

Differentiaalilaskenta 1

Harjoitus 4, 9.10.2008

1. Olkoon $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$N(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

napakoordinaattikuvaus, ja olkoon $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$P(r, \phi, \theta) = (r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi \cos \theta, r \sin \theta)$$

pallokoordinaattikuvaus. Määritä kuvausten N ja P derivaatat kaikissa pisteissä $(r, \phi) \in \mathbb{R}^2$ ja $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3$. Missä pisteissä kuvausten N ja P derivaatat ovat bijektioita?

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x_1^2 + x_2^2$. Olkoon $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

(a) Missä pisteissä $x \in S$ funktio f kasvaa nopeiten?

(b) Mihin suuntaan kasvunopeus on suurimmillaan (a)-kohdan pisteissä?

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva funktio. Olkoon $v \in \mathbb{R}^2$ vektori, joka osoittaa pisteestä $(1, 2)$ kohti pistettä $(2, 2)$, ja olkoon w vektori, joka osoittaa pisteestä $(1, 2)$ kohti pistettä $(2, 3)$. Funktion käyttäytymisestä f pisteessä $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ tiedetään: $\partial_v f(1, 2) = 2$ ja $\partial_w f(1, 2) = -2$. Määritä $\nabla f(1, 2)$.

4. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Olkoot $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g : U \rightarrow]0, \infty[$ differentioituvia funktioita. Osoita:

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{g(x) \nabla f(x) - f(x) \nabla g(x)}{g(x)^2}$$

kaikilla $x \in G$.

5. Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Olkoon $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva funktio ja olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ differentioituva polku. Todista väite: Jos funktion f rajoittuma käyrälle $\gamma([a, b])$ on vakiofunktio, niin

$$(\nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t)) = 0$$

kaikilla $t \in [a, b]$. Mitä tämä merkitsee geometrisesti?

6. Olkoon $I = [-1, 1]$. Olkoon $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$.

(a) Piirrä γ :n kuvajoukko.

(b) Määritä polun γ tangenttivektori pisteessä $\gamma(t)$ kaikilla $t \in I$.

(c) Piirrä havainnollistava kuva tilanteesta.

7. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Olkoon $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva kuvaus. Olkoot $a, b \in U$ pisteitä, joiden välinen jana $J(a, b)$ sisältyy joukkoon U . Olkoon lisäksi $f(a) = f(b)$. Osoita, että on olemassa piste $\xi \in J(a, b)$ siten, että $\nabla f(\xi) \perp (b - a)$.

8. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva. Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko siten, että kaikilla $a, b \in K$ pätee $J(a, b) \subset K$. Osoita, että on olemassa $M > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| \leq M \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in K$.

²Vihje: Parametrisoi ympyrä S napakoordinaatin ϕ avulla.

³Vihje: $Df(1, 2)$ on lineaarikuvaus!

⁴Vihje: Kannattaa ehkä ensin tarkastella kuvausta $\frac{1}{g} : U \rightarrow \mathbb{R}$.