

Differentiaalilaskenta 1
Harjoitus 5, 17.10.2008

1. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{\|x\|^2}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Määritä $\partial_1 f(0)$, $\partial_2 f(0)$, $\partial_1 \partial_2 f(0)$, $\partial_2 \partial_1 f(0)$, jos ne ovat olemassa.

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log \|x\|$. Osoita, että

$$\partial_1^2 f(x) + \partial_2^2 f(x) = 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

3. Olkoon $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \|x\|^{-1}$. Osoita, että

$$\partial_1^2 g(x) + \partial_2^2 g(x) + \partial_3^2 g(x) = 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

4. Olkoon $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \arctan(x_1^2 - 2x_1x_2)$. Määritä funktion u toisen kertaluvun Taylorin polynomi pisteessä 0.

5. Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^3 - 3x_1x_2^2$. Määritä funktion g toisen kertaluvun Taylorin polynomi pisteessä 0.

6. Olkoon $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2\|x\|^2 e^{-\|x\|^2}$. Määritä funktion h toisen kertaluvun Taylorin polynomi pisteessä 0.

7. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1x_2^2 - e^{x_1^2+x_2}$. Olkoon $a = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Määritä toisen asteen polynomi $P(x)$, jolle on voimassa

$$\frac{f(x) - P(x)}{\|x - a\|^2} \rightarrow 0,$$

kun $x \rightarrow a$.

8. Olkoon $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolle pätee

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \min\{F(x) : \|x\| = r\} = \infty.$$

Osoita, että funktiolla F on globaali minimi joukossa $\mathbb{R}^n$.

Huomaa: Tässä tehtävässä ei oleteta mitään funktion F differentioituvuudesta.

⁸Vihje: Kannattaa kerrata kurssin *Euklidiset avaruudet* asioita