

Differentiaalilaskenta 1

Harjoitus 6, 24.10.2008

Tehtävät 1–3: Määritä funktioiden $u, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ääriarvopisteet ja niiden tyypit. Saavuttaako funktio suurimman ja pienimmän arvonsa? Tunnista funktion kuvaaja ja tasa-arvokäyrä takasivun kuvien joukosta.

1. $u(x) = \arctan(x_1^2 - 2x_1x_2)$.

2. $g(x) = x_1^3 - 3x_1x_2^2$.

3. $h(x) = 2\|x\|^2 e^{-\|x\|^2}$.

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1^3 - 3x_1^2 + 3x_1x_2^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2.$$

Määritä funktion f ääriarvopisteet ja niiden tyypit. Saavuttaako f suurimman ja pienimmän arvonsa?

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x_1^3 - 3x_1}{1 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Määritä funktion f ääriarvopisteet ja niiden tyypit. Saavuttaako f suurimman ja pienimmän arvonsa?

6. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 e^{-x_1^2} \cos x_2$. Määritä funktion f ääriarvopisteet ja niiden tyypit. Saavuttaako f suurimman ja pienimmän arvonsa?

7. Olkoon $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ neliömuoto. Osoita, että kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja $u \in \mathbb{R}^n$ pätee $Q(tu) = t^2 Q(u)$. Osoita, että on $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, joille

$$\alpha \|u\|^2 \leq Q(u) \leq \beta \|u\|^2$$

kaikilla $u \in \mathbb{R}^n$.

8. Olkoon $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ neliömuoto. Olkoon $[a_{ij}]$ neliömuotoa Q vastaava symmetrinen matriisi. Osoita:

- (a) Jos Q on positiivisesti definiitti, niin $a_{ii} > 0$ kaikilla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- (b) Jos $a_{ii} > 0$ ja $a_{jj} < 0$ joillakin $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, niin Q on indefiniitti.

⁸Vihje: Tarkastele kantavektorien $\bar{e}_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ kuvautumista.

