Renkaat ja kunnat 2026

Harjoitus 6: ratkaisuja

1. Olkoot $a_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ja olkoon

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]\,.$$

Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ polynomin $P(X)$ juuri. Osoita, että $\overline{z_0}$ on polynomin $P(X)$ juuri.

Ratkaisu. Kompleksikonjugaatin perusominaisuuksia ja oletusta käyttämällä saamme

$$\overline{P(\overline{z_0})} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{z_0})^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k (\overline{z_0})^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{(\overline{z_0})^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k\, {z_0}^k = P(z_0) = 0\,,$$

joten $P(\overline{z_0}) = 0$.

2. Todista Seuraus 6.17.

Ratkaisu. Olkoon K kunta ja olkoon $P(X) \in K[X]$ polynomi, jonka aste on 2 tai 3. Osoitetaan, että $P(X)$ ei ole jaoton, jos ja vain jos sillä on juuri.

Jos polynomilla $P(X)$ on juuri $c \in K$, niin Proposition 6.16 nojalla $(X - c) \mid P(X)$. Siis $P(X) = (X - c)Q(X)$ jollakin $Q(X) \in K[X]$. Proposition 6.10 nojalla polynomit $(X - c)$ ja $Q(X)$ eivät ole yksiköitä, sillä kummankin aste on vähintään 1 Proposition 6.8 nojalla. Siis $P(X)$ ei ole jaoton.

Jos $P(X)$ ei ole jaoton, niin on polynomit $Q(X), R(X) \in K[X]$, jotka eivät ole yksiköitä ja joille pätee $P(X) = Q(X)R(X)$. Proposition 6.10 nojalla $\deg P(X), \deg Q(X) \geqslant 1$. Jos $\deg P(X) = 2$, niin Proposition 6.8 nojalla

$$2 = \deg P(X) = \deg Q(X) + \deg R(X)\,,$$

joten $\deg P(X) = \deg Q(X) = 1$. Jos $\deg P(X) = 3$, niin Proposition 6.8 nojalla

$$3 = \deg P(X) = \deg Q(X) + \deg R(X)\,,$$

joten $\{\deg P(X), \deg Q(X)\} = \{1, 2\}$. Molemmissa tapauksissa $P(X)$ on jaollinen ensimmäisen asteen polynomilla, olkoon tämä polynomi $Q(X)$. Ensimmäisen asteen polynomilla $Q(X)$ on juuri $c \in K$, sillä K on kunta. Siis $P(c) = Q(c)R(c) = 0$, joten polynomilla $P(X)$ on juuri.

3. Olkoon

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]\,.$$

(a) Olkoon $q \in \mathbb{Z}$ polynomin $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ juuri. Osoita, että $q \mid a_0$.

(b) Olkoon $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ polynomin $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ juuri supistetussa muodossa.[1] Osoita, että $r \mid a_0$ ja $s \mid a_n$.

[1] Siis $\operatorname{syt}(r, s) = 1$.

Ratkaisu. (a) Jos

$$0 = P(q) = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \cdots + a_1 q + a_0 \,,$$

niin

$$a_0 = -(a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \cdots + a_1 q)$$

on jaollinen luvulla q, koska jokainen yhtälön oikean puolen summassa esiintyvä termi on jaollinen luvulla q.

(b) Jos

$$P(X) = a_n \big(\frac{r}{s}\big)^n + a_{n-1} \big(\frac{r}{s}\big)^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{r}{s} + a_0 = 0 \,,$$

niin kertomalla luvulla s^n saamme yhtälön

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0 \,.$$

Siis $r \mid a_0 s^n$ ja $s \mid a_n r^n$. Koska oletamme, että lukujen r ja s suurin yhteinen tekijä on 1, täytyy olla $r \mid a_0$ ja $s \mid a_n$.

4. Esitä polynomi $P(X) = X^4 + 2X^3 - 10X^2 - 11X - 12 \in \mathbb{Q}[X]$ jaottomien polynomien tulona.

Ratkaisu. Tehtävän 3(b) nojalla mahdolliset rationaaliset juuret ovat ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 ja ± 12. Kokeilemalla huomaamme, että 3 ja -4 ovat juuria, joten $(X-3) \mid P(X)$, $(X+4) \mid P(X)$. Polynomien jakolasku antaa

$$P(X) = (X-3)(X+4)(X^2+X+1) \,. \tag{1}$$

Tehtävän 3(b) nojalla polynomin X^2+X+1 mahdolliset rationaalijuuret ovat ± 1, mutta ne eivät ole juuria. Proposition 6.17 nojalla (1) on haluttu esitys.

5. Määritä kaikki renkaan $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ jaottomat toisen asteen polynomit.

Ratkaisu. Toisen asteen polynomeja on 18. Jos Polynomin $P(X)$ vakiotermi on 0, niin 0 on juuri, joten $P(X)$ ei ole jaoton. Riittää siis tarkastella ne 12 polynomia, joiden vakiotermi on 1 tai 2. Taulukko esittää näitä polynomeja vastaavien polynomifunktioiden arvot ja mahdollisen tekijöihinjaon

$P(X)$	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	
X^2+1	1	2	2	jaoton
X^2+2	2	0	0	$(X+1)(X+2)$
$2X^2+1$	1	0	0	$2(X+1)(X+2)$
$2X^2+2$	2	1	1	jaoton
X^2+X+1	1	0	1	$(X+2)^2$
X^2+X+2	2	1	2	jaoton
$2X^2+X+1$	1	1	2	jaoton
$2X^2+X+2$	2	2	0	$2(X+1)^2$
X^2+2X+1	1	1	0	$(X+1)^2$
X^2+2X+2	2	2	1	jaoton
$2X^2+2X+1$	1	2	1	jaoton
$2X^2+2X+2$	2	0	2	$2(X+2)^2$

6. Todista Propositio 7.11(1).

Ratkaisu. Koska $\mathscr{I}$ on ideaali, se ei ole tyhjä joukko. Siis $\phi(\mathscr{I}) \neq \varnothing$. Olkoot $a, b \in \phi(\mathscr{I})$. Tällöin $a = \phi(a_0)$ ja $b = \phi(b_0)$ joillain $a_0, b_0 \in \mathscr{I}$. Koska ϕ on homomorfismi ja $\mathscr{I}$ on ideaali, saamme

$$a - b = \phi(a_0) - \phi(b_0) = \phi(a) + \phi(-b) = \phi(a_0 - b_0) \in \phi(\mathscr{I})\,.$$

Olkoon $a \in \phi(\mathscr{I})$ ja olkoon $s \in \phi(R)$. Tällöin $a = \phi(a_0)$ ja $s = \phi(s_0)$ ja

$$sa = \phi(s_0)\phi(a_0) = \phi(s_0 a_0) \in \phi(\mathscr{I})\,,$$

koska $s_0 a_0 \in \mathscr{I}$. Vastaavasti

$$as = \phi(a_0)\phi(s_0) = \phi(a_0 s_0) \in \phi(\mathscr{I})\,,$$

koska $a_0 s_0 \in \mathscr{I}$. Ideaalitestin nojalla $\phi(\mathscr{I})$ on renkaan $\phi(R)$ ideaali.

Olkoon K kommutatiivinen rengas. Alkion $k \in K$ *annihilaattori* on

$$\mathrm{A}(k) = \{a \in K : ak = 0\}.$$

7. Olkoon K kommutatiivinen rengas ja olkoon $k \in K$. Osoita, että $\mathrm{A}(k)$ on ideaali.

Ratkaisu. Huomataan ensin, että $0 \in \mathrm{A}(k)$, koska $0 \cdot k = 0$. Siis $\mathrm{A}(k)$ ei ole tyhjä joukko ja voimme soveltaa ideaalitestiä. Olkoot $a, b \in \mathrm{A}(k)$. Tällöin

$$(a - b)k = ak - bk = 0 + 0 = 0\,,$$

joten $a - b \in \mathrm{A}(k)$. Koska K on kommutatiivinen, riittää tarkastaa ideaalitestin ehto (2) vain toiselta puolelta. Jos $a \in \mathrm{A}(k)$ ja $x \in K$, niin

$$(xa)k = x(ak) = x \cdot 0 = 0\,,$$

joten $xa \in \mathrm{A}(k)$. Ideaalitestin nojalla $\mathrm{A}(k)$ on ideaali.

8. Määritä tekijärenkaan $R = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^2)$ laskutaulut. Mitkä renkaan R alkiot ovat yksiköitä? Onko rengas R kunta?

Ratkaisu. Valitaan jäännösluokille edustajat $0, 1, X, X+1$ ja muodostetaan laskutaulut.

$+$	0	1	X	$X+1$
0	0	1	X	$X+1$
1	1	0	$X+1$	X
X	X	$X+1$	0	1
$X+1$	$X+1$	X	1	0

ja

$\cdot$	0	1	X	$X+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	X	$X+1$
X	0	X	0	X
$X+1$	0	$X+1$	X	1

.

Kertolaskun laskutaulusta näemme, että $1 + (X^2 + 1)$ ja $X + 1 + (X^2 + 1)$ ovat yksiköitä. Lisäksi $X + (X^2 + 1)$ on nollanjakaja, joten neljän alkion rengas R ei ole kunta, koska Seurauksen 5.4 mukaan kunnassa ei ole nollanjakajia.