

Differentiaalilaskenta 1

Harjoitus 3, 2.10.2008

1. Olkoon $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2||x||^2 e^{-||x||^2}$.

(a) Määritä funktion h derivaatta jokaisessa pisteessä $a \in \mathbb{R}^2$.

(b) Määritä funktion h suuntaisderivaatta vektorin $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ suuntaan jokaisessa pisteessä $a \in \mathbb{R}^2$. Missä tason pisteissä tämä suuntaisderivaatta on nolla?

2. Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \cos(x_1^2 + x_2^2),$$

ja olkoon $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$t(x) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2).$$

Määritä funktion $g \circ t$ derivaatta jokaisessa tason $\mathbb{R}^2$ pisteessä.

3. Olkoot $G, G' \subset \mathbb{R}^n$ avoimia joukkoja. Olkoon $f : G \rightarrow G'$ differentioituva bijektio, jonka käänteiskuvaus on differentioituva. Osoita, että $Df(a)$ on bijektio kaikilla $a \in G$.

4. Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, ja olkoot $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ differentioituvia kuvauksia. Osoita ketjusäännön avulla, että funktio $h : G \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = (f(x)|g(x)),$$

on differentioituva ja määritä sen derivaatan lauseke jokaiselle $a \in G$.

5. Olkoon $\Phi :]0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ napakoordinaattikuvaus

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva funktio. Määritä osittaisderivaatat $\partial_r(f \circ \Phi)$ ja $\partial_\theta(f \circ \Phi)$. Muotoile yhtälö

$$(\partial_r f)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta f)^2 = (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 ?$$

huolellisemmin ja todista se.

6. Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^3 - 3x_1x_2^2$.

(a) Määritä funktion g lauseke napakoordinaateissa ja hahmottele funktion g tasa-arvokäyriä kuvauksen havainnollistamiseksi.

(b) Määritä funktion g gradientti jokaisessa pisteessä $a \in \mathbb{R}^2$ ja piirrä muutamia gradienttivektoreita (a)-kohdan kuvaan.

7. Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x_2 - \sin^2 x_1$.

(a) Määritä $\nabla g(x)$ kaikissa pisteissä $x \in \mathbb{R}^2$.

(b) Mihin suuntaan ja millä nopeudella g kasvaa voimakkaimmin pisteissä $\left(\frac{k\pi}{4}, 0\right)$, kun $k \in \{-1, 0, 1\}$.

8. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1x_2 + x_2x_3$.

(a) Määritä funktion f derivaatta pisteessä $a = (2, -2, 0)$.

(b) Kuinka suuri virhe tehdään, jos erotusta $f(a+u) - f(a)$ arvioidaan muutosta $u = (10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-1})$ vastaavalla kokonaisdifferentiaalilla?

⁶Vihje: Harjoitusten 2 tehtävän 2 funktion f lauseke napakoordinaateissa on

$$(r, \theta) \mapsto r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r^2 \cos(2\theta).$$

Funktion g lauseke muistuttaa tätä, ja sen tasa-arvokäyrien muodon voi päätellä funktion f tasa-arvokäyrien avulla.