

5. Osoita, että on kunta, jossa on 125 alkia.

Ratkaisu. Kokeilemalla

c	0	1	2	3	4
c^3	0	1	3	2	4
$c^3 + c$	0	2	0	0	3
$c^3 + c + 1$	1	3	1	1	4

huomaamme, että kolmannen asteen polynomilla $P(X) = X^3 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ ei ole juuria. Seurauksen 6.17 nojalla $P(X)$ on jaoton, joten $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(P(X))$ on kunta, jossa on 125 alkia.

6. Olkoon $P(X) = X^3 + 3X + 1 \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

(a) Esitä $P(X)$ jaottomien polynomien tulona.

(b) Anna esimerkki nollan jakajasta tekijärenkaassa $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]/(P(X))$.

(c) Osoita, että $X^2 + 3 + (P(X)) \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]/(P(X))$ on yksikkö.

Ratkaisu. (a) Laskemalla huomataan, että $P(0) = 1$, $P(1) = 5$, $P(2) \equiv 1 \pmod{7}$, $P(3) \equiv 2 \pmod{7}$, $P(4) \equiv 0 \pmod{7}$, $P(5) \equiv 1 \pmod{7}$ ja $P(6) \equiv P(-1) \equiv 4 \pmod{7}$. Siis $4 + 7\mathbb{Z}$ on polynomin $P(X)$ ainoa juuri.

Proposition 6.16 nojalla $(X - 4) \mid P(X)$. Lasku esimerkiksi jakokulmassa osoittaa, että $P(X) = (X - 4)(X^2 + 4X + 5)$. Tämä on haluttu esitys, sillä $X^2 + 4X + 5$ on jaoton, koska 4 ei ole polynomin $X^2 + 4X + 5$ juuri.

(b) Kohdan (a) laskun nojalla $(X - 4 + (P(X)))(X^2 + 4X + 5 + (P(X))) = 0 + (P(X))$.

(c) $(-X + (P(X)))(X^2 + 3 + (P(X))) = -X^3 - 3X + (P(X)) = 1 + (P(X))$, joten $-X + (P(X))$ on alkion $X^2 + 3 + (P(X))$ käänteisalkio.

7. Olkoon K kokonaisalue ja olkoon $a \in K - \{0\}$ alkio, joka ei ole jaoton. Osoita, että (a) ei ole maksimaalinen ideaali.

Ratkaisu. Koska a ei ole jaoton, on $b, c \in K - (K^\times \cup \{0\})$, joille $a = bc$. Siis $a \in (b)$. Jos $(b) = K$, niin $1 = kb$ jollain $k \in K$, joten b olisi yksikkö. Siis (b) on aito ideaali. Jos $b \in (a)$, niin $a \mid b$. Harjoitustehtävän 5.3(2) nojalla tästä seuraa $a = ub$ jollain yksiköllä u . Kertolaskun supistussäännön nojalla $c = u$, mutta tämä on ristiriita, sillä c ei ole yksikkö. Siis (a) on aidon ideaalin (b) aito osajoukko, joten (a) ei ole maksimaalinen.

8. Olkoot L ja M kommutatiivisen renkaan K ideaaleja. Osoita, että LM ja $L + M$ ovat renkaan K ideaaleja.

Ratkaisu. Koska L ja M ovat ideaaleja, niin $0 \in L$ ja $0 \in M$, joten $0 = 0 \cdot 0 \in LM$ ja $0 = 0 + 0 \in L + M$, joten LM ja $L + M$ eivät ole tyhjiä joukkoja. Sovellamme ideaalitestiä.

Olkoot $a, b \in L + M$. Tällöin $a = a_L + a_M$ ja $b = b_L + b_M$ joillain $a_L, b_L \in L$ ja $a_M, b_M \in M$. Siis

$$a - b = a_L + a_M - (b_L + b_M) = (a_L - b_L) + (a_M - b_M) \in L + M,$$

sillä $a_L - b_L \in L$ ja $a_M - b_M \in M$, koska L ja M ovat ideaaleja. Jos $a = a_L + a_M \in L + M$ ja $k \in K$, niin

$$ka = k(a_L + a_M) = ka_L + ka_M \in L + M,$$

koska L ja M ovat ideaaleja. Ideaalitestin nojalla $L + M$ on ideaali.

Olkoot $a, b \in LM$. Tällöin

$$a = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m$$

ja

$$b = z_1w_1 + z_2w_2 + \cdots + z_nw_n$$

joillain $m, n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n \in L$ ja $y_1, y_2, \dots, y_n, w_1, w_2, \dots, w_n \in M$.
 $a_L, b_L \in L$ ja $a_M, b_M \in M$. Siis

$$a - b = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m + (-z_1)w_1 + (-z_2)w_2 + \cdots + (-z_n)w_n \in LM,$$

koska L on ideaali. Jos $a = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m \in LM$ ja $k \in K$, niin

$$ka = k(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m) = (kx_1)y_1 + (kx_2)y_2 + \cdots + k(x_m)y_m \in L + M,$$

koska L on ideaali. Ideaalitestin nojalla LM on ideaali.