b$  lokaali stabiili monisto ja  $W_{\text{loc}}^u(b)$  on pisteen  $b$  lokaali epästabiili monisto.

---

*Todistus.* Voidaan olettaa, että  $b = 0$  ja  $B = Df(0) = \text{diag}(B_-, B_+)$ , missä  $B_-$  on  $k \times k$ -matriisi, jonka kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiivisia ja  $B_+$  on  $(n-k) \times (n-k)$ -matriisi, jonka kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat positiivisia. Tällöin  $f(x) = Bx + R(x)$ , missä  $R$  on  $C^1$ -kuvaus, jolle  $R(0) = 0$ ,  $DR(0) = 0$  ja  $R(x) = o(x)$ , kun  $x \rightarrow 0$ . Jokaisella  $\epsilon > 0$  on  $\delta > 0$  siten, että  $R|_{B(0, \delta)}$  on  $\epsilon$ -Lipschitz-jatkuva.

Määritellään kuvaukset  $U_-: \mathbb{R} \rightarrow M_k(\mathbb{R})$  ja  $U_+: \mathbb{R} \rightarrow M_{n-k}(\mathbb{R})$  asettamalla

$$U_-(t) = \text{diag}(\exp(tB_-), 0)$$

ja

$$U_+(t) = \text{diag}(0, \exp(tB_+)).$$

Tällöin  $\exp(tB) = U_-(t) + U_+(t)$  ja

$$\dot{U}_{\pm}(t) = BU_{\pm}(t)$$

kaikilla  $t$ .

Matriisin  $B$  ominaisarvoille tehdyistä oletuksista seuraa, että on  $\alpha, K, \sigma > 0$  siten, että

$$\begin{aligned} \text{Re Sp}(B) \cap ]-\infty, 0[ &= \text{Re Sp}(B_-) \subset ]-\infty, \alpha[, \\ \|U_-(t)\| &\leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t} \end{aligned}$$

kaikilla  $t \geq 0$  ja

$$\|U_+(t)\| \leq Ke^{\sigma t}$$

kaikilla  $t \leq 0$ .

Olkoon  $a \in \mathbb{R}^n$ . Tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$(40) \quad \theta(t, a) = U_-(t)a + \int_0^t U_-(t-s)R(\theta(s, a))ds - \int_t^\infty U_+(t-s)R(\theta(s, a))ds.$$

Kuten OY-lauseen todistuksessa voidaan osoittaa perättäisten approksimaatioiden menetelmällä (Harjoitus 11), että tällä yhtälöllä on ratkaisu, kun  $\epsilon < \frac{\sigma}{4K}$  ja  $\|a\| < \frac{\delta}{2K}$ . Lisäksi ratkaisu toteuttaa arvion

$$(41) \quad \|\theta(t, a)\| \leq 2K\|a\|e^{-\alpha t}$$

kaikilla  $t > 0$ .

Oletetaan, että  $a \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$ . (Itse asiassa vektorin  $a$   $n - k$  viimeistä komponenttia eivät vaikuta perättäisten approksimaatioiden avulla saatuun ratkaisuun.) Nyt  $\theta(t, a)$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisu alkuarvoilla  $\theta(0, a)_i = a_i$ , kun  $1 \leq i \leq k$  ja

$$\theta(0, a)_i = \left( - \int_t^\infty U_+(-s)R(\theta(0, (a_1, \dots, a_k, 0)))ds \right)_i,$$

kun  $k + 1 \leq i \leq n$ . Differentioituvan kuvauksen  $\Psi: B(0, \frac{\delta}{2K}) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,

$$\Psi_i(a_1, \dots, a_k) = \theta(0, a)_{i-k}$$

graafi on avaruuden  $\mathbb{R}^n$  alimonisto  $W_{\text{loc}}^s(b)$ .

Jos alkuarvo valitaan alimonistolta  $W_{\text{loc}}^s(b)$ , niin se määrää OY-lauseen nojalla jonkin ratkaisun  $\theta(t, a)$ . Siispä  $W_{\text{loc}}^s(b)$  on positiivisesti invariantti ja ratkaisujen  $\omega$ -rajajoukko on 0, jota lähestytään vieläpä eksponentiaalisella nopeudella, kun  $t \rightarrow \infty$  arvion (41) nojalla. Tämä todistaa ensimmäisen väitteen.

Olkoon  $x_0 \in B(0, \delta) \setminus W_{\text{loc}}^s(b)$ , ja olkoon  $y$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  ratkaisu, jolle  $y(0) = x_0$  ja  $y(t) \in B(0, \delta)$  kaikilla  $t \geq 0$ . Tällöin ratkaisu  $y$  toteuttaa integraaliyhtälön

$$(42) \quad \begin{aligned} y(t) &= \exp(tB)x_0 + \int_0^t \exp((t-s)B)R(y(s))ds \\ &= U_-(t)x_0 + U_+(t)c + \int_0^t U_-(t-s)R(y(s))ds - \int_t^\infty U_+(t-s)R(y(s))ds \end{aligned}$$

vakiovektorilla

$$c = x_0 + \int_0^\infty U_+(-s)R(y(s))ds.$$

Integraalit

$$\int_0^t U_-(t-s)R(y(s))ds$$

ja

$$- \int_t^\infty U_+(t-s)R(y(s))ds$$

suppenevat koska oletimme, että  $y(s) \in B(0, \delta)$  kaikilla  $s \geq 0$  ja funktio  $R$  on rajoitettu tässä joukossa. Siis kaikki muut termit integraaliyhtälössä (42) mahdollisesti

termiä  $U_+(t)c$  lukuunottamatta ovat rajoitettuja, kun  $t \rightarrow \infty$ . Itse asiassa lineaaristen yhtälöiden stabiilisuusteoriasta tiedämme, että  $U_+(t)c$  on rajoittamaton, jos  $c_j \neq 0$  jollain  $k < j \leq n$ . Tällöin siis  $U_+c = 0$  ja integraaliyhtälö (42) tulee muotoon (40).

Lauseen toinen väite tulee todistetuksi, kun osoitamme, että integraaliyhtälön (40) ratkaisu  $\theta$ , jolle  $\theta(t, a) \in B(0, \delta)$ , kun  $t \geq 0$  on yksikäsitteinen. Tällöinhän rajoitettu ratkaisu on yksi todistuksen ensimmäisessä osassa löydetyistä ratkaisuisista, jotka sisältyvät stabiiliin monistoon. Jos  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  ovat integraaliyhtälön (40) ratkaisuja samalla  $a$  ja niiden ratkaisut sisältyvät palloon  $B(0, \delta)$ , niin

$$\|\theta_1(a, t) - \theta_2(a, t)\| \leq K\epsilon \left( e^{-\sigma t} \int_0^t e^{\sigma s} \|\theta_1(a, s) - \theta_2(a, s)\| ds + e^{\sigma t} \int_t^\infty e^{-\sigma s} \|\theta_1(a, s) - \theta_2(a, s)\| ds \right).$$

Tästä seuraa epäyhtälö

$$\sup_{t \geq 0} \|\theta_1(a, t) - \theta_2(a, t)\| \leq \frac{2K\epsilon}{\sigma} \sup_{t \geq 0} \|\theta_1(a, t) - \theta_2(a, t)\|.$$

Mutta oletuksistamme seuraa, että  $\frac{2K\epsilon}{\sigma} < 1$ , joten  $\sup_{t \geq 0} \|\theta_1(a, t) - \theta_2(a, t)\| = 0$ .

Kolmas väite, että stabiili monisto sivuaa linearisoinnin stabiilia aliavaruutta origossa todistetaan samaan tapaan. Yksityiskohdat esitetään esimerkiksi Coddingtonin ja Levinsonin kirjassa [CL, s. 333].

Epästabiilia monistoa koskevat väitteet seuraavat edellä todistetusta tarkastelemalla systeemiä  $\dot{x} = -f(x)$ , koska tällöin stabiilin ja epästabiilin moniston roolit vaihtuvat. □

---

Stabiilin ja epästabiilin moniston lause antaa hyperbolisen tasapainopisteen ympäristön jaon pisteisiin, jotka virtaavat kohti tasapainopistettä, kun aika lähestyy positiivista tai negatiivista äärettömyyttä, ja jäljelle jäävään avoimeen joukkoon. Seuraava määritelmä antaa globaalien versio näistä monistoista:

Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä, jota vastaa virtaus  $\phi$ , ja olkoon  $b$  differentiaaliyhtälön  $\dot{x} = f(x)$  tasapainopiste. Tasapainopisteen  $b$  *globaali stabiili monisto* on

$$W^s(b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_t(x) \rightarrow b, \text{ kun } t \rightarrow \infty\}$$

ja sen *globaali epästabiili monisto* on

$$W^u(b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_t(x) \rightarrow b, \text{ kun } t \rightarrow -\infty\}$$

**Esimerkki 11.2.** Esimerkissä 10.10 käsitellyn matemaattisen heilurin hyperbolisen tasapainopisteiden  $((1 + 2k)\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , (globaalit) stabiilit ja epästabiilit monistot saadaan valisemalla vuorotellen alempi ja ylempi haara kokonaisenergian tasarvojoukossa

$$\{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2 : E(\theta, v) = E(\pi, 0) = 2\} = \{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 = 2(1 - \cos \theta)\},$$

kuvan 15 mukaisesti.

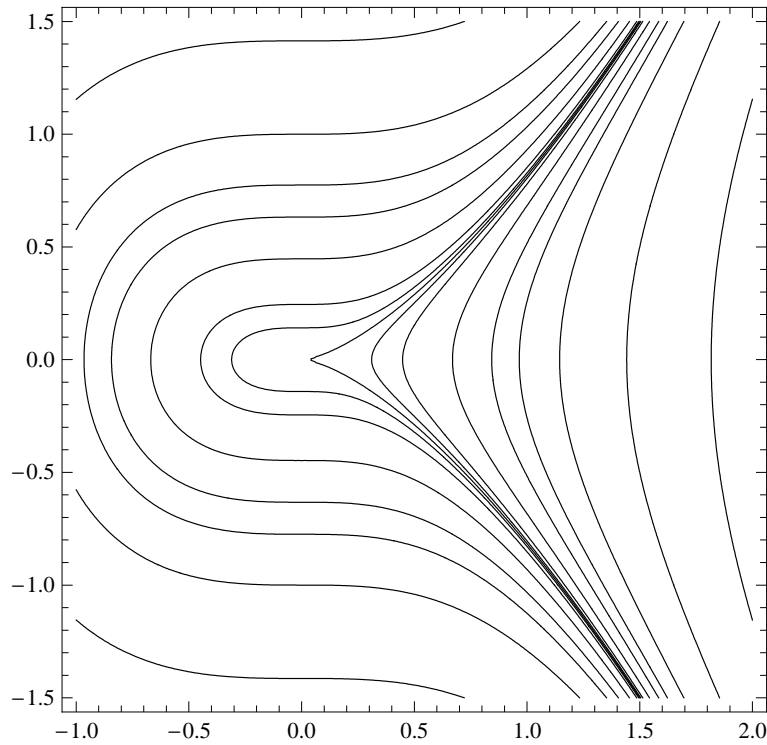
**Esimerkki 11.3.** Propositio 10.13 ei sovellu funktion  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3$$

määräämään Hamiltonin systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

tasapainopisteen 0 tarkasteluun koska 0 on tarkasteltavan vektorikentän degeneroitunut tasapainopiste. Samasta syystä emme voi myöskään soveltaa Stabiilin ja epästabiilin moniston lausetta. Voimme kuitenkin määrittää origon stabiilin ja epästabiilin moniston:  $H(0, 0) = 0$ , joten epästabiili ja stabiili monisto sisältyvät tasavarvojoukkoon  $H^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = \frac{2}{3}x^3\}$ . Tämä käyrä on muodoltaan *kärki* (cusp). Koska  $\dot{y} = x^2 > 0$  kaikkialla, nähdään, että käyrän alempi haara on origon stabiili monisto ja ylempi haara on origon epästabiili monisto.



KUVA 16. Hamiltonin funktiota  $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3$  vastaavan Hamiltonin systeemin ratoja lähellä tasapainopistettä 0.

Lokaali ja globaali stabiili ja epästabiili monisto voidaan määrittellä yleisemminkin kuin kiintopisteelle: Jos  $x_0 \in U$  on piste, jonka rata on jaksollinen:  $\phi_T(x_0) = x_0$  jollain minimaalisella  $T > 0$ , olkoon

$$\Gamma = \phi(\mathbb{R}, x_0) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(x_0) = \bigcup_{0 \leq t < T} \phi_t(x_0).$$

Olkoon

$$d(z, K) = \min_{x \in K} \|z - x\|$$

pisteen  $z$  ja kompaktin joukon  $K$  etäisyys. Määritellään radan  $\Gamma$  *globaali stabiili monisto*

$$W^s(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(\phi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0, \text{ kun } t \rightarrow \infty\}$$

ja sen *globaali epästabiili monisto*

$$W^u(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(\phi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0, \text{ kun } t \rightarrow -\infty\}$$

**Esimerkki 11.4.** Tason  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$  yksikköympyrä

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$$

on invariantti differentiaaliyhtälön

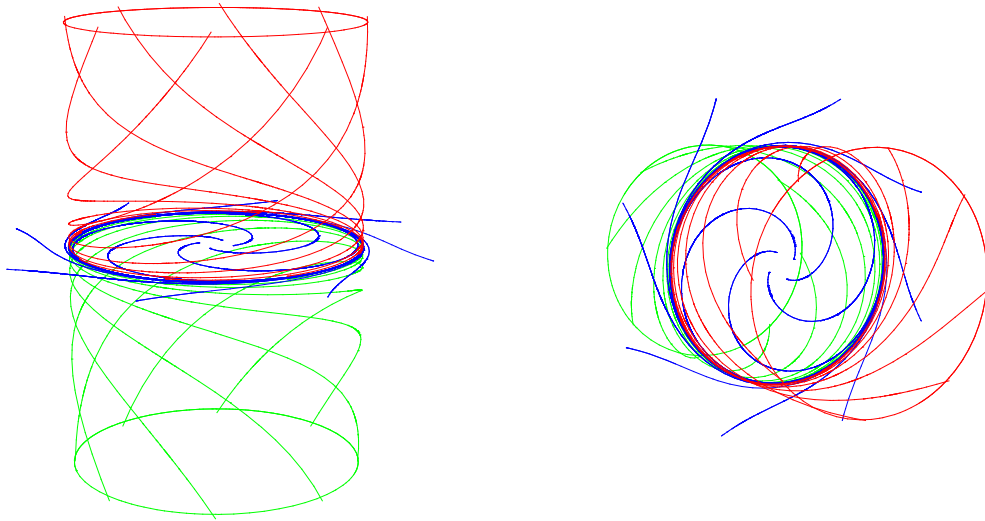
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

määräämässä osittaisessa virtauksessa. Itse asiassa  $\Gamma$  on minkä tahansa pisteen  $p \in \Gamma$  jaksollinen rata. Harjoituksissa osoitettiin, että

$$W^s(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0, x \neq 0\}$$

ja

$$W^u(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$



KUVA 17. Kaksi näkökulmaa  $x_1x_2$ -tason ympyrän stabiilista ja epästabiilista monistosta. Siniset radat ovat stabiilissa monistossa, punaiset ja vihreät epästabiilissa.

Vaihtamalla vektorikentän viimeisen komponentin suunnan vastakkaiseksi saamme differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

jossa ympyrän  $\Gamma$  stabiili monisto on  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ .

## 12. RATKAISUJEN GLOBAALI KÄYTTÄYTYMINEN

Viimeisessä luvussa tarkastelemme muunmuassa differentiaaliyhtälön  $\omega$ - ja  $\alpha$ -rajajoukkojen rakennetta. Etsimme vastauksia kysymykseen, millaista joukkoa kohti differentiaaliyhtälön ratkaisut voivat kasautua.

Tasossa tilanne on yksinkertaisempi kuin korkeammassa ulottuvuudessa. Jaksolliset radat eivät ole kovin kiinnostavia tässä yhteydessä, jos muut radat eivät kasaudu niitä kohti. Esimerkiksi tason lineaaristen yhtälöiden tapauksessa, kun molemmat ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaarisia, koko taso origon ulkopuolella on keskenään samanjaksoisten ellipsiratojen yhdiste.

Jos joukko  $\Omega$  on jonkin pisteen  $\omega$ - tai  $\alpha$ -rajajoukko, niin  $\Omega$  on *rajajoukko*. Sanotaan, että pisteen  $z \in \mathbb{R}^n$  rata  $\Gamma$  on  $\omega$ -*rajasykli* tai *puoleensavetävä rajasykli*, jos on  $x \notin \Gamma$ , jolle  $\Gamma \subset \omega(x)$ , ja vastaavasti  $\alpha$ -*rajasykli* tai *hylkivä rajasykli*, jos on  $x \notin \Gamma$ , jolle  $\Gamma \subset \alpha(x)$ .

Olemme nähneet monenlaisia rajajoukkoja:

- Esimerkissä 11.4 tarkastelimme 3-ulotteisia systeemejä, joissa  $x_1x_2$ -tason yksikköympyrä on rajasykli.
- Esimerkissä 6.11, tarkastelimme lineaarista 4-ulotteista systeemiä

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2\pi iz_1 \\ \dot{z}_2 = 2\pi \alpha iz_2 \end{cases}.$$

Jos parametri  $\alpha$  on irrationaalinen, niin jokainen torus

$$T(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\},$$

$r_1, r_2 > 0$  on jokaisen pisteensä rajajoukko. Toisaalta, koska nämä torukset ovat invariantteja ja kaikki radat, jotka eivät ole näillä toruksilla ovat suljettuja, niin  $T_{r_1, r_2}$  ei ole minkään pisteen  $(z, w) \notin T_{r_1, r_2}$  rajajoukko.

Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -vektorikenttä, ja olkoon  $\phi$  vektorikentän  $f$  määräämä (ositainen) virtaus. Olkoon  $x_0$  säännöllinen piste, jonka rata  $\Gamma$  on jaksollinen. Olkoon  $S$  lokaali poikkileikkaus pisteessä  $x_0$ . Jos pisteelle  $x \in S$  on  $t > 0$ , jolla  $\phi_t(x) \in S$ , niin

$$\tau(x) = \min\{t > 0 : \phi_t(x) \in S\}$$

on pisteen  $x$  *ensimmäinen paluu-aika* poikkileikkaukseen  $S$ . Niille pisteille, joiden ensimmäinen paluu-aika on määritelty, määritellään *Poincarén kuvaus* asettamalla  $P(x) = \phi(\tau(x), x) \in S$ . Kuvaus  $P$  ei ole välttämättä määritelty koko poikkileikkauksessa  $S$ .

**Propositio 12.1.** *Olkoot  $f$  ja  $x_0$  kuten yllä. Ensimmäinen paluu-aika ja Poincarén kuvaus ovat hyvin määritellyjä differentioituvia kuvauksia jossain pisteen  $x_0$  avoimessa ympäristössä poikkileikkauksella  $S$ .*

*Todistus.* Olkoon  $T = \tau(x_0)$  pisteen  $x_0$  jakso. Tarkastellaan jatkuvasti differentioituvaa funktiota

$$F(t, x) = (\phi_t(x) - x_0 | f(x_0)).$$

Pisteen  $x_0$  jaksollisuudesta seuraa, että  $F(T) = 0$ . Määritelmän mukaan  $\phi_t(x)$  on poikkileikkauksen  $S$  sisältävässä hypertasossa täsmälleen silloin, kun  $F(t, x) = 0$ .

Koska  $x_0$  on säännöllinen piste,

$$\frac{\partial F(T, x_0)}{\partial t} = \left( \frac{\partial \phi(T, x_0)}{\partial t} | f(x_0) \right) = \|f(x_0)\|^2 > 0.$$

Implisiittifunktiolauseen mukaan on  $r > 0$  ja yksikäsitteinen funktio  $\tau: B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  siten, että  $\tau(x_0) = T$  ja  $F(\tau(x), x) = 0$  kaikille  $x \in B(x_0, r)$ . Saadaan siis määriteltäjä jatkuvasti differentioituva kuvaus  $P_0: B(x, r) \rightarrow f(x_0)^\perp$ . Käyttämällä jatkuvuutta voidaan rajoittaa kuvaukset  $\tau$  ja  $P_0$  riittävän pieneen pisteen  $x_0$  ympäristöön hypertasossa  $f(x_0)^\perp$ , jotta ne määrittelevät ensimmäisen paluunajan ja Poincarén kuvauksen.  $\square$

Tasossa Poincarén kuvaus voidaan ajatella reaaliarvoisena funktiona, kun samastetaan  $f(x_0)^\perp$  ja  $\mathbb{R}$ . Tällöin Poincarén kuvauksen tarkastelu on melko suoraviivaista. Harjoituksissa osoitetaan

**Propositio 12.2.** *Olkkoon  $x_0$  tason differentiaaliyhtälön säännöllinen jaksollinen piste. Olkkoon  $\Gamma$  pisteen  $x_0$  rata. Jos  $|P'(x_0)| < 1$ , niin on  $\delta > 0$  siten, että  $\Gamma = \omega(x)$  jokaiselle pisteelle  $x$ , joka on radan  $\Gamma$   $\delta$ -ympäristössä.*  $\square$

**Propositio 12.3.** *Olkkoon  $S$  tason differentiaaliyhtälön lokaali poikkileikkaus. Olkkoon  $x$  piste, jonka positiivinen rata kohtaa poikkileikkauksen  $S$  äärettömän monta kertaa. Olkkoot  $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$  siten, että  $\phi_{t_k}(x) \in S$  kaikilla  $k \in \mathbb{N}$ . Tällöin jono  $(\phi_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$  on monotoninen poikkileikkauksella  $S$ .*

*Todistus.* Tarkastellaan kolmea perättäistä aikaa  $t_{k-1}, t_k, t_{k+1}$ . Tarkastellaan silmukkaa

$$\Sigma = \phi([t_{k-1}, t_k], x) \cup [\phi_{t_k}(x), \phi_{t_{k-1}}(x)].$$

Olkkoon  $D$  silmukan  $\Sigma$  rajoittama kompakti topologinen kiekko.

Jos vektori  $f(\phi_{t_k}(x))$  osoittaa joukon  $D$  sisään, niin sama pätee kaikkialla janalla  $[\phi_{t_k}(x), \phi_{t_{k-1}}(x)] \subset S$ . Siis  $\phi_{t_{k+1}}(x) \in D$  koska ratkaisukäyrä  $\phi([t_k, \infty], x)$  ei leikkaa silmukkaa  $\Sigma$ , joten tarkasteltavat pisteet ovat väitetyssä järjestyksessä. Toinen tapaus todistetaan vastaavasti.  $\square$

**Lause 12.4** (Poincarén ja Bendixsonin lause). *Olkkoon  $\Omega \neq \emptyset$  tason differentiaaliyhtälön kompakti rajajoukko. Jos  $\Omega$  ei sisällä yhtään tasapainopistettä, niin  $\Omega$  on suljettu rata.*

*Todistus.* Olkkoon  $y \in \omega(x)$ . Oletetaan, että joukon  $\omega(x)$  pisteet ovat säännöllisiä, erityisesti siis  $y$  on säännöllinen piste. Osoitamme ensin, että  $y$  on jaksollinen ja sitten, että  $\omega(x)$  koostuu pisteen  $y$  radasta.

Koska  $\omega(x)$  on kompakti, niin Proposition 6.10 mukaan  $\omega(y) \subset \omega(x)$  on invariantti kompakti joukko, joka sisältää ainakin yhden pisteen  $z$ . Olkkoon  $S$  lokaali poikkileikkaus pisteessä  $z$  ja olkkoon  $N$  vastaava virtauslaatikko.

Oletetaan, että tarkasteltavan pisteen  $y \in \omega(x)$  positiivinen rata kohtaa poikkileikkauksen  $S$  vähintään kahdessa pisteessä  $y_1, y_2 \in \omega(x)$ . Tällöin pisteen  $x$  rata kasautuu pisteisiin  $y_1$  ja  $y_2$ , joten se ei voi olla monotoninen, mikä on ristiriita Proposition 12.3 kanssa. Siis pisteen  $y$  rata kohtaa poikkileikkauksen  $S$  vain yhdessä pisteessä.

Koska  $z \in \omega(y)$ , niin on äärettömään nouseva jono  $t_k$ , jolle  $\phi_{t_k}(y) \in N$ . Siispä, koska pisteen  $y$  rata leikkaa poikkileikkausta vain yhdessä pisteessä  $y_1 \in S$ , on  $0 < s < t$ , joille  $\phi_s(y) = \phi_t(y) = y_1$ , joten  $y_1$  on jaksollinen. Siis myös  $y$  on jaksollinen piste jollain positiivisella jaksolla  $T$ . Olkkoon  $\Gamma$  pisteen  $y$  rata.

Osoitetaan sitten, että  $d(\phi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0$ , kun  $t \rightarrow \infty$ . Olkkoon  $S$  lokaali poikkileikkaus pisteessä  $y$ . Olkkoon  $t_k \nearrow \infty$  siten, että jono  $\phi_{t_k}(x) \rightarrow y$  monotonisesti poikkileikkauksessa  $S$ . Kun  $k$  on riittävän iso, niin jatkuva riippuvuus alkuarvoista (Lause 4.8) takaa, että  $\phi_T(\phi_{t_k}(x)) \in N$ , joten  $t_{k+1} \leq t_k \leq T + \epsilon$ .

Olkkoon  $\delta > 0$ . Jatkuvasta riippuvuudesta alkuarvoista (Lause 4.13 tai Lause 8.6) seuraa, että  $\|\phi_t(z) - \phi_t(y)\| \leq \delta$  kaikille  $t \in [t_k, t_k + T + \epsilon]$ , kun piste  $z$  on riittävän

lähellä pistettä  $y$ . Siis suurilla  $k$  pätee  $\|\phi_t(\phi_{t_k}(x)) - \phi_t(y)\| \leq \delta$  kaikille  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , joten sama epäyhtälö pätee kaikille suurille ajoille.  $\square$

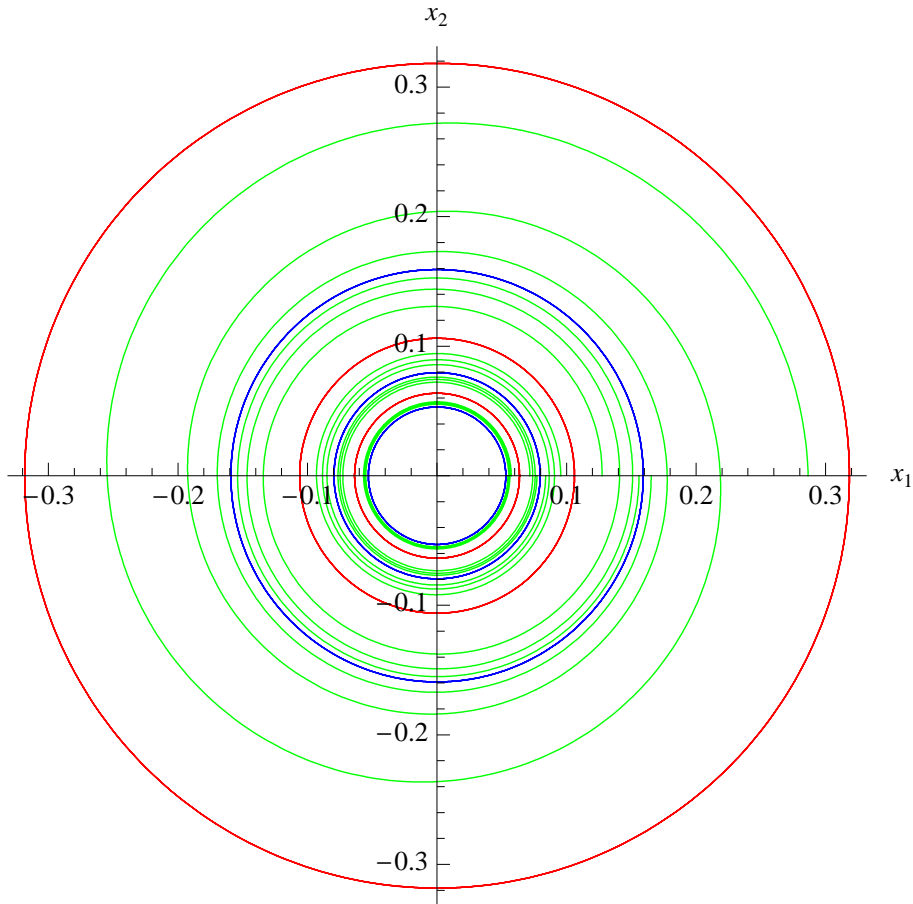
**Esimerkki 12.5.** Olkoon  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Vektorikenttä  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x) = \begin{cases} Ax + x\|x\|^2 \sin(\|x\|^{-1}), & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

on jatkuvasti differentioituva ja differentiaaliyhtälö  $\dot{x} = f(x)$  on napakoordinaateissa muotoa

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3 \sin(1/r), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Tästä muodosta näkee helposti, että ympyrät  $t \mapsto \frac{1}{k\pi}(\cos t, \sin t)$  ovat jaksollisia ratkaisuja kaikilla  $k \in \mathbb{N}$ . Lisäksi  $\dot{r} > 0$ , kun  $r \in ]\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi}[$  ja  $\dot{r} < 0$ , kun  $r \in ]\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{(2k-1)\pi}[$ , joten ympyrät  $r = \frac{1}{2k\pi}$  ovat puoleensavetäviä rajasyklejä ja ympyrät  $r = \frac{1}{(2k+1)\pi}$  ovat hylkiviä rajasyklejä.



KUVA 18. Punaiset ympyrät ovat hylkiviä ratoja, siniset puoleensavetäviä. Välissä olevien pisteiden  $\omega$ -rajajoukko on sininen ympyrä.

**Esimerkki 12.6.** Lorentzin differentiaaliyhtälö

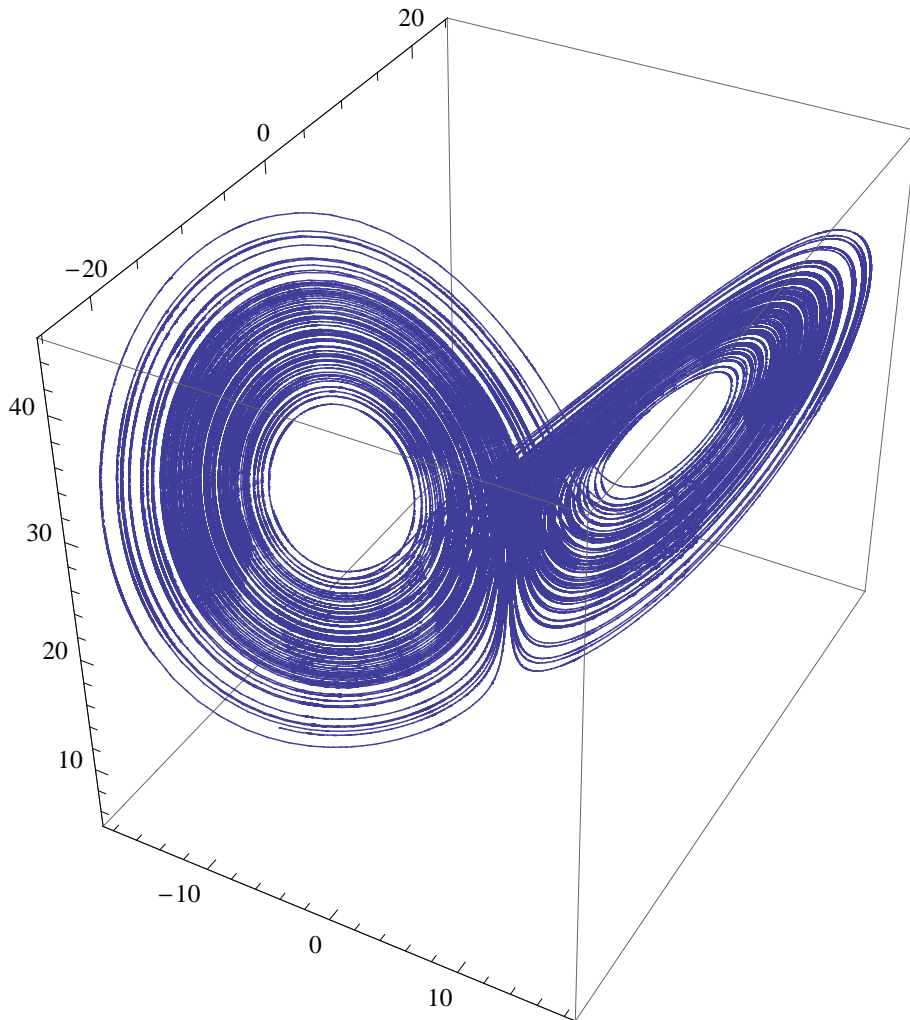
$$(43) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma(x_2 - x_1) \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_3 - bx_3 \end{pmatrix}$$

vuodelta 1963 kehitettiin alunperin hyvin vahvasti yksinkertaistetuksi ilmastomalliksi. lienee ensimmäinen differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisut käyttäytyvät kaoottisesti sopivilla parametreilla. Klassisin valinta on  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  ja  $r = 28$ .

Näillä parametreilla systeemi riippuu herkästi alkuarvoista, lähekkäisten pisteiden radat poikkeavat dramaattisesti toisistaan. Lisäksi systeemillä on *outo attraktori*. Joukko  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  on virtauksen  $\phi$  *attraktori*, jos

- $\Lambda$  on kompakti ja invariantti.
- Joukolla  $\Lambda$  on avoin positiivisesti invariantti ympäristö  $U$  siten, että  $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(U)$ .
- Virtaus  $V$  on topologisesti transitiivinen: jos  $V_1$  ja  $V_2$  ovat pisteiden  $x_1, x_2 \in \Lambda$  avoimia ympäristöjä, niin on  $z \in V_1$  ja  $t \geq 0$  siten, että  $\phi_t(z) \in V_2$ .

Lorentzin systeemin attraktoria sanotaan oudoksi muunmuassa sen vuoksi, että sen Hausdorffin dimensio ( $\approx 2.06$ ) ei ole kokonaisluku. Koska Lorentzin systeemi on "ilmastomalli", sen herkkä riippuvuus alkuarvoista tunnetaan myös perhosefektin nimellä.



KUVA 19. Lorentzin attraktori.

#### VIIITTEET

- [CL] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.

- [HSD] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2004.
- [Per] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993. Corrected reprint of the 1991 original.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS, PL 35, 40014 JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO  
*E-mail address:* jouni.t.parkkonen@jyu.fi