

Differentiaalilaskenta 1

Harjoitus 1, 18.9.2008

Huomautuksia: (1) Kannattaa kerrata kurssin Euklidiset avaruudet asioita: jatkuvuus, napakoordinaatit, tasa-arvokäyrät, . . .
(2) Tehtäviä on paperin molemmilla puolilla.

1. Määritä seuraavien kuvausten osittaisderivaatat kaikissa määrittelyjoukon pisteissä.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = (x_1^4 x_2, x_1 + x_2^3)$$

(b) $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \log(1 + \|x\|^2).$$

2. Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a|x)$. Määritä funktion f suuntaisderivaatat jokaisessa pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = (x_1 x_2^2, x_2 \cos x_1, x_1 \sin x_1),$$

ja olkoon $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\|x\|^2}, & \text{kun } x \neq 0. \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

3. (a) Määritä funktion f osittaisderivaatat kaikissa pisteissä $x \in \mathbb{R}^2$.

(b) Määritä funktion g osittaisderivaatat kaikissa pisteissä $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

4. Määritä funktion g lauseke napakoordinaateissa. Määritä funktion g tasa-arvokäyrät ja piirrä muutamia tasa-arvokäyriä funktion havainnollistamiseksi.

5. Onko funktio g jatkuva? Mihin suuntiin funktiolla g on suuntaisderivaatat pisteessä $0 \in \mathbb{R}^2$?

Olkoon $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, & \text{kun } x \neq 0. \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

6. Määritä funktion h tasa-arvokäyrät ja piirrä muutamia tasa-arvokäyriä funktion havainnollistamiseksi.

7. Osoita, että funktio h ei ole jatkuva pisteessä $0 \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että funktiolla h on suuntaisderivaatat kaikkiin suuntiin pisteessä $0 \in \mathbb{R}^2$.

⁶Vihje: Olkoon $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k(x) = (x_1, x_2^2)$, ja olkoon g kuten tehtävässä 4. Tällöin $h = g \circ k$.

8. Olkoon

$$S = \{(r, \phi) = (t, t) \in B(0; 2\pi) : 0 < t < 2\pi\},$$

missä (r, ϕ) ovat $\mathbb{R}^2$:n napakoordinaatit. Olkoon $f : B(0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \notin S \\ 1, & \text{jos } x \in S. \end{cases}$$

- (a) Hahmottele joukko S .
- (b) Missä joukon $B(0; 2\pi)$ pisteissä funktio f on jatkuva?