Renkaat ja kunnat 2026

Harjoitus 5: ratkaisuja

1. (1) Olkoon K kommutatiivinen rengas. Olkoon $u \in K^\times$ ja olkoon $a \in K$. Osoita, että $a \in K^\times$, jos $a \mid u$.

(2) Olkoon K kokonaisalue. Jos $a \mid b$ ja $b \mid a$, niin $a = ub$ jollain $u \in K^\times$.

Ratkaisu. (1) Olkoon $u \in K^\times$ ja olkoot $a, b \in K$ siten, että $u = ab$. Kertolaskun assosiatiivisuuden nojalla

$$a(bu^{-1}) = (ab)u^{-1} = uu^{-1} = 1\,,$$

joten a on yksikkö.

(2) Olkoot $a, b, c, d \in K$ siten, että $b = ac$ ja $a = bd$. Tällöin $a = (ac)d = a(cd)$. Jos $a \neq 0$, niin kertolaskun supistussäännön nojalla saadaan $cd = 1$, joten c ja d ovat yksiköitä. Jos taas $a = 0$, niin $b = ac = 0$, joten mille tahansa yksikölle u pätee $a = 0 = u0 = ub$.

2. Osoita, että kokonaisalueen K ainoat idempotentit alkiot ovat 0 ja 1.

Ratkaisu. Jos $x^2 = x$, niin assosiatiivisuuden nojalla saadaan $x(x-1) = x^2 - x = 0$. Koska K on kokonaisalue pätee $x = 0$ tai $x = 1$.

3. Määritä renkaan $\mathbb{Z}/15\,\mathbb{Z}$ yksiköt ja nollanjakajat. Määritä renkaan $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ jokaisen yksikön käänteisalkio.

Ratkaisu. Proposition 5.16 nojalla $a + 15\mathbb{Z}$ on yksikkö, jos ja vain jos $\operatorname{syt}(a, 20) = 1$. Tämä pätee, kun $a \in \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$. Muut nollasta poikkeavat alkiot $a + 15\mathbb{Z}$, kun $a \in \{3, 5, 6, 9, 10, 12\}$ ovat nollanjakajia. Lasku osoittaa, että

$$\begin{aligned}
(1 + 15\mathbb{Z})^2 &= 1 + 15\mathbb{Z}\,,\\
(14 + 15\mathbb{Z})^2 &= (-1 + 15\mathbb{Z})^2 = 1 + 15\mathbb{Z}\,,\\
(2 + 15\mathbb{Z})(8 + 15\mathbb{Z}) &= 16 + 15\mathbb{Z} = 1 + 15\mathbb{Z}\,,\\
(4 + 15\mathbb{Z})^2 &= 16 + 15\mathbb{Z} = 1 + 15\mathbb{Z}\,,\\
(11 + 15\mathbb{Z})^2 &= 121 + 15\mathbb{Z} = 1 + 15\mathbb{Z}\,,\\
(7 + 15\mathbb{Z})(13 + 20\mathbb{Z}) &= (-8 + 15\mathbb{Z})(-2 + 15\mathbb{Z}) = 16 + 15\mathbb{Z} = 1 + 15\mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
(\pm 1 + 15\mathbb{Z})^{-1} &= \pm 1 + 15\mathbb{Z}\,,\\
(2 + 15\mathbb{Z})^{-1} &= (8 + 15\mathbb{Z})\,,\\
(4 + 15\mathbb{Z})^{-1} &= (4 + 15\mathbb{Z})\,,\\
(11 + 15\mathbb{Z})^{-1} &= (11 + 15\mathbb{Z})\,,\\
(7 + 15\mathbb{Z})^{-1} &= (13 + 15\mathbb{Z})\,.
\end{aligned}$$

4. Jaa polynomi

$$P(X) = X^3 + 2X^2 + X + 2 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$$

polynomilla

$$Q(X) = X^2 + 2 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]\,.$$

Ratkaisu. (1) $X^3 + 2X^2 + X + 2 = (X + 2)(X^2 + 2) + 2X + 1$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & X & +2 & & \\
\hline
X^2+2 & X^3 & +2X^2 & +X & +2 \\
 & \mp X^3 & & \mp 2X & \\
\cline{2-5}
 & & 2X^2 & +2X & +2 \\
 & & \mp 2X^2 & & \mp 4 \\
\cline{3-5}
 & & & 2X & -2
\end{array}
$$

5. Laske $(X^2 + 11)\,(X^4 + 11X^3 - X^2 + 11X + 1)$ polynomirenkaissa $\mathbb{Z}[X]$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ ja $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

Ratkaisu. Lasketaan tulo renkaassa $\mathbb{Z}[X]$ määritelmän avulla

$$(11+X^2)(1+11X-X^2+11X^3+X^4) = X^6+11X^5+10X^4+132X^3-10X^2+121X+11 \in \mathbb{Z}[X].$$

Renkaassa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ voi esittää kerrottavat ensin kertoimien 0 ja 1 avulla ja laskea helposti

$$\begin{aligned}(11 + X^2)(1 + 11X - X^2 + 11X^3 + X^4) =&(1 + X^2)(1 + X + X^2 + X^3 + X^4)\\ =&X^6 + X^5 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]\end{aligned}$$

tai voi vaihtaa kokonaislukukertoimisen laskun polynomin edustajiksi luvut 0 ja 1, jolloin saa saman vastauksen.

Vastaavasti

$$(11 + X^2)(1 + 11X - X^2 + 11X^3 + X^4) = X^6 + X^5 + 2X^3 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]\,.$$

6. Laske $(X - 1)^5$ polynomirenkaissa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ ja $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

Ratkaisu. Binomikaavalla saadaan $(X-1)^5 = X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 5X + 1$, josta saadaan

- $X^5 + X^4 + X + 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$
- $X^5 + 1 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$
- $X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 5X + 6 \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z})[X]$

7. Jaa polynomi

$$P(X) = X^5 + 3X^3 + 1$$

polynomilla

$$Q(X) = 2X + 1$$

(1) polynomirenkaassa $\mathbb{Q}[X]$ ja
(2) polynomirenkaassa $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

Ratkaisu. (1) Polynomien jakolaskulla saadaan renkaassa $\mathbb{Q}[X]$

$$P(X) = \left(\frac{X^4}{2} - \frac{X^3}{4} + \frac{13}{8}X^2 - \frac{13}{16}X + \frac{13}{32}\right)(2X + 1) + \frac{19}{32}\,.$$

(2) Polynomien jakolaskulla saadaan renkaassa $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$

$$P(X) = (4X^4 + 5X^3 + 6X^2 + 4X + 5)(2X + 1) + 3\,.$$

Tehtävän 8 muotoilu on korjattu. Alkuperäisessä muotoilussa myös (a)-kohdan polynomi oli renkaassa $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$, mutta tämän polynomirenkaan ainoat yksiköt ovat vakiopolynomit 1 ja 5.

8. Anna esimerkit polynomeista $P(X)$ ja $Q(X)$, joille pätee
(a) $P(X) \in \big((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]\big)^\times$ ja $\deg P(X) \geqslant 1$ ja
(b) $Q(X) \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$ on nollanjakaja ja $\deg Q(X) \geqslant 1$.

Ratkaisu. (a) Valitaan $P(X) = 2X + 1$. Tällöin $P(X)^2 = 4X^2 + 4X + 1 = 1$.
(b) Valitaan esimerkiksi $Q(X) = 2X$. Tällöin $Q(x)\,3X = 2X\ 3X = 6X = 0$.