

Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Harjoitus 2, 25.9.2008

1. Olkoon S tason $\mathbb{R}^2$ pallon $B(0; 2\pi)$ osajoukko

$$S = \{(r, \phi) = (t, t) : 0 < t < 2\pi\},$$

missä (r, ϕ) ovat $\mathbb{R}^2$:n napakoordinaatit. Olkoon $f : B(0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \notin S \\ 1, & \text{jos } x \in S. \end{cases}$$

- (a) Mihin suuntiin funktiolla f on suuntaisderivaatat pisteessä 0?
- (b) Missä joukon $B(0; 2\pi)$ pisteissä funktio f on differentioituva?

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 - x_2^2$.

- (a) Määritä funktion f tasa-arvokäyrät.
- (b) Määritä funktion f derivaatta jokaisessa pisteessä $a \in \mathbb{R}^2$.

3. Olkoon $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t(x) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$.

- (a) Määritä kuvauksen t derivaatta jokaisessa pisteessä $a \in \mathbb{R}^2$.
- (b) Mikä on kuvauksen t geometrinen tulkinta?

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{cases} (x \cos(x), x^2 \sin(1/x)), & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Osoita, että f on differentioituva.
- (b) Määritä kuvauksen f derivaatta jokaiselle $a \in \mathbb{R}$.
- (c) Onko f jatkuvasti differentioituva?

5. Määritä funktion $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$k(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0, \\ \|x\|^2 \sin(1/\|x\|) & \end{cases}$$

derivaatta kaikissa pisteissä $a \in \mathbb{R}^2$.

6. Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, ja olkoon $a \in G$. Osoita, että kuvaus $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä a , jos ja vain jos on lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, jolle

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(a+u) - f(a) - L(u)}{\|u\|} = 0.$$

7. Olkoon $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) = x\|x\|$.

- (a) Osoita, että g on differentioituva.
- (b) Määritä funktion g derivaatta jokaisessa pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

8. Olkoon $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(x) = (x_1x_2, \|x\|^2).$$

Missä pisteissä kuvauksen F derivaatta on bijektio?

⁷Vihje: Nollassa kannattaa tehdä määritelmällä, muualla ehkä ei.